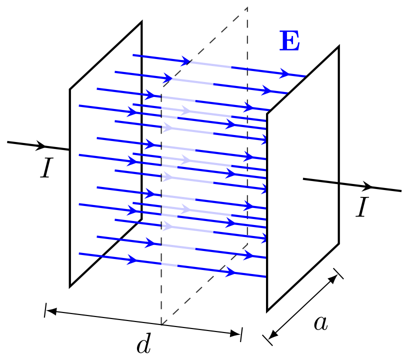
Fizika A2E, 11. feladatsor

Vida György József
vidagyorgy@gmail.com

1. feladat: Állandó, $I = 0{,}1\,\mathrm{A}$ erősségű áram tölt egy $a = 5\,\mathrm{cm}$ élű, $d = 4\,\mathrm{mm}$ távolságban lévő, négyzet alakú lapokból álló síkkondenzátort.

a) Határozzuk meg az elektromos fluxus $d\Phi_E/dt$ változási sebességét a lapok között!

b) Mekkora az eltolási áram a lapok között?



1-A. ábra

Megoldás:

a) Az elektromos fluxus meghatározásához először tudnunk kell, hogy a kondenzátorban mekkora a térerősség:

$$E(t) = \frac{U(t)}{d} = \frac{Q(t)}{Cd} = \frac{I}{Cd}t\,, \tag{1-1}$$

ahonnan

$$\Phi(t) = \int \mathbf{E}\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = E(t)\cdot A = \frac{Ia^2}{Cd}t\,. \tag{1-2}$$

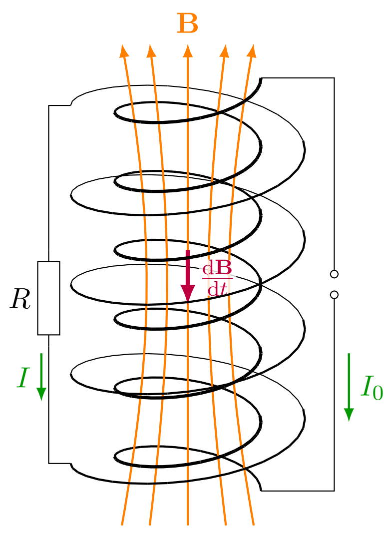
b) Az eltolási áram

$$I_{\text{eltolás}} = \varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Ia^2}{Cd}t\right) = \varepsilon_0\frac{Ia^2}{Cd}\,, \tag{1-3}$$

ahol ha behelyettesítjük a síkkondenzátor kapacitásának értékét, $C = \varepsilon_0\frac{a^2}{d}$,

$$I_{\text{eltolás}} = I\,. \tag{1-4}$$

2. feladat: Erős elektromágnes $B = 1{,}6\,\mathrm{T}$ erősségű mágneses teret tud létrehozni egy $A = 0{,}2\,\mathrm{m}^2$ keresztmetszetű térrészben. A mágnes köré egy $N = 200$ menetből álló tekercset helyezünk el, amelynek ki- és bemenete hurokszerűen össze van kötve. Az elektromágnest ezután $T = 0{,}02\,\mathrm{s}$ alatt kikapcsoljuk. Mekkora áram fog folyni a tekercsben, ha a tekercset alkotó kábel teljes ellenállása $R = 20\,\Omega$?



2-A. ábra

Megoldás:
A Faraday-féle indukciós törvény szerint

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \mathbf{B}\,\mathrm{d}^2\mathbf{f}\,, \tag{2-1}$$

ahol a jobb oldalon a mágneses indukció felületi integrálja szerepel egy A felületre (a mágneses indukciófluxus), a bal oldalon pedig az elektromos térerősség vonalintegrálja az A felület határa mentén.

A mágneses indukciófluxus a kezdeti pillanatban:

$$\Phi_0 = \int_A \mathbf{B}\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = N \cdot \int_{\substack{\text{kereszt-}\\\text{metszet}}} \mathbf{B}\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = N \cdot BA\,. \tag{2-2}$$

A jobb oldalon az elektromos térerősség vonalintegrálja áll, ami az elektromotoros erő, ε. A tekercsben folyó áram:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R}\oint_{\partial A} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_A \mathbf{B}\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}(NBA) \tag{2-3}$$

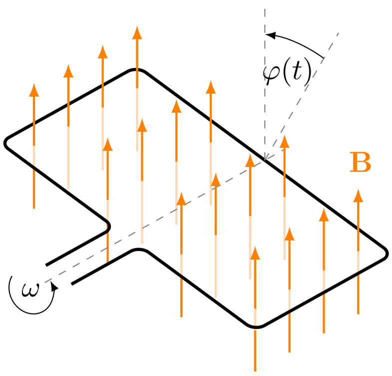
$$\approx -\frac{NA}{R}\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{200 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m}^2}{20\,\Omega}\frac{1{,}6\,\mathrm{T}}{0{,}02\,\mathrm{s}} = -160\,\mathrm{A}\,. \tag{2-4}$$

3. feladat: Egy váltóáramú generátorban $l = 10\,\mathrm{cm}$ élhosszúságú, négyzet alakú keretet forgatunk $B = 0{,}8\,\mathrm{T}$ erősségű mágneses térben úgy, hogy a forgástengely merőleges a mágneses indukció vektorára. A forgás frekvenciája $f = 50\,\mathrm{Hz}$.

a) Számítsuk ki a kereten a mágneses fluxus értékét az idő függvényében.

b) Mekkora feszültség keletkezik a keretben az idő függvényében?

c) Ha a keret ellenállása $R = 1\,\Omega$, hogyan változik a benne folyó áram az idő függvényében?



3-A. ábra

Megoldás:

A mágneses fluxust az alábbi kifejezés adja meg:

$$\Phi_\mathrm{m} = \iint_{\text{keret}} \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A} \tag{3-1}$$

A $\mathbf{B}$ tér homogén, vagyis mindenhol ugyanabba az irányba mutat és a nagysága a térben mindenhol ugyanakkora. A felületi integrálnál egy sík lapra kell integrálni. Ezen az elemi felületvektorok mind egy irányba mutatnak: merőlegesek annak felületére. Legyen a felület merőleges és a mágneses tér között bezárt szög $\varphi(t)$. Ekkor $\mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A} = B\mathrm{d}A\cos\varphi(t)$. Így tehát:

$$\Phi_\mathrm{m} = B\cos\varphi(t) \cdot \iint_{\text{keret}} \mathrm{d}A = BA\cos\varphi(t)\,, \tag{3-2}$$

ahol $A = l^2$ a keret teljes felülete. Amikor a keretet forgatjuk, akkor ezt a $\varphi(t)$ szöget változtatjuk. Mivel egyenletesen forgatjuk körbe, így $\varphi(t) = \omega t$, ahol $\omega = 2\pi f$, és $f = 50\,\mathrm{Hz}$ a feladat szövege szerint. Így tehát

$$\Phi_\mathrm{m} = BA\cos\left(\omega t\right)\,. \tag{3-3}$$

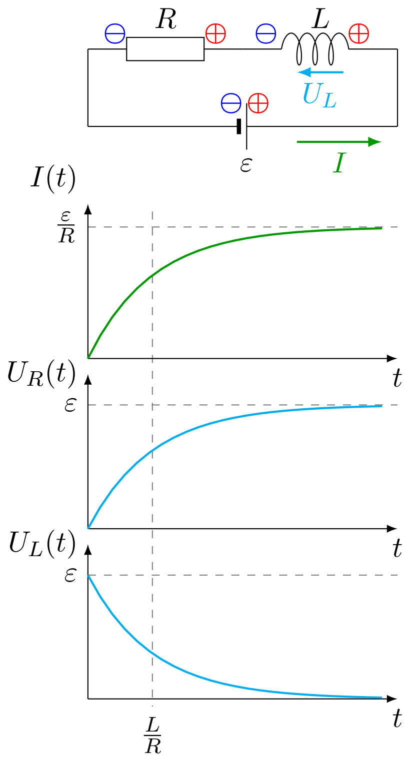
A keletkező feszültséget kiszámolhatjuk az indukciós törvény alapján:

$$\varepsilon(t) = \oint_{\substack{\text{keret}\\\text{széle}}} \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(BA\cos(\omega t)\big) = BA\omega\sin(\omega t)\,. \tag{3-4}$$

A keretben folyó áram:

$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = \frac{BA\omega}{R}\sin(\omega t)\,. \tag{3-5}$$

4. feladat: $L = 250\,\mathrm{mH}$ induktivitású és $R = 0{,}3\,\Omega$ ellenállású tekercset $\varepsilon = 3\,\mathrm{V}$ elektromotoros erejű telephez kapcsolunk. Mennyi idő alatt éri el az áram az állandósult érték 50%-át, illetve 75%-át?



4-A. ábra

Megoldás:

Először azt kell megvizsgálnunk, hogy mi történik a tekerccsel, ha abban változó áram folyik. A Faraday-féle indukciós törvény alapján abban feszültségnek kell indukálódnia:

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = -\frac{\partial}{\partial t}(B(t)\cdot A\cdot N) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\frac{N^2 I(t)}{l}\cdot A\right) \tag{4-1}$$

$$= -\mu_0\frac{N^2 A}{l}\cdot\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\,, \tag{4-2}$$

ahol L a tekercsi induktivitása.

Ennek ismeretében fel tudjuk írni az áramkörben a huroktörvényt, figyelve arra, hogy a tekercsen eső feszültség ellentettje a tekercsben indukálódott feszültségnek:

$$0 = -\varepsilon + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I(t)R \tag{4-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}\left(I(t) - \frac{\varepsilon}{R}\right) \tag{4-4}$$

$$\frac{1}{I(t)-\frac{\varepsilon}{R}}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L} \tag{4-5}$$

$$\int_0^t \frac{1}{I(t')-\frac{\varepsilon}{R}}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = -\int_0^t \frac{R}{L}\,\mathrm{d}t' \tag{4-6}$$

$$\left[\ln\left(I(t')-\frac{\varepsilon}{R}\right)\right]_0^t = -\frac{R}{L}t \tag{4-7}$$

$$\ln\left(\frac{I(t)-\frac{\varepsilon}{R}}{I(0)-\frac{\varepsilon}{R}}\right) = -\frac{R}{L}t \tag{4-8}$$

$$\frac{I(t)-\frac{\varepsilon}{R}}{I(0)-\frac{\varepsilon}{R}} = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \tag{4-9}$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)\,, \tag{4-10}$$

ahol felhasználtuk, hogy $I(0) = 0$, hiszen a bekapcsolás pillanatában nem folyt áram.

Az egyes áramköri elemeken eső feszültség:

$$U_R(t) = I(t)R = \varepsilon\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)\,, \tag{4-11}$$

$$U_L(t) = -L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\,. \tag{4-12}$$

Az áram állandósult értéke:

$$I(\infty) = \lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\,, \tag{4-13}$$

Ennek 50%-át akkor éri el az áramkör, ha

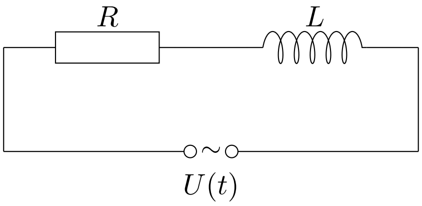
$$50\% = \frac{1}{2} = \frac{I(t_{1/2})}{I(\infty)} = \frac{\frac{\varepsilon}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t_{1/2}}\right)}{\frac{\varepsilon}{R}} = 1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t_{1/2}} \tag{4-14}$$

$$t_{1/2} = -\frac{L}{R}\ln\frac{1}{2} = \frac{L}{R}\ln 2\,. \tag{4-15}$$

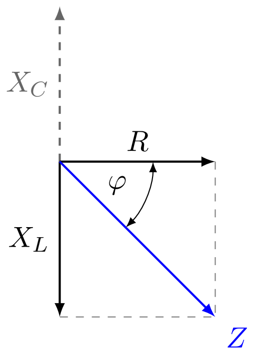
Ehhez teljesen hasonlóan a 75%-os eset:

$$75\% = \frac{3}{4} = \frac{I(t_{3/4})}{I(\infty)} \tag{4-16}$$

$$t_{3/4} = \frac{L}{R}\ln 4\,. \tag{4-17}$$



5. feladat: $f = 50\,\mathrm{Hz}$-es áramkörben $R = 50\,\Omega$ nagyságú ohmikus ellenállást és ismeretlen önindukciójú tekercset kapcsolunk sorosan. A fázisszög $\varphi = 45°$. Mekkora az önindukitivitás, és mekkora kondenzátor beiktatása szünteti meg a fáziskésést?



5-A. ábra

Megoldás:

A forgóvektoros leírásból azonnal látszik, hogy a tekercs impedanciáját megkaphatjuk úgy, mint

$$X_L = R\cdot\mathrm{tg}\,\varphi = R\cdot\mathrm{tg}\,45° = R\,. \tag{5-1}$$

A tekercs impedanciája:

$$X_L = \omega L \tag{5-2}$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{R}{2\pi\cdot f} = \frac{50\,\Omega}{2\pi\cdot 50\,\mathrm{Hz}} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{H}\,. \tag{5-3}$$

A kondenzátor impedanciájának meg kell egyeznie az induktivitás impedanciájával, hogy ne legyen fáziskésleltetés, vagyis

$$X_C = X_L \tag{5-4}$$

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L \tag{5-5}$$

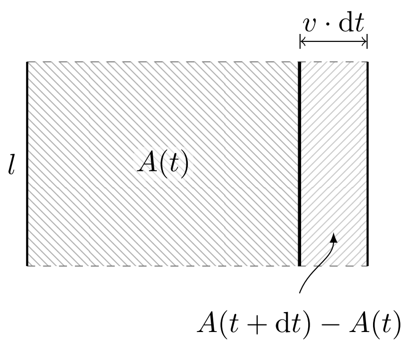
$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{\omega R} = \frac{1}{2\pi\cdot 50\,\mathrm{Hz}\cdot 50\,\Omega} = 6{,}37\cdot 10^{-5}\,\mathrm{F}\,. \tag{5-6}$$

6. feladat: Mekkora feszültség indukálódik egy Trabant $l = 1$ m széles tetőcsomagtartójában, ha a Trabant sebessége $v = 72\,\mathrm{km/h}$ és a Föld mágneses terének függőleges komponense $B = 30\,\mu\mathrm{T}$?

Megoldás:

A keletkező feszültséget kiszámolhatjuk az indukciós törvény alapján:

$$\oint\limits_{\substack{\text{keret}\\\text{széle}}} \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{\text{keret}} \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A}\,. \tag{6-1}$$



6-A. ábra

Kérdés, hogy itt milyen felületet kell választani. Jó gondolat, ha a t-edik időpillanatban ez a felület egy olyan téglalap, amelynek az egyik oldala a tetőcsomagtartó az induláskor, az azzal szemközti oldal pedig a tetőcsomagtartó az adott időpillanatban. A felület tehát az a terület, amit a tetőcsomagtartó súrol a kezdeti pillanattól az adott időpillanatig.

Az indukciós törvényt így fel tudjuk írni, egyedül arra kell figyelni, hogy az integrálás határa lesz itt időfüggő. A bal oldalon a körintegrálban csak ott van E térerősség, ahol van csomagtartó, vagyis a téglalap 4 oldala közül csak egyen. Ott pedig ez az integrál a feszültséget adja meg:

$$\oint\limits_{\substack{\text{keret}\\\text{széle}}} \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_{\text{vas rész}} \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{r} = -U(t)\ . \tag{6-2}$$

A jobb oldalon pedig felhasználhatjuk, hogy az $A(t)$ felület egy sík, a B tér homogén, és ez a kettő egy irányba mutat, vagyis:

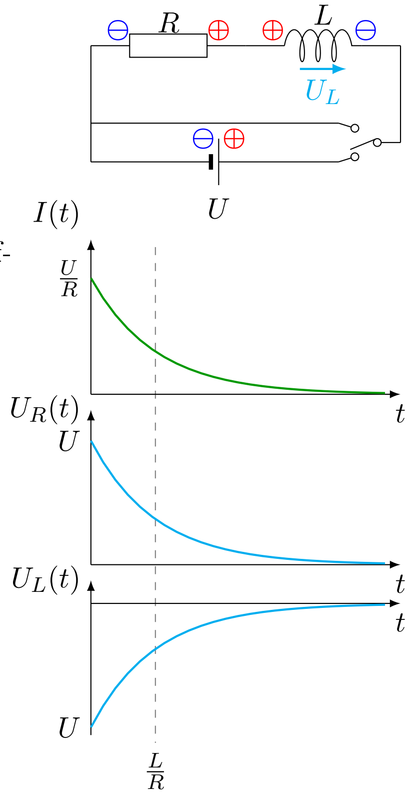
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{\text{keret}} \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A} = -B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{\text{A(t)}} \mathrm{d}\mathbf{A} = -B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = -B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l\cdot vt) = -Blv\ . \tag{6-3}$$

A kettőt összeolvasva kapjuk, hogy

$$U(t) = Blv\ , \tag{6-4}$$

vagyis a feszültség állandó nagyságú.

7. feladat: Egy $L = 30\,\mathrm{mH}$ induktivitású, $R = 6\,\Omega$ ohmikus ellenállású tekercset egy $U = 12\,\mathrm{V}$-os feszültségforrásra kapcsolunk. Határozzuk meg az áram időfüggését a kapcsoló átbillentése után!



7-A. ábra

Megoldás:

A feladat megoldása nagyon hasonló a 4. feladatéhoz. Írjuk fel a II. Kirchhoff-törvényt a kapcsoló átkapcsolt állásában:

$$0 = U_L(t) + I(t)R \tag{7-1}$$

$$0 = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I(t)R \tag{7-2}$$

$$-\int\limits_0^t \frac{R}{L}\,\mathrm{d}t' = \int\limits_0^t \frac{1}{I(t')}\frac{\mathrm{d}I(t')}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t' \tag{7-3}$$

$$-\frac{R}{L}t = \left[\ln I(t')\right]_0^t = \ln\frac{I(t)}{I(0)} \tag{7-4}$$

$$I(t) = I(0)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ , \tag{7-5}$$

ahol $I(0)$ az átkapcsolás pillanatában folyó áram nagysága. Az átkapcsolás előtt, az áramkör állandósult állapotában $I(t) = \frac{U}{R}$ nagyságú állandó nagyságú áram folyt, így

$$I(t) = \frac{U}{R}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ . \tag{7-6}$$

Az ellenálláson és a tekercsen eső feszültség:

$$U_R(t) = I(t)R = U\cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ , \qquad U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -U\frac{R}{L}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ . \tag{7-7}$$

8. feladat: Egymással párhuzamosan kötünk egy U feszültségre feltöltött kondenzátort és egy L induktivitású tekercset.

a) Írjuk fel a differenciálegyenletet a kapacitásban tárolt töltésekre!

b) Határozzuk meg az egyes elemekre eső feszültség időfüggését!

Megoldás:
Tudjuk, hogy a kondenzátor feszültségét megadhatjuk az

$$U_\mathrm{C}(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\left(Q(t=0) + \int_0^t I(t')\mathrm{d}t'\right) \tag{8-1}$$

alakban, ahol $Q(t=0)$ a kondenzátor kezdeti töltése: $Q(t=0) = C\cdot U$, és $I(t)$ az áramkörben folyó áram. A tekercsen eső feszültséget pedig megadhatjuk mint

$$U_\mathrm{L}(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\ . \tag{8-2}$$

A II. Kirchhoff-törvényt felírva megkapjuk, hogy

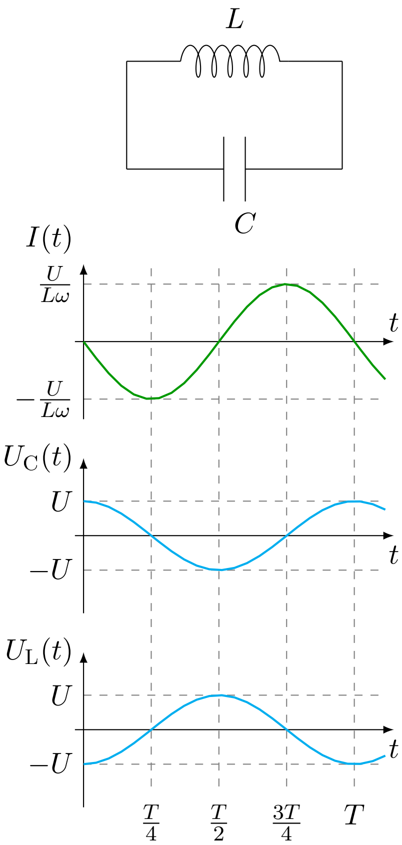
$$0 = U_\mathrm{C}(t) + U_\mathrm{L}(t) \tag{8-3}$$

$$0 = \frac{1}{C}\left(Q(t=0) + \int_0^t I(t')\mathrm{d}t'\right) + L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\ . \tag{8-4}$$

Ennek mindkét oldalát idő szerint deriválva:

$$0 = \frac{1}{C}I(t) + L\frac{\mathrm{d}^2I(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{8-5}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2I(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}I(t)\ . \tag{8-6}$$



8-A. ábra

Emellett még azt tudjuk, hogy abban a pillanatban, amikor összeérintettük a kondenzátor és a tekercs kivezetéseit, akkor még éppen nem folyt áram, vagyis $I(t=0) = 0$.

Ennek az egyenletnek a megoldását már korábbról ismerjük. Egy olyan függvényt keresünk, amelynek a második deriváltja önmaga, csak még meg van szorozva egy negatív számmal. A szinusz és a koszinusz függvény ilyen függvény. Legáltalánosabban az alábbi alakban írhatjuk fel az egyenlet megoldását:

$$I(t) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t + \phi_0\right)\ , \tag{8-7}$$

ahol $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, illetve I_0 és ϕ_0 két paraméter, amelyek tetszőleges értéke mellett az előbbi függvény kielégíti a fenti differenciálegyenletet.

Az I_0 és a ϕ_0 paraméterek értékét a kezdeti feltétel rögzíti, ugyanis tudjuk, hogy $t = 0$-ban az áram értéke nulla, illetve hogy kezdetben U feszültségre volt feltöltve a kondenzátor. Az előbbiből:

$$0 = I(t=0) = I_0\cdot\sin\left(\omega\cdot 0 + \phi_0\right) = I_0\cdot\sin\left(\phi_0\right) \tag{8-8}$$

$$0 = \sin(\phi_0) \tag{8-9}$$

$$0 = \phi_0\ , \tag{8-10}$$

míg az utóbbiból:

$$0 = U_\mathrm{C}(t) + U_\mathrm{L}(t) \tag{8-11}$$

$$0 = U_\mathrm{C}(0) + U_\mathrm{L}(0) \tag{8-12}$$

$$0 = U + U_{\mathrm{L}}(0) \;, \tag{8-13}$$

vagyis

$$-U = U_{\mathrm{L}}(0) = L \left.\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = L\big(I_0\omega \cdot \cos(\omega t)\big)_{t=0} = I_0 L\omega \tag{8-14}$$

$$I_0 = -\frac{U}{L\omega} \;. \tag{8-15}$$

Tehát az áram időfüggése:

$$I(t) = -\frac{U}{L\omega} \sin(\omega t) \;. \tag{8-16}$$

Ebből már könnyen számolhatjuk a kondenzátor és a tekercs feszültségének időfüggését:

$$U_{\mathrm{C}}(t) = U + \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\mathrm{d}t' = U - \frac{U}{LC\omega}\int_0^t \sin(\omega t')\mathrm{d}t' \tag{8-17}$$

$$= U - \frac{U}{LC\omega}\left[\frac{-\cos(\omega t')}{\omega}\right]_0^t = U + U\big(\cos(\omega t) - 1\big) = U\cos(\omega t) \;, \tag{8-18}$$

$$U_{\mathrm{L}}(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(-\frac{U}{L\omega}\sin(\omega t)\Big) = -U\cos(\omega t) \;. \tag{8-19}$$

9. feladat: $U_{\mathrm{eff}} = 220\,\mathrm{V}$-os, $50\,\mathrm{Hz}$ frekvenciájú hálózatról táplált berendezésen átfolyó áram erőssége $I_{\mathrm{eff}} = 2\,\mathrm{A}$. A felvett teljesítmény $P = 300\,\mathrm{W}$.

a) Mekkora az áram és a feszültség fáziskülönbsége?

b) Mekkora a berendezés váltóáramú ellenállása?

c) Mekkora a berendezés ohmikus ellenállása?

Megoldás:

Időfüggő esetben a teljesítményt nem tudjuk egyszerűen úgy számolni, mint az áram és a feszültség szorzatát, hiszen mind a két mennyiség időfüggő, így az így elkészített mennyiség is időfüggő lenne. A teljesítményt így mint egy időátlagot kell elkészítenünk. A t-edik pillanatban $\mathrm{d}t$ idő alatt elvégzett munka $U(t)I(t)\,\mathrm{d}t$. Ha ezt összegezzük egy véges t_1-től t_2-ig tartó időintervallumra, akkor megkapjuk a teljes munkát:

$$W(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} U(t)I(t)\,\mathrm{d}t \;, \tag{9-1}$$

amelynek felhasználásával az átlagteljesítmény a $[t_1,t_2]$ időintervallumon:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} U(t)I(t)\,\mathrm{d}t \;. \tag{9-2}$$

Periodikusan változó áramok esetében elég egy periódusra átlagolni:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)I(t)\,\mathrm{d}t \;. \tag{9-3}$$

Nézzük meg, hogy mekkora a teljesítmény, ha φ a fáziskülönbség az áram és a feszültség között. Legyen $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ és $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, ahol $\omega = \frac{2\pi}{T}$ akkor

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t \tag{9-4}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos(\omega t) \big[\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi) \big]\,\mathrm{d}t \tag{9-5}$$

$$= \frac{U_0 I_0}{T} \cos(\varphi) \int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t - \frac{U_0 I_0}{T} \sin(\varphi) \int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{9-6}$$

$$= \frac{U_0 I_0}{T} \cos(\varphi) \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}\,\mathrm{d}t - \frac{U_0 I_0}{T} \sin(\varphi) \int_0^T \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{9-7}$$

$$= \frac{U_0 I_0}{T} \cos(\varphi) \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T - \frac{U_0 I_0}{T} \sin(\varphi) \left[-\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T \tag{9-8}$$

$$= \frac{U_0 I_0}{T} \cos(\varphi) \left(\frac{T}{2} + \frac{\sin(4\pi) - \sin(0)}{4\omega} \right) + \frac{U_0 I_0}{T} \sin(\varphi) \left(\frac{\cos(4\pi) - \cos(0)}{4\omega} \right) \tag{9-9}$$

$$= \frac{U_0 I_0}{2} \cos\varphi = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos\varphi = U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \cos\varphi\,. \tag{9-10}$$

a) Ez alapján az első kérdésre azonnal megadhatjuk a választ:

$$\cos\varphi = \frac{P}{U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}}} = \frac{300\,\mathrm{W}}{220\,\mathrm{V} \cdot 2\,\mathrm{A}} = 0{,}682 \tag{9-11}$$

$$\varphi = 47{,}01^\circ\,. \tag{9-12}$$

b) A berendezés impedanciája:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{220\,\mathrm{V}}{2\,\mathrm{A}} = 110\,\Omega\,. \tag{9-13}$$

c) Az ohmikus ellenállás

$$R = Z\cos\varphi = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} \cdot \frac{P}{U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}}} = \frac{P}{I_{\mathrm{eff}}^2} = \frac{300\,\mathrm{W}}{(2\,\mathrm{A})^2} = 75\,\Omega\,. \tag{9-14}$$

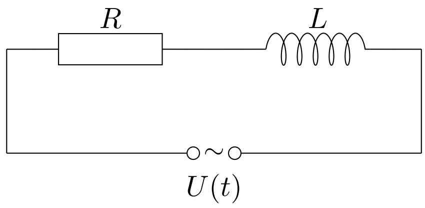
10. feladat: Sorosan kapcsolunk egy elhanyagolható ohmikus ellenállású, $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$ önindukciójú tekercset egy $R = 50\,\Omega$-os ellenállással, majd rákapcsoljuk az $U_{\mathrm{eff}} = 220\,\mathrm{V}$-os, $f = 50\,\mathrm{Hz}$ frekvenciájú váltakozó feszültségű hálózatra.

a) Mekkora a kör ellenállása (impedanciája)?

b) Mekkora áram folyik a körben?

c) Mekkora az ohmikus ellenállásra, illetve a tekercsre jutó feszültség?

d) Mekkora az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség?



10-A. ábra

Megoldás:

a) A kör impedanciája

$$Z = \sqrt{X_L^2 + R^2} = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} = \sqrt{(2\pi f \cdot L)^2 + R^2} \tag{10-1}$$

$$= \sqrt{(2\pi 50\,\mathrm{Hz} \cdot 0{,}5\,\mathrm{H})^2 + (50\,\Omega)^2} = 164{,}9\,\Omega\ . \tag{10-2}$$

b) Az áram maximális értéke

$$I_0 = \frac{\sqrt{2}U_{\mathrm{eff}}}{Z} = \frac{\sqrt{2} \cdot 220\,\mathrm{V}}{164{,}85\,\Omega} = 1{,}89\,\mathrm{A}\ . \tag{10-3}$$

c) Az egyes feszültségek:

$$U_R = I_0 R = 1{,}89\,\mathrm{A} \cdot 50\,\Omega = 94{,}4\,\mathrm{V} \tag{10-4}$$

$$U_L = I_0 X_L = 1{,}89\,\mathrm{A} \cdot 2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz} \cdot 0{,}5\,\mathrm{H} = 148{,}2\,\mathrm{V}\ . \tag{10-5}$$

d) A fáziskülönbség

$$\varphi = \arccos\frac{R}{Z} = \arccos\frac{50\,\Omega}{164{,}9\,\Omega} = 72{,}34^\circ\ . \tag{10-6}$$