

# Fizika A2E, 8. feladatsor

Vida György József  
vidagyorgy@gmail.com

**1. feladat:** Az ábrán látható áramkörben határozzuk meg az  $I$  áramerősséget!

Megoldás:

Először ki kell számolnunk az öt ellenállásból álló hálózat eredő ellenállását. Vegyük észre, hogy a 3-as és az 5-ös ellenállás végei rövidre vannak zárva, így azokon sosem folyik áram, vagyis azok nem járulnak hozzá az eredő ellenálláshoz.

Így összesen három ellenállás marad, az 1-es, a 2-es és a 4-es, melyek közül a 2-es és a 4-es párhuzamosan vannak kapcsolva:

$$R_{2,4} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{R}} = \frac{1}{2}R, \quad (1-1)$$

illetve ezekkel sorosan van kapcsolva az 1-es:

$$R_e = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R, \quad (1-2)$$

Innen a telepen átfolyó áram:

$$I = \frac{V}{R_e} = \frac{V}{\frac{3}{2}R} = \frac{2}{3} \frac{V}{R}. \quad (1-3)$$

**2. feladat:** Az ábrán látható áramkörben számítsuk ki az egyes ágakban folyó áramerősségeket!

Megoldás:

A megoldáshoz a Kirchhoff-törvényeket fogjuk használni. Az áramkör két csomópontot tartalmaz, írjuk fel ezekre a csomóponti törvényt:

$$A: \quad 0 = I_1 - I_2 - I_3 \quad (2-1)$$

$$B: \quad 0 = -I_1 + I_2 + I_3. \quad (2-2)$$

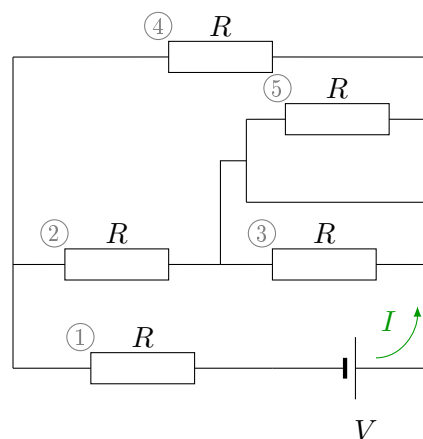
Ezután írjuk fel az áramkörben Kirchhoff II. törvényét. Összesen három hurokra lehet ezt megtenni:

$$V_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_3: \quad 0 = -V_1 + I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad (2-3)$$

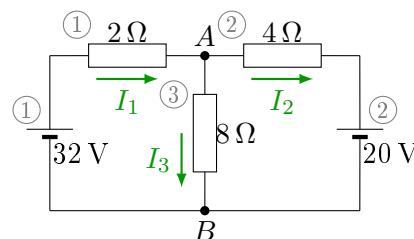
$$R_3 \rightarrow R_2 \rightarrow V_2: \quad 0 = -I_3 R_3 + I_2 R_2 + V_2 \quad (2-4)$$

$$V_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow V_2: \quad 0 = -V_1 + I_1 R_1 + I_2 R_2 + V_2 \quad (2-5)$$

A Kirchhoff-törvények öt egyenletet adnak, melyek három ismeretlent tartalmaznak ( $I_1$ ,  $I_2$  és  $I_3$ ). Ezeknek csak akkor lehet megoldása, ha az egyenletek összefüggőek. Azt azonnal láthatjuk, hogy a két csomóponti egyenlet



1-A. ábra



2-A. ábra

összefüggő, az egyik a másik  $-1$ -szerese, illetve az is észrevehető, hogy az első két hurokegyenlet összege a harmadikat adja. Tehát ha a (2-1), a (2-3) és a (2-2) egyenletek nem ellentmondóak, akkor egyértelmű megoldást adnak a három ismeretlenre.

Az egyenletrendszer:

$$0 = I_1 - I_2 - I_3 \quad (2-6)$$

$$0 = -32 \text{ V} + I_1 \cdot 2 \Omega + I_3 \cdot 8 \Omega \quad (2-7)$$

$$0 = -I_3 \cdot 8 \Omega + I_2 \cdot 4 \Omega + 20 \text{ V} \quad (2-8)$$

Az első egyenletből  $I_1 = I_2 + I_3$ , amit a másodikba behelyettesítve:

$$0 = -32 \text{ V} + I_2 \cdot 2 \Omega + I_3 \cdot 10 \Omega . \quad (2-9)$$

A (2-9)-es egyenlet kettővel megszorozva, majd abból a (2-8)-et kivonva:

$$0 = -64 \text{ V} + I_3 \cdot 20 \Omega - (-I_3 \cdot 8 \Omega + 20 \text{ V}) \quad (2-10)$$

$$0 = -84 \text{ V} + I_3 \cdot 28 \Omega \quad (2-11)$$

$$I_3 = 3 \text{ A} . \quad (2-12)$$

Ez visszahelyettesítve a (2-9)-be:

$$0 = -32 \text{ V} + I_2 \cdot 2 \Omega + 3 \text{ A} \cdot 10 \Omega \quad (2-13)$$

$$I_2 = 1 \text{ A} . \quad (2-14)$$

A (2-1) alapján:

$$I_1 = 4 \text{ A} . \quad (2-15)$$

Tehát az ellenállásokon az ábrán szereplő nyilak irányában folyik át rendre 4 A, 1 A és 3 A.

**3. feladat:** Egy  $V_0$  elektromotoros erejű,  $R_b$  belső ellenállású telepre egy  $R$  nagyságú ellenállást kötünk.

- Mekkora terhelő ellenállás esetén lesz maximális a telepből kivett teljesítmény?
- Mikor maximális a hatásfok?

Megoldás:

- a) A hasznos teljesítmény az, ami a telepre kapcsolt  $R$  ellenálláson esik:  $P_{\text{hasznos}} = V_R \cdot I$ . Ehhez először ki kell számolni az  $R$  ellenálláson eső feszültséget, és az áramkörben folyó áramot.

A telepet terhelő eredő ellenállás:  $R_e = R + R_b$ , vagyis az áram:

$$I = \frac{V}{R_e} = \frac{V}{R + R_b} . \quad (3-1)$$

Mivel ez egy soros feszültségosztó, így az ellenálláson eső feszültség:

$$V_R = \frac{R}{R + R_b} V . \quad (3-2)$$

Ezek alapján a hasznos teljesítmény:

$$P_{\text{hasznos}} = \frac{R}{(R + R_b)^2} V^2 . \quad (3-3)$$

Ennek a maximumát keressük az  $R$  változtatása mellett. Ehhez deriváljuk a kifejezést  $R$  szerint:

$$\frac{dP_{\text{hasznos}}}{dR} = \frac{d}{dR} \left( \frac{R}{(R + R_b)^2} V^2 \right) = V^2 \cdot \left( \frac{1}{(R + R_b)^2} - 2 \frac{R}{(R + R_b)^3} \right). \quad (3-4)$$

A szélsőérték meglétének feltétele, hogy az első derivált nulla legyen:

$$0 = V^2 \cdot \left( \frac{1}{(R + R_b)^2} - 2 \frac{R}{(R + R_b)^3} \right) \quad (3-5)$$

$$0 = 1 - 2 \frac{R}{R + R_b} \quad (3-6)$$

$$R = R_b. \quad (3-7)$$

Ahhoz, hogy ez egy maximum legyen, elégséges azt megvizsgálni, hogy a második derivált negatív-e ezen a helyen:

$$\frac{d^2 P_{\text{hasznos}}}{dR^2} = V^2 \cdot \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{(R + R_b)^2} - 2 \frac{R}{(R + R_b)^3} \right) \quad (3-8)$$

$$= V^2 \cdot \left( -2 \frac{1}{(R + R_b)^3} - 2 \frac{1}{(R + R_b)^3} + 6 \frac{R}{(R + R_b)^4} \right), \quad (3-9)$$

$$\left. \frac{d^2 P_{\text{hasznos}}}{dR^2} \right|_{R=R_b} = V^2 \cdot \left( -4 \frac{1}{8R_b^3} + 6 \frac{R_b}{16R_b^4} \right) = -V^2 \cdot \frac{1}{8R_b^3} < 0. \quad (3-10)$$

Valóban negatív, vagyis a teljesítmény tényleg maximális.

- b) A hatásfok a hasznos teljesítmény és a teljes befektetett teljesítmény aránya. A telep által leadott teljesítmény itt  $P_{\text{telep}} = VI$ , vagyis

$$\eta = \frac{P_{\text{hasznos}}}{P_{\text{telep}}} = \frac{\frac{R}{(R+R_b)^2} V^2}{\frac{1}{R+R_b} V^2} = \frac{R}{R + R_b}, \quad (3-11)$$

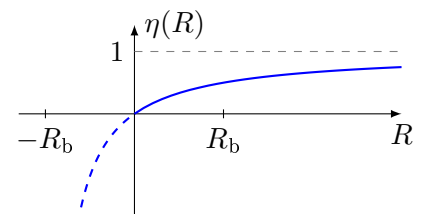
melynek maximumát hasonlóan kereshetjük meg:

$$\frac{d\eta}{dR} = \frac{1}{R + R_b} - \frac{R}{(R + R_b)^2} = 0 \quad (3-12)$$

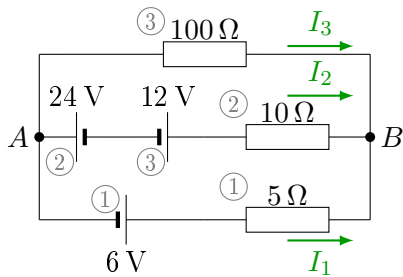
$$1 = \frac{R}{R + R_b} \quad (3-13)$$

$$R_b = 0. \quad (3-14)$$

Láthatjuk, hogy nincs olyan  $R$  érték, amelyre az egyenletet teljesíteni tudjuk ( $R$  kiesik), vagyis az  $\eta(R)$  függvénynek nincs szélsőértéke. Ha ábrázoljuk a görbét, könnyen láthatjuk, hogy az fizikai ( $R > 0$ ) tartományban a hatásfok  $R$  növelésével egyre nő, és minél nagyobb a terhelő ellenállás, annál nagyobb lesz a hatásfok is, de az  $\eta = 1$ -et csak aszimptotikusan tudjuk elérni.



3-A. ábra



4-A. ábra

**4. feladat:** Mekkora az ábrán jelölt áramkör egyes ágaiban folyó áramerősségek?

Megoldás:

A megoldás menete megegyezik a 2. feladatban szereplővel. Először felírjuk a csomóponti törvényeket az  $A$  és a  $B$  csomópontokra:

$$A : \quad 0 = -I_1 - I_2 - I_3 \quad (4-1)$$

$$B : \quad 0 = I_1 + I_2 + I_3 , \quad (4-2)$$

majd pedig felírjuk az áramkörben fellelhető összes hurokra a huroktörvényt:

$$V_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_2 : \quad 0 = -V_1 + I_1 R_1 - I_2 R_2 + V_3 - V_2 \quad (4-3)$$

$$V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 : \quad 0 = V_2 - V_3 + I_2 R_2 - I_3 R_3 \quad (4-4)$$

$$V_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_3 : \quad 0 = -V_1 + I_1 R_1 - I_3 R_3 \quad (4-5)$$

Az öt egyenletben három ismeretlen van. Az egyenletrendszer itt is összefüggő: a (4-2) egyenlet a (4-1)  $-1$ -szerese, illetve a (4-3) és a (4-4) egyenletek összege a (4-5)-at adja.

A független egyenletrendszer:

$$0 = I_1 + I_2 + I_3 \quad (4-6)$$

$$0 = -6 \text{ V} + I_1 \cdot 5 \Omega - I_2 \cdot 10 \Omega + 12 \text{ V} - 24 \text{ V} \quad (4-7)$$

$$0 = 24 \text{ V} - 12 \text{ V} + I_2 \cdot 10 \Omega - I_3 \cdot 100 \Omega . \quad (4-8)$$

Az elsőből  $I_1$  kifejezve, majd a másodikba helyettesítve:

$$0 = -18 \text{ V} - I_2 \cdot 15 \Omega - I_3 \cdot 5 \Omega , \quad (4-9)$$

majd a harmadikat 1,5-tel megszorozva és ehhez hozzáadva:

$$0 = -18 \text{ V} - I_2 \cdot 15 \Omega - I_3 \cdot 5 \Omega + 1,5 \cdot (24 \text{ V} - 12 \text{ V} + I_2 \cdot 10 \Omega - I_3 \cdot 100 \Omega) \quad (4-10)$$

$$0 = -I_3 \cdot 155 \Omega \quad (4-11)$$

$$I_3 = 0 . \quad (4-12)$$

Ez visszahelyettesítve:

$$0 = 12 \text{ V} + I_2 \cdot 10 \Omega \quad (4-13)$$

$$I_2 = -1,2 \text{ A} , \quad (4-14)$$

illetve

$$I_1 = -I_2 = 1,2 \text{ A} . \quad (4-15)$$

Tehát az 1-es ellenálláson  $A$  nyílnak megfelelő irányba folyik  $I_1 = 1,2 \text{ A}$ , a 2-es ellenálláson szintén  $1,2 \text{ A}$  folyik, de a kezdetben felvett ellentétes irányban. A 3-as ellenálláson nem folyik áram.

**5. feladat:** Két ellenállás közül az egyik  $R_1 = 40\text{ k}\Omega$  nagyságú és  $P_1 = 4\text{ W}$  teljesítményű, a másik  $R_2 = 10\text{ k}\Omega$  nagyságú és szintén  $P_2 = 4\text{ W}$  teljesítményű. Mekkora feszültséget kapcsolhatunk maximálisan az ellenállásokra, ha sorba kötjük őket?

Megoldás:

Ha sorba kapcsoljuk őket, akkor ugyanakkora áram folyik át rajtuk. Számoljuk ki az egyik és a másik esetben is ezt a kritikus értéket, és a kettő közül a kisebbik lehet a maximális rákapcsolt áram.

A teljesítmény:  $P = VI = I^2R$  felhasználva az  $R = V/I$  Ohm-törvényt. A megadott teljesítmények névleges teljesítmények: ezek azt jelentik, hogy legfeljebb mekkora teljesítményt vesznek fel a hálózathoz a fogyasztók. Innen a legnagyobb átfolyatható áramok:

$$I_{1,\max} = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{4\text{ W}}{40\text{ k}\Omega}} = 0,01\text{ A} , \quad (5-1)$$

$$I_{2,\max} = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = \sqrt{\frac{4\text{ W}}{10\text{ k}\Omega}} = 0,02\text{ A} , \quad (5-2)$$

tehát a teljes áramkörön  $I_{\max} = 0,01\text{ A}$  folyhat át. Ekkor a teljes áramkörre kapcsolt feszültség:

$$V = I_{\max}R_1 + I_{\max}R_2 = 0,01\text{ A} \cdot 50\text{ k}\Omega = 500\text{ V} . \quad (5-3)$$

**6. feladat:** Az  $V_{\text{mh}} = 5\text{ V}$  méréshatárú,  $R_b = 800\ \Omega$  belső ellenállású feszültségmérővel sorba kapcsolunk egy  $R_e = 12,5\text{ k}\Omega$  nagyságú ellenállást. Mekkora növekszik így a műszer méréshatára?

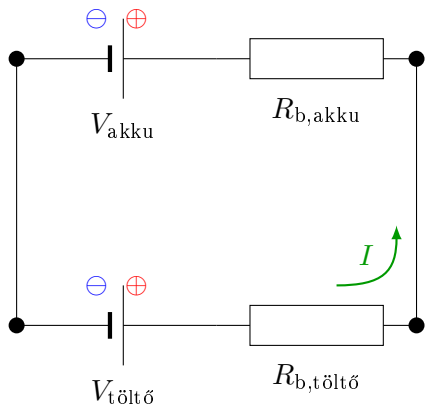
Megoldás:

A műszer az ő két sarka közötti feszültséget méri. Ha a műszerrel sorba kapcsolunk egy másik ellenállást, akkor nem a teljes feszültség fog a műszeren esni. Soros feszültségosztás esetében:

$$V_{\text{mért}} = \frac{R_b}{R_e + R_b} V_{\text{ráadott}} . \quad (6-1)$$

Ha a műszer méréshatára  $5\text{ V}$ , akkor a  $V_{\text{mért}}$  értéke eshet  $0\text{--}5\text{ V}$  közé. Ekkor a  $V_{\text{ráadott}}$  maximális értéke:

$$V_{\text{max,ráadott}} = \frac{R_e + R_b}{R_b} V_{\text{mh}} = \frac{12,5\text{ k}\Omega + 800\ \Omega}{800\ \Omega} 5\text{ V} = 83,125\text{ V} . \quad (6-2)$$



7-A. ábra

**7. feladat:** Egy autóakkumulátort töltés céljából 13 V elektromotoros erejű, 0,09 Ω belső ellenállású töltőre kapcsolunk. Az akkumulátor belső ellenállása 0,01 Ω, elektromotoros ereje 12 V.

- Mekkora a töltőáram?
- Mekkora a töltő által leadott teljesítmény?
- Mennyi az akkumulátor és a töltő melegedésére fordítódó teljesítmény?
- Mennyi az akkumulátor töltésére fordítódó teljesítmény?

Megoldás:

- a) Az akkumulátort úgy dugjuk a töltőre, hogy annak negatív pólusát a töltő negatív pólusához, a pozitívat pedig a pozitívhoz kapcsoljuk. Az áramkör egy hurokból áll. A huroktörvény:

$$0 = -V_{töltő} + IR_{b,töltő} + IR_{b,akku} + V_{akku} \tag{7-1}$$

$$I = \frac{V_{töltő} - V_{akku}}{R_{b,töltő} + R_{b,akku}} = \frac{13 \text{ V} - 12 \text{ V}}{0,09 \Omega + 0,01 \Omega} = 10 \text{ A} . \tag{7-2}$$

- b) A töltő által leadott teljesítmény:

$$P_{töltő} = V_{töltő} I = 13 \text{ V} \cdot 10 \text{ A} = 130 \text{ W} . \tag{7-3}$$

- c) Az akkumulátor és a töltő melegedését a belső ellenállásokon termelődő Joule-hő okozza. Ez veszteségeként jelenik meg:

$$P_{veszteség} = I^2 \cdot R_{b,akku} + I^2 \cdot R_{b,töltő} \tag{7-4}$$

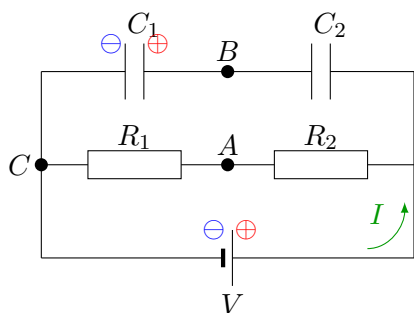
$$= (10 \text{ A})^2 \cdot 0,01 \Omega + (10 \text{ A})^2 \cdot 0,09 \Omega = 10 \text{ W} . \tag{7-5}$$

- d) Az akkumulátor töltésére

$$P_{töltés} = V_{akku} I = 12 \text{ V} \cdot 10 \text{ A} = 120 \text{ W} \tag{7-6}$$

teljesítmény fordítódik.

Vegyük észre, hogy töltő által leadott teljesítmény megegyezik a hasznos teljesítmény és a veszteség összegével: ez egy példa energiamegmaradás törvényére.



9-A. ábra

**9. feladat:** Mekkora az ábrán feltüntetett A és B pontok között mérhető feszültség, ha a telep belső ellenállása elhanyagolható?

Megoldás:

Ahhoz, hogy meghatározzuk az A és a B pontok közötti feszültséget, az áramkör mentén be kell járnunk egy utat a két pont között, és meg kell néznünk, hogy mekkora feszültség esik az egyes áramköri elemeken, amelyeken áthaladunk. Válasszuk az  $A \rightarrow C \rightarrow B$  útvonalat.

Az állandósult állapotban a  $C_1$  és  $C_2$  kondenzátorok fel vannak töltődve, azokon áram nem folyik. Így áram csak az ellenállásokat tartalmazó ágba van:

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} . \tag{9-1}$$

Az  $R_1$  ellenálláson eső feszültség:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V, \quad (9-2)$$

melyet pozitív előjellel kell figyelembe venni, hiszen az áram arra folyik, amerre haladunk ( $A \rightarrow C$ ).

Mivel a kondenzátorok sorba vannak kapcsolva, így a töltésük megegyezik:  $Q_1 = Q_2 = Q$ . Eredő kapacitásuk

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}, \quad (9-3)$$

mellyel a töltés

$$Q = CV = \frac{V}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}, \quad (9-4)$$

vagyis az 1-es kondenzátoron eső feszültség

$$V_{C,1} = \frac{Q}{C_1} = \frac{V}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \frac{1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V. \quad (9-5)$$

Ezt viszont negatív előjellel kell figyelembe venni, hiszen a feszültség növekszik, ahogy a kondenzátoron átlépünk. Tehát a  $B$  pont  $A$  ponthoz viszonyított feszültsége :

$$V_{AB} = \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right) V. \quad (9-6)$$

**10. feladat:** Az ábrán látható kapcsolásban mekkorának válasszuk az  $R_x$  ellenállást, hogy a  $K$  kapcsoló zárása ne befolyásolja az  $I$  áram értékét?

Megoldás:

A kapcsoló bekapcsolása akkor nem módosítja a folyó áramot, ha a kapcsoló két vége között bekapcsolt állapotban sem folyik áram, ami akkor lehetséges, ha a két végpont ugyanakkora potenciálú.

Azt kiszámoltuk korábban, hogy a soros ágakban az ellenállások arányában esik a feszültség, vagyis

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \quad V_x = \frac{R_x}{R_x + R_3} V. \quad (10-1)$$

Akkor lesz ekvipotenciális a kapcsoló két végpontja, ha az  $R_1$  és az  $R_x$  ellenállásokon ugyanakkora feszültség esik, vagyis ha

$$V_1 = V_x \quad (10-2)$$

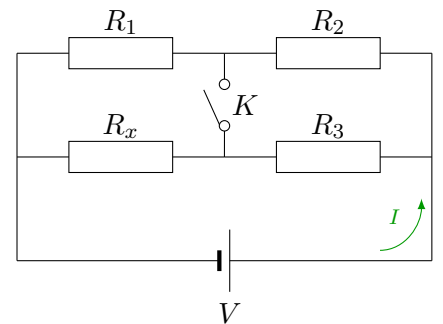
$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} V = \frac{R_x}{R_x + R_3} V \quad (10-3)$$

$$R_1 \cdot (R_x + R_3) = R_x \cdot (R_1 + R_2) \quad (10-4)$$

$$R_1 R_3 = R_x R_2 \quad (10-5)$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_3}. \quad (10-6)$$

Tehát akkor nem folyik áram a kapcsolón, ha a soros ágakban az ellenállások aránya megegyezik.



10-A. ábra