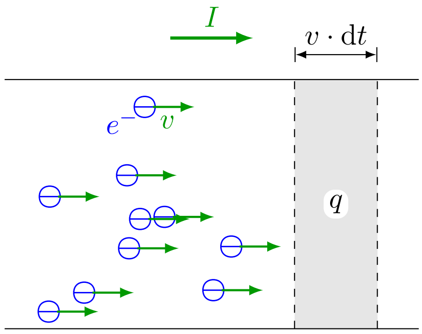
Utolsó módosítás: 2015. március 31., 15:45

Fizika A2E, 7. feladatsor

Vida György József
vidagyorgy@gmail.com

1. feladat: $A = 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$ keresztmetszetű rézvezetékben $I = 10\,\mathrm{A}$ áram folyik. Mekkora az elektronok driftsebessége? Tételezzük fel, hogy rézatomonként egy elektron járul hozzá a vezetéshez, a réz sűrűsége $\varrho_{\mathrm{Cu}} = 8960\,\mathrm{kg/m^3}$, moláris tömege $M = 63{,}546\,\mathrm{g/mol}$, az elektron töltésének nagysága $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $N_{\mathrm{Avogadro}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{atom/mol}$.



1-A. ábra

Megoldás:

Vegyünk egy dt hosszú időtartamot. Ez alatt az elektronok $v \cdot \mathrm{d}t$ hosszú elmozdulást tesznek meg a vezető irányában. Írjuk fel a a vezető $v \cdot \mathrm{d}t$ hosszú szakaszában a vezetésben résztvevő töltések mennyiségét kétféle módon.

Először számoljuk ki, hogy mennyi a térfogategységre jutó vezetési elektronok száma:

$$n = \underbrace{\frac{\text{vezetési elektronok száma}}{\text{1 rézatom}}}_{=1} \cdot \frac{\text{rézatomok száma}}{\text{térfogategység}} \tag{1-1}$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\frac{\text{rézatomok száma}}{\text{tömegegység}}}_{1/M} \cdot \underbrace{\frac{\text{tömeg}}{\text{térfogategység}}}_{\varrho_{\mathrm{Cu}}} = 1 \cdot \frac{\varrho_{\mathrm{Cu}}}{M} \tag{1-2}$$

Innen a vezetési elektronok elektronsűrűsége:

$$n_e = e \cdot n\,, \tag{1-3}$$

vagyis a tartományban található töltésmennyiség:

$$q = n_e \cdot V = e\frac{\varrho_{\mathrm{Cu}}}{M} \cdot Avdt\,. \tag{1-4}$$

Másrészről pedig tudjuk, hogy a dt idő alatt a felület egy keresztmetszetén $q = I \cdot \mathrm{d}t$ töltés áramlik át. Ezek egyenlőségéből:

$$I \cdot \mathrm{d}t = n_e \cdot Avdt \tag{1-5}$$

$$v = \frac{I}{n_e A} \tag{1-6}$$

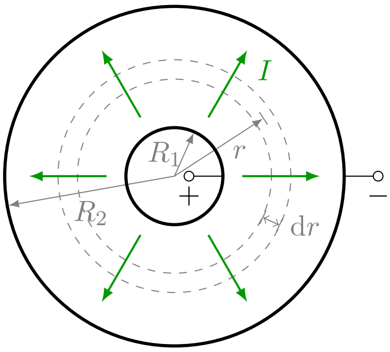
$$v = \frac{M}{\varrho_{\mathrm{Cu}}}\frac{I}{eA} = \frac{63{,}546\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}{8960\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}} \cdot \frac{10\,\mathrm{A}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2}} \tag{1-7}$$

$$= 1{,}48 \cdot 10^{20}\,\frac{1}{\mathrm{mol}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}48 \cdot 10^{20}\frac{1}{6 \cdot 10^{23}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2{,}45 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \tag{1-8}$$

2. feladat: Számítsuk ki egy 10 cm hosszú, $10^{-4}\,\mathrm{m}^2$ keresztmetszetű alumínium rúd ellenállását! Az alumínium fajlagos ellenállása $2{,}7\cdot10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$.

Megoldás:
Az ellenállás

$$R=\rho_{\mathrm{Al}}\frac{l}{A}=2{,}7\cdot10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}\frac{10\,\mathrm{cm}}{10^{-4}\,\mathrm{m}^2}=2{,}7\cdot10^{-5}\,\Omega\ . \tag{2-1}$$



3-A. ábra

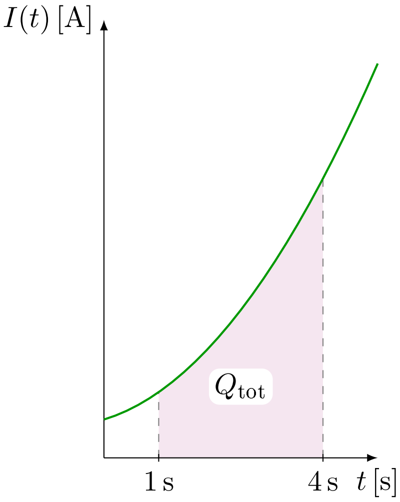
3. feladat: Két $l=15\,\mathrm{cm}$ hosszúságú koaxiális henger közötti teret szilícium tölt ki. A belső henger sugara $R_1=0{,}5\,\mathrm{cm}$, a külső hengeré pedig $R_2=1{,}75\,\mathrm{cm}$. Számítsuk ki a hengerpalástok között mérhető ellenállást! A szilícium fajlagos ellenállása $\varrho_{\mathrm{Si}}=640\,\Omega\mathrm{m}$.

Megoldás:
A feladat megoldása során megpróbáljuk visszavezetni a problémát az egyszerű esetre. Az áram folyási irányára merőlegesen felosztjuk a vezetőt: válasszunk egy r sugarú, $\mathrm{d}r$ vastagságú és l hosszú darabot. Ennek ellenállását egyszerűen tudjuk számolni:

$$\mathrm{d}R(r)=\varrho_{\mathrm{Si}}\frac{\mathrm{d}r}{A}=\varrho_{\mathrm{Si}}\frac{\mathrm{d}r}{2r\pi l}\ . \tag{3-1}$$

Az ilyen darabokon egymás után folyik keresztül az áram, vagyis ezek sorosan vannak kapcsolva. A teljes ellenállás az ilyen ellenállások összege:

$$R=\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}R(r)=\int_{R_1}^{R_2}\varrho_{\mathrm{Si}}\frac{\mathrm{d}r}{2r\pi l}=\frac{\varrho_{\mathrm{Si}}}{2\pi l}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r=\frac{\varrho_{\mathrm{Si}}}{2\pi l}\left[\ln r\right]_{R_1}^{R_2}=\frac{\varrho_{\mathrm{Si}}}{2\pi l}\ln\frac{R_2}{R_1}\ . \tag{3-2}$$



4-A. ábra

4. feladat: Az amperben mért áramerősséget az idő függvényében az $I=2t^2+3t+7$ összefüggés írja le, ahol az időt másodpercben mérjük. Mekkora nagyságú töltés áramlik át a vezető keresztmetszetén $t_1=1\,\mathrm{s}$ és $t_2=4\,\mathrm{s}$ között?

Megoldás:
Az áram a vezető teljes felületén időegység alatt átáramló töltések száma. Az áram integrálja adja meg az átáramló töltés mennyiségét:

$$Q_{\mathrm{tot}}=\int_{t_1}^{t_2}I(t)\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}(2t^2+3t+7)\,\mathrm{d}t=\left[2\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+7t\right]_{t_1}^{t_2} \tag{4-1}$$

$$=\left(2\frac{4^3}{3}+3\frac{4^2}{2}+7\cdot4\right)-\left(2\frac{1^3}{3}+3\frac{1^2}{2}+7\cdot1\right)=85{,}5\,[\mathrm{C}]\ . \tag{4-2}$$

5. feladat: Két darab $1{,}5\,\mathrm{mm}^2$ keresztmetszetű vezetéket sorba kapcsolunk. Az első vezeték $5\,\mathrm{m}$ hosszú és rézből készült, a második pedig $15\,\mathrm{m}$ hosszú és alumíniumból készült. Határozzuk meg az összekapcsolt vezetékek ellenállását! $V = 2\,\mathrm{V}$ feszültség hatására mekkora áram folyik a vezetékben? ($\varrho_{\mathrm{Cu}} = 0{,}018\,\Omega\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$, $\varrho_{\mathrm{Al}} = 0{,}027\,\Omega\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$)

Megoldás:
A két vezetékdarab ellenállása:

$$R_{\mathrm{Cu}} = \varrho_{\mathrm{Cu}} \frac{l_{\mathrm{Cu}}}{A} = 0{,}018\,\Omega \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \frac{5\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{mm}^2} = 0{,}06\,\Omega\ , \tag{5-1}$$

$$R_{\mathrm{Al}} = \varrho_{\mathrm{Al}} \frac{l_{\mathrm{Al}}}{A} = 0{,}027\,\Omega \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \frac{15\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{mm}^2} = 0{,}27\,\Omega\ . \tag{5-2}$$

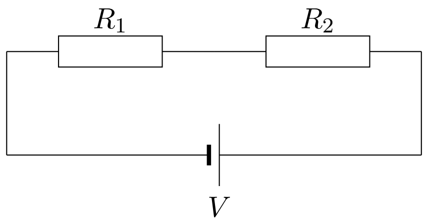
A sorosan kapcsolt vezetékek ellenállása összeadódik, így a teljes vezeték ellenállása:

$$R = R_{\mathrm{Cu}} + R_{\mathrm{Al}} = 0{,}33\,\Omega\ . \tag{5-3}$$

A vezetéken átfolyó áram:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{2\,\mathrm{V}}{0{,}33\,\Omega} = 6{,}06\,\mathrm{A}\ . \tag{5-4}$$

6. feladat: V feszültséget kapcsolunk két sorosan kapcsolt, R_1 és R_2 nagyságú ellenállásra. Számítsuk ki az egyes ellenállásokon eső feszültségeket! Írjuk fel a feszültségek arányát!



6-A. ábra

Megoldás:
A két ellenállás eredő ellenállása:

$$R_{\mathrm{e}} = R_1 + R_2\ , \tag{6-1}$$

vagyis a teljes átfolyó áram:

$$I = \frac{V}{R_{\mathrm{e}}} = \frac{V}{R_1 + R_2}\ . \tag{6-2}$$

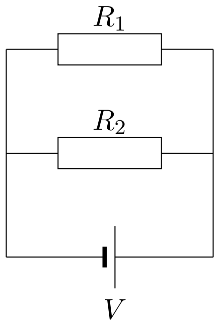
Az egyik és a másik ellenálláson eső feszültség:

$$V_1 = I \cdot R_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V \qquad V_2 = I \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V\ , \tag{6-3}$$

vagyis a feszültségek aránya:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2}\ . \tag{6-4}$$

Soros kapcsolás esetében a feszültségek az ellenállások arányában oszlanak meg.



7-A. ábra

7. feladat: V feszültséget kapcsolunk két párhuzamosan kapcsolt, R_1 és R_2 nagyságú ellenállásra. A két ágban mekkora áramok fognak folyni? Mekkora ezen áramok aránya?

Megoldás:

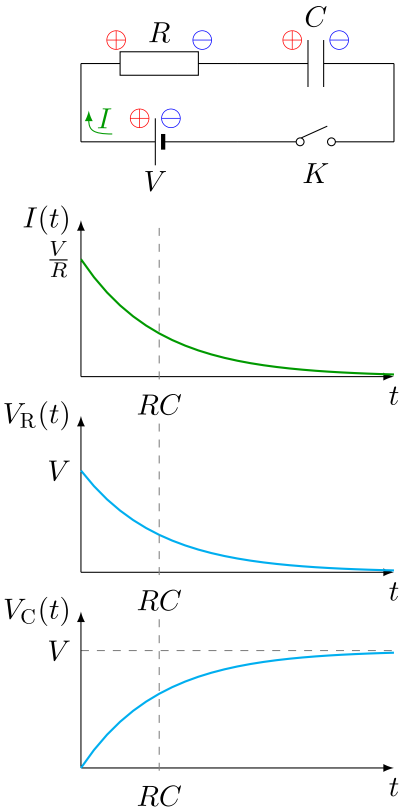
A párhuzamos kapcsolás miatt a két ellenálláson ugyanakkora feszültség esik. Az egyik és a másik ellenálláson átfolyó áram:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \qquad\qquad I_2 = \frac{V}{R_2} \,, \tag{7-1}$$

vagyis az áramok aránya:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \,. \tag{7-2}$$

Párhuzamos kapcsolás esetében az átfolyó áramok az ellenállások fordított arányában oszlanak meg.



8-A. ábra

8. feladat: Egy V feszültségű teleppel sorba kapcsolunk egy R nagyságú ellenállást, egy C kapacitású kondenzátort, valamint egy kapcsolót. Írjuk fel a körben folyó áramot a kapcsoló bekapcsolása után! Mekkora a maximális áram és a kondenzátoron található maximális töltés? Hogy alakul a kondenzátoron és az ellenálláson eső feszültség az idő függvényében?

Megoldás:

Felírva a második Kirchhoff-törvényt:

$$0 = I(t)R + V_C(t) - V \,. \tag{8-1}$$

ahol a kondenzátoron eső feszültség:

$$V_C(t) = \frac{Q_C(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\,\mathrm{d}t' \,, \tag{8-2}$$

amit behelyettesítve és idő szerint deriválva:

$$0 = I(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\,\mathrm{d}t' - V \tag{8-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}I(t) \tag{8-4}$$

$$\int_0^t \frac{1}{I(t')}\frac{\mathrm{d}I(t')}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t' = -\int_0^t \frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t' \tag{8-5}$$

$$\left[\ln I(t')\right]_0^t = -\frac{t}{RC} \tag{8-6}$$

$$I(t) = I(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \,, \tag{8-7}$$

ahol az $I(0)$ a $t = 0$ időpontban folyó áram. Mivel ekkor a kondenzátoron még nem található töltés, ezért a teljes V feszültség az ellenálláson esik, vagyis az áram nagysága $I(0) = \frac{V}{R}$, azaz

$$I(t) = \frac{V}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \,. \tag{8-8}$$

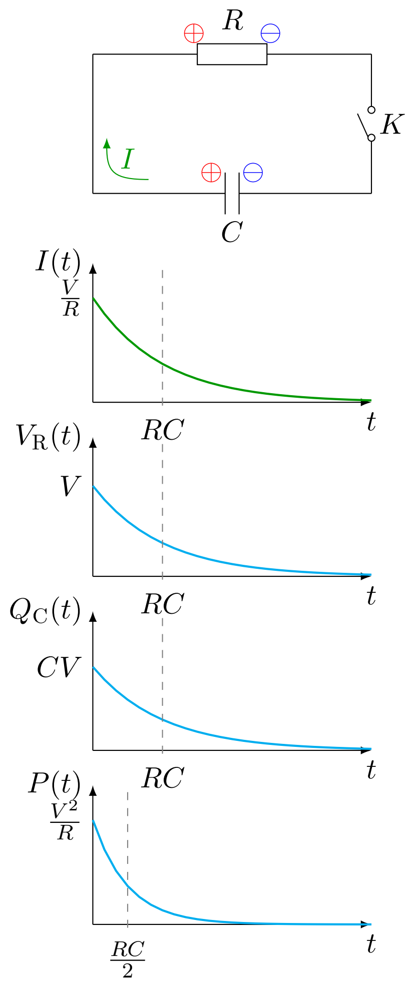
A kondenzátoron és az ellenálláson eső feszültség:

$$V_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{C}\int\limits_0^t I(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{C}\int\limits_0^t \frac{V}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,\mathrm{d}t' = \frac{V}{RC}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}}{-\frac{1}{RC}}\right]_0^t = V\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\,, \tag{8-9}$$

$$V_{\mathrm{R}}(t) = I(t)\cdot R = V\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\ . \tag{8-10}$$

A maximális áram a $t = 0$ időpillanatban folyik, ekkor $I(t=0) = \frac{V}{R}$, a kondenzátoron a maximális töltés $t \to \infty$-ben alakul, ekkor $Q_{\mathrm{C}}^{\max} = C\cdot V_{\mathrm{C}}(t\to\infty) = C\cdot V$.

9. feladat: Egy $C = 5\,\mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátort $V_0 = 800\,\mathrm{V}$ feszültséggel töltünk fel. A feltöltött kondenzátort egy ellenálláson keresztül sütjük ki. Mekkora az ellenálláson disszipált teljesítmény?



9-A. ábra

Megoldás:

A t-edik időpontban disszipált teljesítmény $P(t) = I(t)V_{\mathrm{R}}(t)$, így ennek kiszámításához először meg kell határoznunk az áramkörben folyó áramot és az ellenálláson elsó feszültséget.

Felírva a második Kirchhoff-törvényt az áramkörben:

$$0 = I(t)R - V_{\mathrm{C}}(t)\,, \tag{9-1}$$

ahol

$$V_{\mathrm{C}}(t) = \frac{Q_{\mathrm{C}}(t)}{C} = \frac{1}{C}\left(Q_0 - \int\limits_0^t I(t')\,\mathrm{d}t'\right)\,, \tag{9-2}$$

hiszen kezdetben a kondenzátor töltése $Q_0 = CV_0$, és az áramkörben folyó $I(t)$ áram a kondenzátor töltését csökkenti. Ezt behelyettesítve, majd idő szerint deriválva:

$$0 = I(t)R - \frac{1}{C}\left(Q_0 - \int\limits_0^t I(t')\,\mathrm{d}t'\right) \tag{9-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}I(t) \tag{9-4}$$

$$\int\limits_0^t \frac{1}{I(t')}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t' = -\int\limits_0^t \frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t' \tag{9-5}$$

$$\left[\ln I(t')\right]_0^t = -\frac{t}{RC} \tag{9-6}$$

$$I(t) = I(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{9-7}$$

Ahol $I(0)$ a kezdeti időpillanatban folyó áram nagysága: $I(0) = \frac{V_0}{R}$

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\ . \tag{9-8}$$

Innen az ellenálláson eső feszültség:

$$V_{\mathrm{R}}(t) = V_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,, \tag{9-9}$$

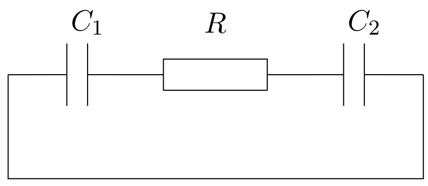
illetve a teljesítmény:

$$P(t) = I(t)V_{\mathrm{R}}(t) = \frac{V_0^2}{R}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\ . \tag{9-10}$$

A kondenzátoron lévő töltés:

$$Q_C(t) = Q_0 - \int_0^t I(t')\,\mathrm{d}t' = CV_0 - \int_0^t I(t')\,\mathrm{d}t' = CV_0 - \int_0^t \frac{V_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t'}{RC}}\,\mathrm{d}t' \tag{9-11}$$

$$= CV_0 - \frac{V_0}{R}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t'}{RC}}}{-\frac{1}{RC}}\right]_0^t = V_0 C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\ . \tag{9-12}$$



10-A. ábra

10. feladat: Egy C_1 kapacitású, V feszültségre töltött kondenzátor egyik fegyverzetét egy R ellenálláson keresztül egy másik, C_2 kapacitású töltetlen kondenzátor egyik fegyverzetére kötjük. A két kondenzátor szabad fegyverzeteit rövidre zárjuk.

a) A tranziensek lecsengése után mekkora feszültséget mérhetünk a kondenzátorokon?

b) Mekkora az állandósult állapotban a kondenzátorok teljesítménye?

c) Mekkora az állandósult állapotban a kondenzátorok energiája?

Megoldás:

a) Legyen kezdetben $Q_1 = C_1 V$ az 1. kondenzátoron a töltés. Az össztöltés megmarad, így az egyensúly beálltával is $Q_1 = Q_1' + Q_2'$. Kirchhoff II. törvénye értelmében az egyensúlyban $V_{C,1}' = V_{C,2}' = V'$. Innen

$$C_1 V = C_1 V' + C_2 V' \tag{10-1}$$

$$V' = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V\ . \tag{10-2}$$

b) Mivel áram nem folyik az állandósult állapotban, így a kondenzátorok teljesítménye nulla.

c) A kondenzátorok energiája:

$$E_1 = \frac{1}{2} C_1 V'^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1^3}{(C_1 + C_2)^2} V^2 \tag{10-3}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} C_2 V'^2 = \frac{1}{2} \frac{C_2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} V^2\ . \tag{10-4}$$