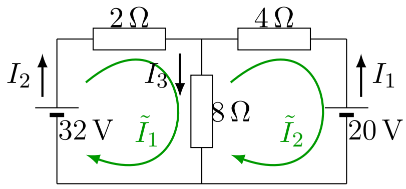
Fizika A2E, 9. feladatsor

Vida György József
vidagyorgy@gmail.com

1. feladat: A hurokáramok módszerével határozzuk meg az ábrán látható kapcsolás ágaiban folyó áramokat!



1-A. ábra

Megoldás:

Az áramkör két ablakból áll, így két hurokáramot tudunk felvenni. Azt azonnal megállapíthatjuk, hogy a keresett áramok és a hurokáramok közötti kapcsolat:

$$I_1 = -\tilde{I}_2 \qquad I_2 = \tilde{I}_1 \qquad I_3 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 \; . \tag{1-1}$$

A két hurokra Kirchhoff II. törvénye:

$$0 = -32\,\mathrm{V} + \tilde{I}_1 \cdot 2\,\Omega + (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2) \cdot 8\,\Omega \tag{1-2}$$

$$0 = (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1) \cdot 8\,\Omega + \tilde{I}_2 \cdot 4\,\Omega + 20\,\mathrm{V} \; , \tag{1-3}$$

ahol az első egyenletből $\tilde{I}_1$ kifejezve

$$\tilde{I}_1 = 3{,}2\,\mathrm{A} + 0{,}8 \cdot \tilde{I}_2 \; , \tag{1-4}$$

majd a másodikba helyettesítve

$$0 = \tilde{I}_2 \cdot 12\,\Omega - \tilde{I}_1 \cdot 8\,\Omega + 20\,\mathrm{V} \tag{1-5}$$

$$= \tilde{I}_2 \cdot 12\,\Omega - (3{,}2\,\mathrm{A} + 0{,}8 \cdot \tilde{I}_2) \cdot 8\,\Omega + 20\,\mathrm{V} \tag{1-6}$$

$$= \tilde{I}_2 \cdot 5{,}6\,\Omega - 5{,}6\,\mathrm{V} \tag{1-7}$$

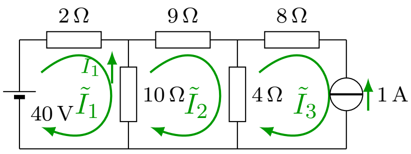
$$\tilde{I}_2 = 1\,\mathrm{A} \; . \tag{1-8}$$

Ezt visszahelyettesítve

$$\tilde{I}_1 = 3{,}2\,\mathrm{A} + 0{,}8 \cdot 1\,\mathrm{A} = 4\,\mathrm{A} \; . \tag{1-9}$$

Az eredetileg kérdezett áramerősségek:

$$I_1 = -1\,\mathrm{A} \qquad I_2 = 4\,\mathrm{A} \qquad I_3 = 3\,\mathrm{A} \; . \tag{1-10}$$



2-A. ábra

2. feladat: Határozzuk meg az ábrán látható kapcsolásban az I_1 áram értékét a hurokáramok módszerével!

Megoldás:

Az áramgenerátor az áram nagyságának értékét rögzíti, így azt tudjuk azonnal, hogy $\tilde{I}_3 = -1\,\mathrm{A}$. A másik két hurokra a huroktörvény:

$$0 = -40\,\mathrm{V} + \tilde{I}_1 \cdot 2\,\Omega + (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2) \cdot 10\,\Omega \tag{2-1}$$
$$0 = (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1) \cdot 10\,\Omega + \tilde{I}_2 \cdot 9\,\Omega + \big(\tilde{I}_2 - (-1\,\mathrm{A})\big) \cdot 4\,\Omega\ . \tag{2-2}$$

Itt szintén az első egyenletből kifejezzük az egyik változót:

$$\tilde{I}_2 = -4\,\mathrm{A} + 1{,}2 \cdot \tilde{I}_1\ . \tag{2-3}$$

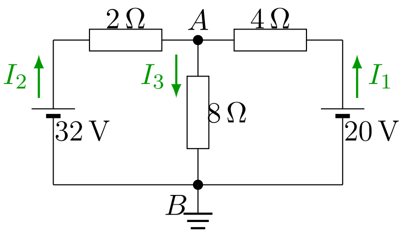
majd azt behelyettesítjük a második egyenletbe

$$0 = \tilde{I}_2 \cdot 23\,\Omega - \tilde{I}_1 \cdot 10\,\Omega + 4\,\mathrm{V} \tag{2-4}$$
$$= \big(-4\,\mathrm{A} + 1{,}2 \cdot \tilde{I}_1\big) \cdot 23\,\Omega - \tilde{I}_1 \cdot 10\,\Omega + 4\,\mathrm{V} \tag{2-5}$$
$$= -88\,\mathrm{V} + \tilde{I}_1 \cdot 17{,}6\,\Omega \tag{2-6}$$
$$\tilde{I}_1 = 5\,\mathrm{A}\ . \tag{2-7}$$

Ezt visszahelyettesítve:

$$\tilde{I}_2 = -4\,\mathrm{A} + 1{,}2 \cdot 5\,\mathrm{A} = 2\,\mathrm{A}\ , \tag{2-8}$$

vagyis az eredetileg kérdezett I_1 áram értéke $-3\,\mathrm{A}$.



3-A. ábra

3. feladat: Oldjuk meg az 1. feladatot a csomóponti potenciálok módszerével!

Megoldás:

Az áramkörben két csomópont található. Az egyiken rögzítsük a potenciált: a B pontot leföldeljük. Ekkor az A pont potenciálja lesz az egyetlen ismeretlen: U_A.

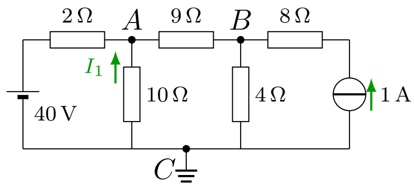
Az egyetlen független A csomópontra írjuk fel a csomóponti törvényt:

$$0 = \frac{U_A - 32\,\mathrm{V}}{2\,\Omega} + \frac{U_A}{8\Omega} + \frac{U_A - 20\,\mathrm{V}}{4\,\Omega} \tag{3-1}$$
$$0 = 4U_A - 128\,\mathrm{V} + U_A + 2U_A - 40\,\mathrm{V} \tag{3-2}$$
$$U_A = 24\,\mathrm{V}\ . \tag{3-3}$$

Innen a keresett áramok:

$$I_1 = \frac{U_A - 20\,\mathrm{V}}{4\,\Omega} = 1\,\mathrm{A} \tag{3-4}$$
$$I_2 = \frac{U_A - 32\,\mathrm{V}}{2\,\Omega} = -4\,\mathrm{A} \tag{3-5}$$
$$I_3 = \frac{U_B - U_A}{8\,\Omega} = -3\,\mathrm{A}\ . \tag{3-6}$$

4. feladat: Oldjuk meg a 2. feladatot a csomóponti potenciálok módszerével!



4-A. ábra

Megoldás:

Ebben az áramkörben két független csomópont található, a harmadik potenciálját tudjuk rögzíteni. A huroktörvények az egyes csomópontokra:

$$0 = \frac{U_A - 40\,\mathrm{V}}{2\,\Omega} + \frac{U_A}{10\,\Omega} + \frac{U_A - U_B}{9\,\Omega} \tag{4-1}$$

$$0 = \frac{U_B - U_A}{9\,\Omega} + \frac{U_B}{4\,\Omega} - 1\,\mathrm{A}\ . \tag{4-2}$$

A két egyenletet bővítve:

$$0 = 45U_A - 1800\,\mathrm{V} + 9U_A + 10U_A - 10U_B \tag{4-3}$$

$$0 = 4U_B - 4U_A + 9U_B - 36\,\mathrm{V} \tag{4-4}$$

majd összevonva

$$0 = 64U_A - 10U_B - 1800\,\mathrm{V} \tag{4-5}$$

$$0 = -4U_A + 13U_B - 36\,\mathrm{V}\ . \tag{4-6}$$

Az elsőből U_B kifejezve

$$U_B = 6{,}4U_A - 180\,\mathrm{V}\ , \tag{4-7}$$

majd a másodikba helyettesítve

$$0 = -4U_A + 13 \cdot (6{,}4U_A - 180\,\mathrm{V}) - 36\,\mathrm{V} \tag{4-8}$$

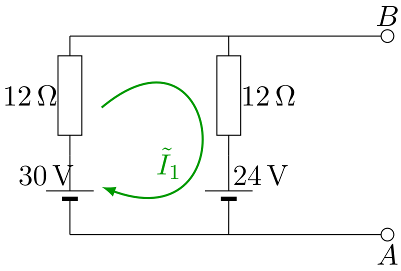
$$79{,}2U_A = 2376\,\mathrm{V} \tag{4-9}$$

$$U_A = 30\,\mathrm{V}\ , \tag{4-10}$$

melyet felhasználva

$$U_B = 6{,}4 \cdot 30\,\mathrm{V} - 180\,\mathrm{V} = 12\,\mathrm{V}\ . \tag{4-11}$$

A kérdezett I_1 áram: $I_1 = \frac{U_A}{10\,\Omega} = 3\,\mathrm{A}$.



5-A. ábra

5. feladat: Határozzuk meg az ábrán látható kapcsolás Thévenin-féle helyettesítő képét! Mekkora az eredeti kapcsolásban és a helyettesítő képben a generátorok teljesítménye?

Megoldás:

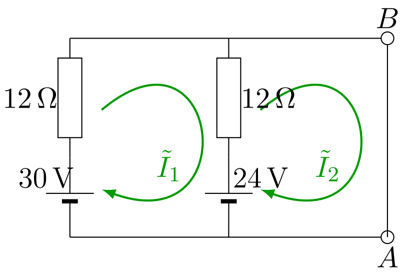
A helyettesítő kép meghatározásához először számoljuk ki, hogy terhelés nélkül mekkora a feszültség az A és a B pontok között. Ehhez a huroktörvény felírva

$$0 = -30\,\mathrm{V} + \tilde{I}_1 \cdot 12\,\Omega + \tilde{I}_1 \cdot 12\,\Omega + 24\,\mathrm{V} \tag{5-1}$$

$$\tilde{I}_1 = 0{,}25\,\mathrm{A}\ . \tag{5-2}$$

Ahonnan

$$U_{AB} = -24\,\mathrm{V} - 0{,}25\,\mathrm{A} \cdot 12\,\Omega = -27\,\mathrm{V}\ . \tag{5-3}$$



5-B. ábra

Ezen kívül számoljuk ki, hogy mekkora az A és a B pontok között folyó áram, ha azok között rövidzár található:

$$0 = -30\,\mathrm{V} + \tilde{I}_1 \cdot 12\,\Omega + (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2) \cdot 12\,\Omega + 24\,\mathrm{V} \tag{5-4}$$

$$0 = -24\,\mathrm{V} + (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1) \cdot 12\,\Omega\ , \tag{5-5}$$

ahol a második egyenletből

$$\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 = -2\,\mathrm{A}\ , \tag{5-6}$$

melyet az első egyenletbe behelyettesítve

$$0 = -30\,\mathrm{V} + \tilde{I}_1 \cdot 12\,\Omega \tag{5-7}$$

$$\tilde{I}_1 = 2{,}5\,\mathrm{A}\ , \tag{5-8}$$

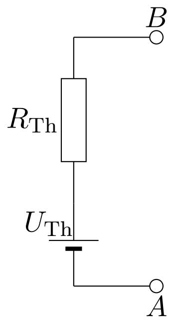
illetve

$$\tilde{I}_2 = 4{,}5\,\mathrm{A}\ . \tag{5-9}$$

A rövidzáron így 4,5 A folyik.

A helyettesítő képben tehát a Thévenin-ellenállás

$$R_{\mathrm{Th}} = \frac{U_{\text{üres}}}{I_{\text{rövidzár}}} = \frac{27\,\mathrm{V}}{4{,}5\,\mathrm{A}} = 6\,\Omega\ , \tag{5-10}$$



5-C. ábra

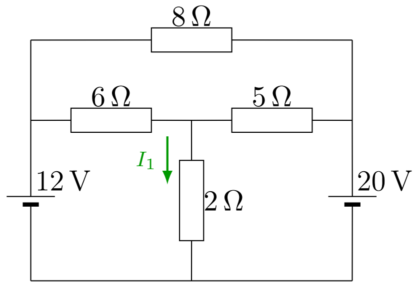
illetve a feszültségforrás $U_{\mathrm{Th}} = U_{\text{üres}} = 27\,\mathrm{V}$.

Azt láthatjuk, hogy az eredeti áramkörben akkor is folyik áram, ha az nincs terhelve, vagyis ha az A–B pontokra semmi nincs rákapcsolva. Ez az áram az ellenállásokon $P_{\text{veszteség}} = 24\,\Omega \cdot (0{,}25\,\mathrm{A})^2 = 1{,}5\,\mathrm{W}$ veszteséget ad. A 30 V-os generátor $P_{30\,\mathrm{V}} = 30\,\mathrm{V} \cdot 0{,}25\,\mathrm{A} = 7{,}5\,\mathrm{W}$ teljesítményt ad le, míg a 24 V-os telepen $P_{24\,\mathrm{V}} = 24\,\mathrm{V} \cdot 0{,}25\,\mathrm{A} = 6\,\mathrm{W}$ teljesítmény esik.

Vegyük észre, hogy a 30 V-os telep itt leadja a teljesítményt, míg a 24 V-os telepen úgy folyik az áram, hogy az azt tölti, vagyis ez a telep 6 W-ot felvesz az áramkörből. Láthatjuk, hogy itt is teljesül az energiamegmaradás.

Ezzel szemben a helyettesítő képben csak terhelés jelenlétében folyik áram. Innen következik az, hogy az eredeti és a helyettesítő képben a teljesítményviszonyok nem feleltethetőek meg ilyen egyszerűen.

6. feladat: Az ábrán látható kapcsolásban írjuk fel az I_1 áram meghatározásához szükséges Kirchhoff-egyenleteket, valamint a csomóponti potenciálok módszerével kapott egyenleteket! Az egyiket (lehetőleg az egyszerűbbet) oldjuk is meg!

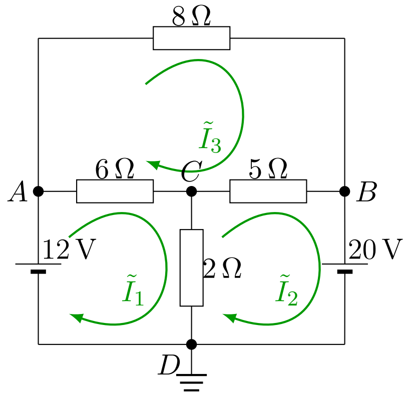


6-A. ábra

Megoldás:

a) Oldjuk meg először a feladatot a hurokáramok módszerével. A kapcsolási rajzban három ablak van, melyekre Kirchhoff II. törvénye:

$$0 = -12\,\mathrm{V} + (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_3)\cdot 6\,\Omega + (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2)\cdot 2\,\Omega \qquad (6\text{-}1)$$
$$0 = (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1)\cdot 2\,\Omega + (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_3)\cdot 5\,\Omega + 20\,\mathrm{V} \qquad (6\text{-}2)$$
$$0 = \tilde{I}_3\cdot 8\,\Omega + (\tilde{I}_3 - \tilde{I}_2)\cdot 5\,\Omega + (\tilde{I}_3 - \tilde{I}_1)\cdot 6\,\Omega\,. \qquad (6\text{-}3)$$



6-B. ábra

A három egyenlet összegéből:

$$0 = -12\,\mathrm{V} + 20\,\mathrm{V} + \tilde{I}_3\cdot 8\,\Omega \qquad (6\text{-}4)$$
$$\tilde{I}_3 = -1\,\mathrm{A}\,. \qquad (6\text{-}5)$$

Ezt visszahelyettesítve az első kettőbe, majd azokat rendezve

$$0 = -6\,\mathrm{V} + \tilde{I}_1\cdot 6\,\Omega + (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2)\cdot 2\,\Omega \qquad (6\text{-}6)$$
$$0 = (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1)\cdot 2\,\Omega + \tilde{I}_2\cdot 5\,\Omega + 25\,\mathrm{V}\,, \qquad (6\text{-}7)$$

ahol az elsőből $\tilde{I}_2$ kifejezve

$$\tilde{I}_2 = -3\,\mathrm{A} + 4\tilde{I}_1\,, \qquad (6\text{-}8)$$

melyet beírva a másodikba

$$0 = (-3\,\mathrm{A} + 4\tilde{I}_1 - \tilde{I}_1)\cdot 2\,\Omega + (-3\,\mathrm{A} + 4\tilde{I}_1)\cdot 5\,\Omega + 25\,\mathrm{V} \qquad (6\text{-}9)$$
$$0 = 26\tilde{I}_1 + 4\,\mathrm{A} \qquad (6\text{-}10)$$
$$\tilde{I}_1 = -\frac{2}{13}\,\mathrm{A}\,. \qquad (6\text{-}11)$$

Visszahelyettesítve

$$\tilde{I}_2 = -3\,\mathrm{A} - 4\cdot\frac{2}{13}\,\mathrm{A} = -\frac{47}{13}\,\mathrm{A}\,. \qquad (6\text{-}12)$$

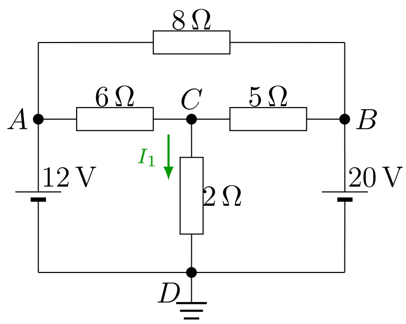
Innen a keresett I_1 áram:

$$I_1 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 = -\frac{2}{13}\,\mathrm{A} + \frac{47}{13}\,\mathrm{A} = \frac{45}{13}\,\mathrm{A}\,. \qquad (6\text{-}13)$$

b) Másodszorra pedig oldjuk meg a csomóponti potenciálok módszerével. Itt is rögzítjük az egyik csomópont potenciálját $U_D = 0$. A feszültséggenerátorok miatt $U_A = 12\,\mathrm{V}$ és $U_B = 20\,\mathrm{V}$. Így a C-re kell csak felírni a csomóponti törvényt:

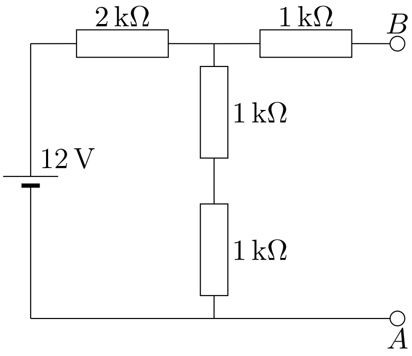
$$0 = \frac{U_C - 12\,\mathrm{V}}{6\,\Omega} + \frac{U_C}{2\,\Omega} + \frac{U_C - 20\,\mathrm{V}}{5\,\Omega} \qquad (6\text{-}14)$$
$$0 = 5U_C - 60\,\mathrm{V} + 15U_C + 6U_C - 120\,\mathrm{V} \qquad (6\text{-}15)$$
$$U_C = \frac{90}{13}\,\mathrm{V}\,, \qquad (6\text{-}16)$$

vagyis az I_1 áram $I_1 = \frac{U_C}{2\,\Omega} = \frac{45}{13}\,\mathrm{A}$.

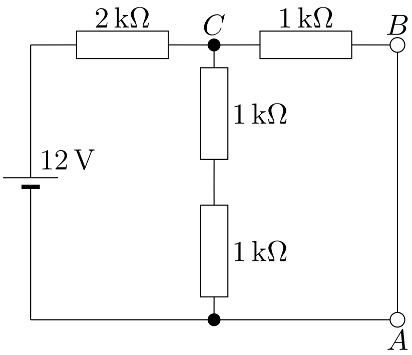


6-C. ábra

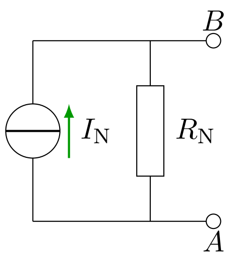
7. feladat: Határozzuk meg az ábrán látható áramkör Norton-féle helyettesítő képét!



7-A. ábra



7-B. ábra



7-C. ábra

Megoldás:

A megoldáshoz először ki kell számolnunk, hogy az A és a B pontok között mekkora feszültség esik. Az áramkörben a hurokban $I = \frac{12\,\mathrm{V}}{4\,\mathrm{k\Omega}} = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}$ folyik, így az A és a C pont között a feszültségkülönbség $U_{AC} = -2\,\mathrm{k\Omega} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} = -6\,\mathrm{V}$. A C és a B pont között pedig nincs feszültség, hiszen ott nem folyik áram, így $U_{AB} = U_{AC} + U_{BC} = -6\,\mathrm{V}$.

Ezután meg kell határoznunk, hogy a rövidre zárt áramkörben mekkora áram folyik az A és a B pontok között. Rövidzár esetén a teljes terhelő ellenállás:

$$R_\mathrm{e} = 2\,\mathrm{k\Omega} + \frac{1}{\frac{1}{1\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{1}{1\,\mathrm{k\Omega}+1\,\mathrm{k\Omega}}} = \frac{8}{3}\,\mathrm{k\Omega}\,, \tag{7-1}$$

vagyis a teljes áram

$$I = \frac{U}{R_\mathrm{e}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{\frac{8}{3}\,\mathrm{k\Omega}} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}\,. \tag{7-2}$$

A párhuzamos ágakban 2:1 arányúak az ellenállások, vagyis a rövidzáron 2 rész a másik ágon 1 rész áram folyik:

$$I_\text{rövidzár} = \frac{2}{3} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}\,. \tag{7-3}$$

A Norton-ellenállás innen

$$R_\mathrm{N} = \frac{U_{AB}}{I_\text{rövidzár}} = \frac{6\,\mathrm{V}}{3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}} = 2\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{7-4}$$

Tehát a helyettesítő képben $I_\mathrm{N} = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}$ és $R_\mathrm{N} = 2\,\mathrm{k\Omega}$.