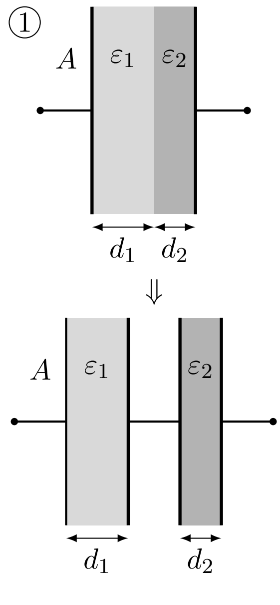
Utolsó módosítás: 2015. március 17., 11:20

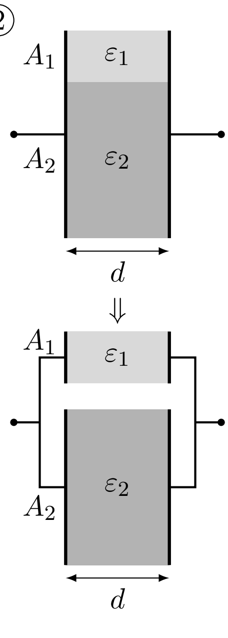
Fizika A2E, 6. feladatsor

Vida György József
vidagyorgy@gmail.com

1. feladat: Síkkondenzátor A területű fegyverzetei közötti teret az ábrán látható módokon két dielektrikum tölti ki. Mekkorák a kapacitások, ha a fegyverzetek méretei nagyok a köztük lévő távolsághoz képest?



1-A. ábra



1-B. ábra

Megoldás:

Először számoljuk ki egy üres, d széles és A felületű fegyverzetekből összeállított síkkondenzátor kapacitását. Ha a kondenzátort Q töltéssel töltöttük fel (azaz az egyik fegyverzeten Q, a másikon pedig $-Q$ töltés van), akkor abban a térerősség nagysága mindenhol $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$. A két fegyverzet közötti feszültség, mivel a tér homogén: $U = E \cdot d = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \cdot d$. Így a kapacitás:

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \ . \tag{1-1}$$

Ha a kondenzátor valamilyen homogén ε_{r} relatív dielektromos állandójú anyaggal van kitöltve, akkor a térerősség: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}}}$, vagyis a kapacitás:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \frac{A}{d} \ . \tag{1-2}$$

A feladatban szereplő kondenzátorokban azonban nem homogén a dielektrikum. Ezeket a kondenzátorokat fel tudjuk bontani két-két olyan kondenzátorra, amelyekben már homogén a dielektrikum.

Az első esetben a bal és a jobb oldalon különböző térerősség jön létre:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \qquad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}, \tag{1-3}$$

a két oldal közötti feszültség a két szakaszon eső feszültség összege:

$$U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2 \ . \tag{1-4}$$

A kapacitás pedig a definíció szerint:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2} = \frac{1}{\frac{d_1}{A \varepsilon_0 \varepsilon_1} + \frac{d_2}{A \varepsilon_0 \varepsilon_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \ . \tag{1-5}$$

A kapott eredmény megfelel annak, hogy két kondenzátort sorba kapcsoltunk volna a szemléletes képnek megfelelően.

A második esetben osszuk szét a töltést a két részfelületre, így a két térerősség:

$$E_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 A_1} \qquad E_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 A_2} \ . \tag{1-6}$$

Az ezekből adódó feszültségeknek meg kell egyezniük, így szükségszerűen teljesülnie kell annak is, hogy $E_1 = E_2 = E$. A kapacitás:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{E_1\varepsilon_0\varepsilon_1 A_1 + E_2\varepsilon_0\varepsilon_2 A_2}{Ed} = \varepsilon_0\varepsilon_1\frac{A_1}{d} + \varepsilon_0\varepsilon_1\frac{A_1}{d} = C_1 + C_2\ , \tag{1-7}$$

ahol a résztöltéseket a elektromos terekkel fejeztük ki, majd kihasználtuk a térerősség egyenlőségét. Így végeredményként megkaptuk, hogy ez az elrendezés két párhuzamosan kapcsolt síkkondenzátornak felel meg.

2. feladat: Egy síkkondenzátor dielektrikuma két rétegből áll, amelyek elválasztó felülete a fegyverzetekkel párhuzamos. Számoljuk ki, hogy legfeljebb mekkora feszültséget kapcsolhatunk a kondenzátorra, ha a rétegek vastagsága $d_1 = 0{,}01\,\mathrm{m}$ és $d_2 = 0{,}006\,\mathrm{m}$, relatív permittivitása $\varepsilon_{1r} = 5{,}5$ és $\varepsilon_{2r} = 2{,}2$, átütési szilárdsága $E_{1\mathrm{kr}} = 3{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{V/m}$ és $E_{2\mathrm{kr}} = 3 \cdot 10^7$ V/m.

Megoldás:

Az előző feladathoz hasonlóan ezt a kondenzátort is úgy tudjuk elképzelni mint két sorba kapcsolt kondenzátort. A két kondenzátor ugyanakkora Q töltésre töltődik fel, hiszen a két belső fegyverzeten lévő töltés összege mindig nulla:

$$Q_1 = Q_2 \tag{2-1}$$

$$C_1U_1 = C_2U_2\ . \tag{2-2}$$

A rendszeren eső feszültség a két kondenzátoron eső feszültségek összege (felhasználva az előző összefüggést):

$$U = U_1 + U_2 = U_1 + \frac{C_1}{C_2}U_1 \tag{2-3}$$

$$U = \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)U_1 \tag{2-4}$$

$$U = \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)U_2\ . \tag{2-5}$$

Az átütési szilárdság megadja U_1 illetve U_2 maximális értékét:

$$U_{1,\max} = E_{1,\mathrm{kr}} \cdot d_1 = 3{,}5 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}01\,\mathrm{m} = 3{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{V}\ , \tag{2-6}$$

$$U_{2,\max} = E_{2,\mathrm{kr}} \cdot d_1 = 3 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}006\,\mathrm{m} = 1{,}8 \cdot 10^5\ \mathrm{V}\ . \tag{2-7}$$

A teljes rendszerre kapcsolható maximális feszültség:

$$U_{(1),\max} = \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)U_{1,\max} = \left(1 + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\frac{A}{d_1}}{\varepsilon_0\varepsilon_2\frac{A}{d_2}}\right)U_{1,\max} = \left(1 + \frac{\varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_2 d_1}\right)U_{1,\max} \tag{2-8}$$

$$= \left(1 + \frac{5{,}5 \cdot 0{,}006\,\mathrm{m}}{2{,}2 \cdot 0{,}01\,\mathrm{m}}\right) \cdot 3{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{V} = 8{,}75 \cdot 10^5\ \mathrm{V}\ , \tag{2-9}$$

$$U_{(2),\max} = \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)U_{2,\max} = \left(1 + \frac{\varepsilon_2 d_1}{\varepsilon_1 d_2}\right)U_{2,\max} \tag{2-10}$$

$$= \left(1 + \frac{2{,}2 \cdot 0{,}01\,\mathrm{m}}{5{,}5 \cdot 0{,}006\,\mathrm{m}}\right) \cdot 1.8 \cdot 10^5\ \mathrm{V} = 3 \cdot 10^5\ \mathrm{V}\ . \tag{2-11}$$

A két érték közül legfeljebb a kisebbet, vagyis 30 000 V-ot kapcsolhatjuk a rendszerre, annak érdekében, hogy megelőzzük az átütést.

3. feladat: $R_1 = 10\,\mathrm{cm}$ sugarú töltött fémgömböt $d = 20\,\mathrm{cm}$ vastag, $\varepsilon_r = 2$ relatív permittivitású szigetelő réteg vesz körül. Hogyan függ a potenciál a centrumtól mért távolságtól?

Megoldás:

Használjuk a továbbiakban az $R_2 = R_1 + d$-t a külső sugár jelölésére. Egy ilyen gömb térerősségének kiszámítását már tárgyaltuk, így itt nem részletezzük. A számolás eredménye:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} & R_2 < r \end{cases} . \tag{3-1}$$

Számoljuk ki a potenciált a definíció alapján:

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}' . \tag{3-2}$$

A rendszer szimmetriájából adódóan a potenciál is gömbszimmetrikus lesz, vagyis az csak a gömb középpontjától mért távolságtól függ. Az integrálási utat pedig célszerű sugárirányúnak választani, hiszen a térerősség is sugárirányú. Legyen az $\mathbf{r}_0$ referenciapont a végtelen távolban, itt a potenciál legyen nulla. Integráljunk onnan egy $r > R_2$ távolságban lévő pontig. Az integrálás során az elemi lépések $\mathrm{d}\mathbf{r}' = \mathrm{d}r'\mathbf{e}_\mathrm{r}$, így:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r')\,\mathrm{d}r' = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} . \tag{3-3}$$

Ha a gömbhöz közelebb jövünk, vagyis a potenciált az $R_1 < r < R_2$ tartományban keressük, akkor ugyanezt az integrált kell elvégeznünk:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r')\,\mathrm{d}r' = -\int_{\infty}^{R_2} E(r')\,\mathrm{d}r' - \int_{R_2}^{r} E(r')\,\mathrm{d}r' \tag{3-4}$$

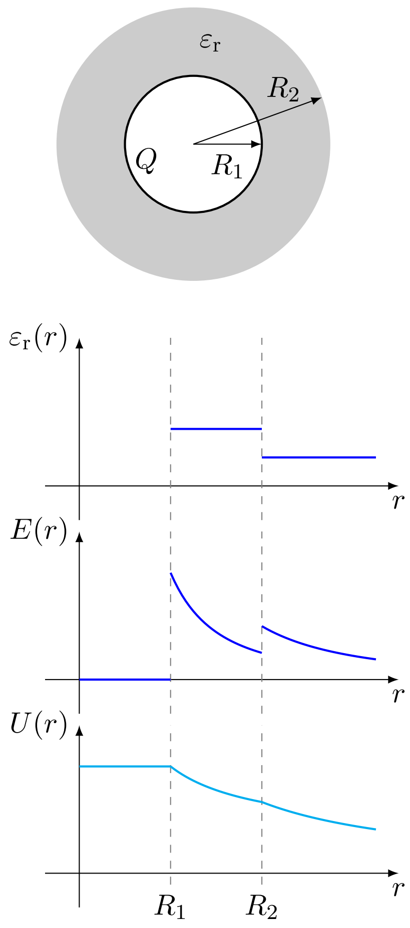
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} - \int_{R_2}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}\,\mathrm{d}r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{R_2}^{r} \tag{3-5}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\frac{Q}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\frac{Q}{r} . \tag{3-6}$$

Az $r < R_1$ tartomány tömör fém. A fémben a feszültség minden pontban ugyanakkora, így odabent megegyezik a felületen lévő feszültséggel. Összefoglalva tehát:

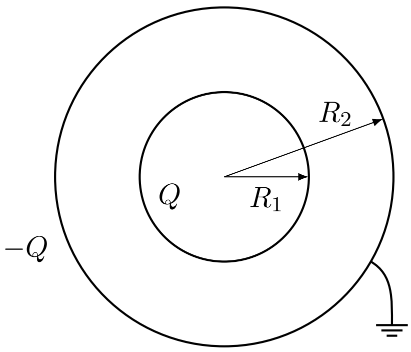
$$U(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\frac{Q}{R_1} & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\frac{Q}{r} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} & R_2 < r \end{cases} \tag{3-7}$$

Megjegyzés: A feszültségnek mindig folytonos függvénynek kell lennie, hiszen azt definíció szerint egy véges értékű függvény (a térerősség) integrálásával állítjuk elő.



3-A. ábra

4. feladat: Egy gömbkondenzátor belső, R_1 sugarú fegyverzetére Q töltést viszünk, a külső, R_2 sugarú fegyverzetet leföldeljük. Mekkora a feszültség a két fegyverzet között és mekkora a kondenzátor kapacitása?



4-A. ábra

Megoldás:

A földelés miatt a külső gömbfelületen $-Q$ töltés jelenik meg. Azt már korábbról tudjuk, hogy a térerősség egy ilyen rendszerben:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r \end{cases} . \tag{4-1}$$

A potenciált a definíció alapján számoljuk. Az előző feladathoz hasonlóan itt is gömbszimmetrikus a probléma, így a potenciál csak a gömbök közepétől mért távolságtól függ, illetve sugárirányú a térerősség, vagyis célszerű az integrálást egy sugárirányú út mentén elvégezni.

A földelt gömb potenciálja nulla definíció szerint. A másik gömb potenciálja:

$$U(R_1) = 0 - \int_{R_2}^{R_1} E(r')\,\mathrm{d}r' = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{R_2}^{R_1} \tag{4-2}$$

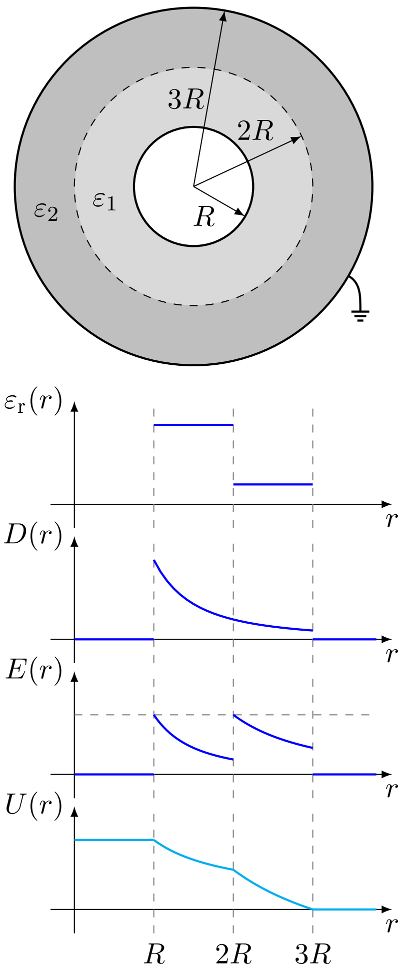
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) , \tag{4-3}$$

vagyis a potenciálkülönbség a két gömb között $V = U(R_1) - 0 = U(R_1)$.

A kondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} . \tag{4-4}$$

5. feladat: Koncentrikus fémgömbök között $R < r < 2R$ tartományban ε_1 permittivitású, E_{1kr} átütési szilárdságú, a $2R < r < 3R$ tartományban pedig $\varepsilon_2 = 0{,}25\varepsilon_1$ permittivitású, $E_{2kr} = 1{,}1E_{1kr}$ átütési szilárdságú szigetelő van. Mekkora a gömbökre kapcsolható legnagyobb feszültség?



5-A. ábra

Megoldás:

Korábbi tanulmányainkból ismerjük már, hogy hogyan lehet kiszámolni a dielektromos eltolást és a térerősséget. Ezek az adott rendszerben:

$$D(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2} & 2R < r < 3R \\ 0 & 3R < r \end{cases} , \quad E(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{Q}{r^2} & R < r < 2R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{Q}{r^2} & 2R < r < 3R \\ 0 & 3R < r \end{cases} . \tag{5-1}$$

Láthatjuk, hogy mind a két tartományban a legkisebb sugárnál a legnagyobb a térerősség, vagyis akkor nem üt át a rendszer, ha $E(R) < E_{1\mathrm{kr}}$ és $E(2R) < E_{2\mathrm{kr}}$. A feladat számértékei úgy vannak megadva, hogy $E(R) = E(2R)$, vagyis elégséges, ha

$$E(R) < E_{1\mathrm{kr}} \tag{5-2}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{Q}{R^2} < E_{1\mathrm{kr}} \tag{5-3}$$

$$Q < 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R^2 E_{1\mathrm{kr}} \ . \tag{5-4}$$

Most már tudjuk, hogy legfeljebb mekkora lehet az a töltés, amit a kondenzátorra felhalmozhatunk. Innen a legnagyobb feszültséget a kondenzátor kapacitásának ismeretében tudjuk megadni:

$$U = \frac{Q}{C} < \frac{1}{C} \cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R^2 E_{1\mathrm{kr}} \ . \tag{5-5}$$

A kapacitás egyszerűen számolható, ha észrevesszük, hogy ez a kondenzátor olyan, mintha két kondenzátor lenne sorosan kapcsolva:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \ , \tag{5-6}$$

ahol a C_1 az R és $2R$ sugarú gömbök közötti ε_1 dielektrikummal töltött kondenzátornak, illetve a C_2 az $2R$ és $3R$ sugarú gömbök közötti ε_2 dielektrikummal töltött kondenzátor kapacitásának felel meg. Az előző feladat eredményét felhasználva:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R}{\frac{1}{2\varepsilon_1} + \frac{1}{6\varepsilon_2}} \ , \tag{5-7}$$

vagyis

$$U < \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{2\varepsilon_1} + \frac{1}{6\varepsilon_2}\right)\right] \cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R^2 E_{1\mathrm{kr}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \cdot R E_{1\mathrm{kr}} \ . \tag{5-8}$$

6. feladat: Számítsuk ki a h hosszúságú, $R_1 < R_2 \ll h$ sugarakkal rendelkező hengerkondenzátor kapacitását, ha a hengerek között levegő van!

Megoldás:

Töltsük fel a kondenzátort Q töltéssel. A kapacitás kiszámolásához először szükséges tudnunk a kondenzátor belsejében így kialakuló térerősséget. Ezt is kiszámoltuk már korábban, az eredmény:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{r} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r \end{cases} \ , \tag{6-1}$$

ahol a térerősség sugárirányú. A két henger közötti potenciálkülönbséget a definíció szerint számoljuk, ahol az integrálási út a szélesebb, nulla potenciálú hengertől sugárirányban vezet a kisebb hengerig.

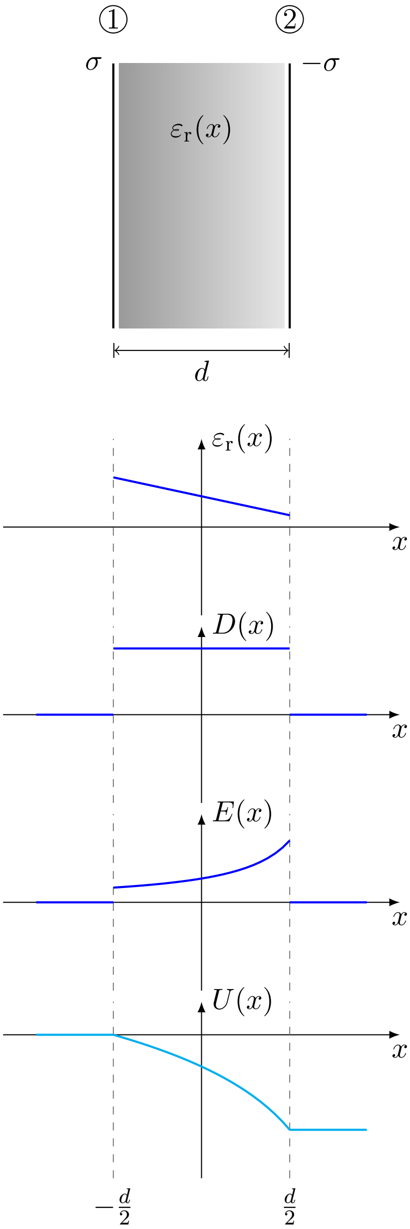
$$U(R_1) = U(R_2) - \int_{R_2}^{R_1} E(r')\,\mathrm{d}r' = 0 - \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{Q}{r'}\,\mathrm{d}r' = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\left[\ln r'\right]_{R_2}^{R_1} \tag{6-2}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1} \ . \tag{6-3}$$

Vagyis a kapacitás:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{U(R_1) - U(R_2)} = 2\pi\varepsilon_0 h\left[\ln\frac{R_2}{R_1}\right]^{-1} \ . \tag{6-4}$$

7. feladat: Síkkondenzátor A területű lemezei közötti térrészt olyan dielektrikum tölti ki, amelynek elektromos permittivitása az egyik lemeznél felvett $\varepsilon_{1\mathrm{r}}$ értékről a másik lemeznél felvett $\varepsilon_{2\mathrm{r}} < \varepsilon_{1\mathrm{r}}$ értékig lineárisan csökken. A lemezek közötti távolság d. Határozzuk meg a kondenzátor kapacitását!



7-A. ábra

Megoldás:

Ennél a feladatnál nem ússzuk meg a térerősség kiszámítását. Ehhez először adjuk meg a dielektrikum állandójának helyfüggését:

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}(x) = A \cdot x + B\,, \qquad \begin{array}{r} \varepsilon_{\mathrm{r}}(-d/2) = -A\frac{d}{2} + B = \varepsilon_{1\mathrm{r}} \\ \varepsilon_{\mathrm{r}}(d/2) = A\frac{d}{2} + B = \varepsilon_{2\mathrm{r}} \end{array}\,, \tag{7-1}$$

$$A = \frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}}{d} \qquad B = \frac{\varepsilon_{1\mathrm{r}} + \varepsilon_{2\mathrm{r}}}{2} \tag{7-2}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}(x) = \frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}}{d} \cdot x + \frac{\varepsilon_{1\mathrm{r}} + \varepsilon_{2\mathrm{r}}}{2}\,. \tag{7-3}$$

A síkkondenzátorban a térerősség:

$$E(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}}(x)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}}{d} \cdot x + \frac{\varepsilon_{1\mathrm{r}} + \varepsilon_{2\mathrm{r}}}{2}\right)^{-1}\,, \tag{7-4}$$

ahonnan a potenciál (ha a nullpontot a bal oldali lemezhez rögzítjük):

$$U(x) \tag{7-5}$$

$$= U(-d/2) - \int_{-\frac{d}{2}}^{x} E(x')\,\mathrm{d}x' = -\int_{-\frac{d}{2}}^{x} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}}{d} \cdot x' + \frac{\varepsilon_{1\mathrm{r}} + \varepsilon_{2\mathrm{r}}}{2}\right)^{-1} \mathrm{d}x' \tag{7-6}$$

$$= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{d}{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}} \cdot \ln\left(\frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}}{d} \cdot x' + \frac{\varepsilon_{1\mathrm{r}} + \varepsilon_{2\mathrm{r}}}{2}\right)\right]_{-\frac{d}{2}}^{x}\,, \tag{7-7}$$

vagyis a két lemez közötti feszültség:

$$V = U(d/2) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{d}{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}} \cdot \ln\left(\frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}}{d} \cdot x' + \frac{\varepsilon_{1\mathrm{r}} + \varepsilon_{2\mathrm{r}}}{2}\right)\right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \tag{7-8}$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{d}{\varepsilon_{1\mathrm{r}} - \varepsilon_{2\mathrm{r}}}\left[\ln\left(\varepsilon_{2\mathrm{r}}\right) - \ln\left(\varepsilon_{1\mathrm{r}}\right)\right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{d}{\varepsilon_{1\mathrm{r}} - \varepsilon_{2\mathrm{r}}} \ln\left(\frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}}}{\varepsilon_{1\mathrm{r}}}\right)\,. \tag{7-9}$$

Vegyük észre, hogy ez a mennyiség negatív ($\sigma > 0$ esetén). A kapacitás pozitív mennyiség, így ennek ellentettjével érdemes a kapacitást kiszámolni:

$$C = \frac{Q}{|V|} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot \left(\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}\right)\left[\ln\left(\frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}}}{\varepsilon_{1\mathrm{r}}}\right)\right]^{-1}\,. \tag{7-10}$$

8. feladat: Ideális síkkondenzátor fegyverzetei egymástól d távolságra vannak. A kondenzátor belsejében a térerősség E_0.

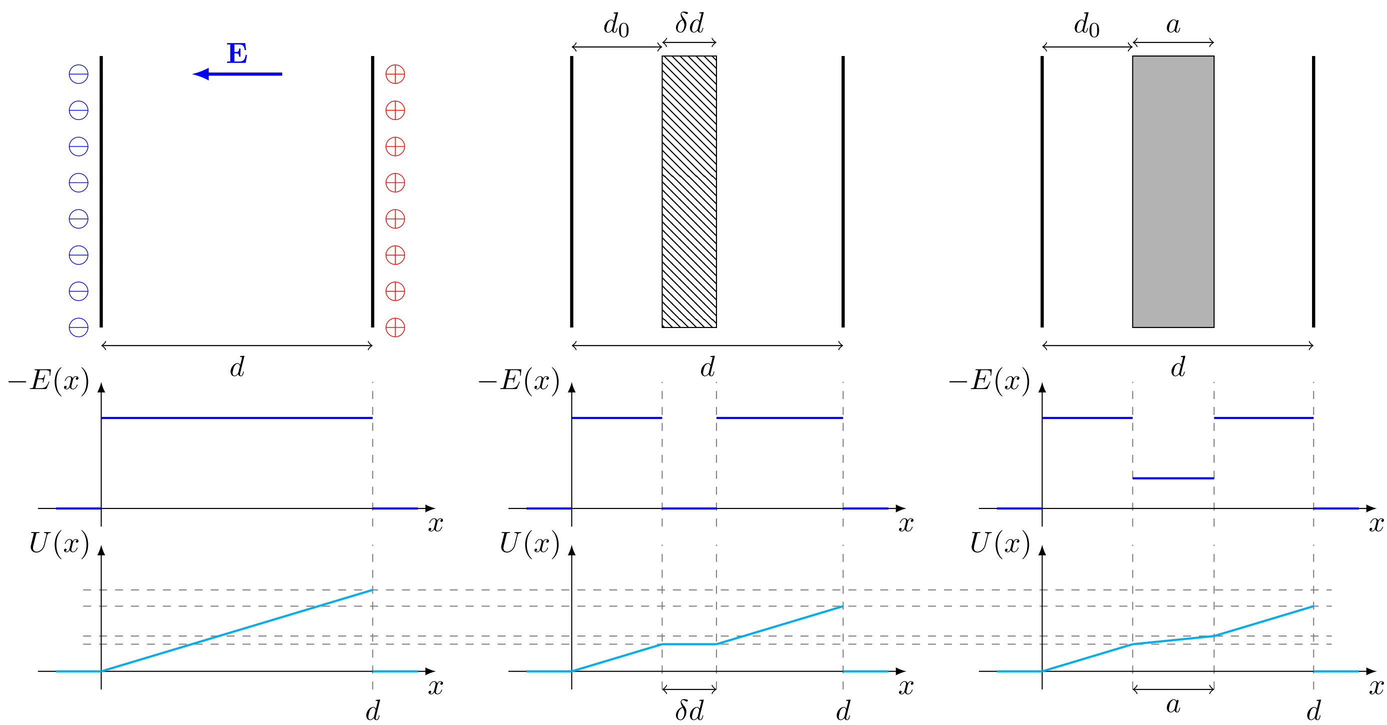
a) Hányszorosára változik meg a kondenzátor kapacitása, ha a fegyverzetekkel párhuzamosan egy δd vastagságú fémlemezt helyezünk a kondenzátor belsejébe?

b) Rajzoljuk fel a térerősséget, mint a fegyverzettől mért távolság függvényét, ha a fémlemez a bal oldali fegyverzettől d_0 távolságra van!

c) Rajzoljuk fel a potenciál változását a hely függvényében az előző összeállításnál! Mekkora a fegyverzetek közötti feszültség?

d) Milyen vastag szigetelőlemez hatására változik a síkkondenzátor kapacitása ugyanannyiszorosára, mint a fémlemez esetében, ha ε_r adott?

Megoldás:



a) A fémlemez belsejében a térerősség nulla. Ekkor olyan, mintha két sorosan kapcsolt kondenzátorunk lenne, ahol az egyik d_0 a másik pedig $d - d_0 - \delta d$ széles. Ennek kapacitása:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_0 \frac{A}{d_0}} + \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{A}{d - d_0 - \delta d}}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d_0 + d - d_0 - \delta d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d - \delta d} \,, \tag{8-1}$$

ahogy azt vártuk is, a hatás olyan, mintha a fegyverzeteket közelebb toltuk volna egymáshoz. Tehát a kapacitás a $\frac{d}{d-\delta d}$-szeresére változik.

b-c) A térerősség és a potenciál:

$$E(x) = \begin{cases} -E_0 & 0 < x < d_0 \\ 0 & d_0 < x < d_0 + \delta d \\ -E_0 & d_0 + \delta d < x < d \end{cases} \tag{8-2}$$

$$U(x) = \begin{cases} E_0 \cdot x & 0 < x < d_0 \\ E_0 \cdot d & d_0 < x < d_0 + \delta d \\ E_0 \cdot (x - \delta d) & d_0 + \delta d < x < d \end{cases} \,, \tag{8-3}$$

ahol nem szabad elfelejteni azt, hogy a fémben a potenciál konstans, és a potenciál folytonos függvény kell, hogy legyen.

d) Egy szigetelő ε_r dielektromos állandójú anyag behelyezésénél a térerősség:

$$E(x) = \begin{cases} -E_0 & 0 < x < d_0 \\ -\frac{E_0}{\varepsilon_\mathrm{r}} & d_0 < x < d_0 + \delta d \\ -E_0 & d_0 + \delta d < x < d \end{cases} . \tag{8-4}$$

A potenciált ebben az esetben végigszámoljuk. A szigetelőig természetesen ugyanaz az eredmény, mint az előbb. A szigetelőben:

$$U(x) = U(d_0) - \int_{d_0}^{x} E(x')\,\mathrm{d}x' = E_0 d_0 + \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}} \int_{d_0}^{x} E_0\,\mathrm{d}x' \tag{8-5}$$

$$= E_0 d_0 + \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}} E_0 \cdot (x - d_0) , \tag{8-6}$$

illetve az után:

$$U(x) = U(d_0 + a) - \int_{d_0}^{x} E(x')\,\mathrm{d}x' = E_0 d_0 + \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}} E_0 a + \int_{d_0+a}^{x} E_0\,\mathrm{d}x' \tag{8-7}$$

$$= E_0 d_0 + \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}} E_0 a + E_0 \cdot (x - d_0 - a) . \tag{8-8}$$

Összefoglalva

$$U(x) = \begin{cases} E_0 \cdot x & 0 < x < d_0 \\ E_0 d_0 + \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}} E_0 \cdot (x - d_0) & d_0 < x < d_0 + \delta d \\ \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}} E_0 a + E_0 \cdot (x - a) & d_0 + \delta d < x < d \end{cases} . \tag{8-9}$$

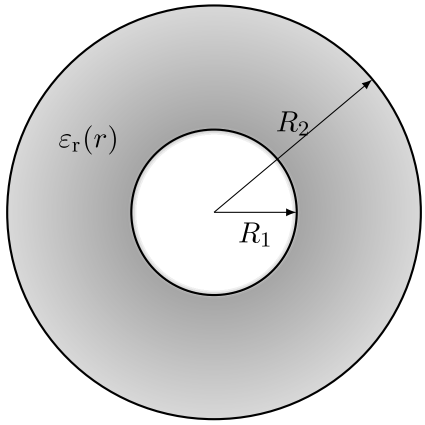
Ahhoz, hogy a kapacitás ugyanannyiszorosára változzon az kell, hogy feszültségek megegyezzenek a két esetben:

$$E_0 \cdot (d - \delta d) = \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}} E_0 a + E_0 \cdot (d - a) \tag{8-10}$$

$$-\delta d = \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}} a - a \tag{8-11}$$

$$a = \left[1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right]^{-1} \delta d . \tag{8-12}$$

9. feladat: Az R_1 és R_2 sugarú koncentrikus gömbök közötti térrészt inhomogén szigetelő tölti ki, amelynek permittivitása a középponttól mért távolság függvénye. Milyen függvény szerint kell változnia a permittivitásnak, hogy a kondenzátort feltöltve az elektromos térerősség nagysága az egész térrészben állandó legyen? Mekkora az így kapott kondenzátor kapacitása?



9-A. ábra

Megoldás:
Azt tudjuk, hogy ilyen esetben a dielektromos eltolás a gömbök között:

$$D(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2} \,, \tag{9-1}$$

ha a kondenzátort Q töltéssel töltjük fel. A térerősség ebből: $E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}(r)}$, vagyis ahhoz, hogy $E(r)$ ne függjön a sugártól, $\varepsilon_\mathrm{r}(r) \sim \frac{1}{r^2}$ kell hogy legyen. Legyen akkor

$$\varepsilon_\mathrm{r}(r) = \frac{\tilde{\varepsilon}}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}} \cdot Q \,. \tag{9-2}$$

A feszültség a két gömbfelület között:

$$V = -\int_{R_2}^{R_1} E(r')\,\mathrm{d}r' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}} \cdot Q \int_{R_2}^{R_1} \mathrm{d}r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}} \cdot Q(R_2 - R_1) \,, \tag{9-3}$$

vagyis a kapacitás:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}}{R_2 - R_1} \,. \tag{9-4}$$

10. feladat: Két kondenzátor közül az egyiket U_1 =300 V-ra, a másikat U_2 =100 V-ra töltjük fel. Összekapcsolva a kondenzátorok azonos pólusait a közös feszültség U_k =250 V lesz. Határozzuk meg a két kondenzátor kapacitásának arányát!

Megoldás:
Az összekapcsolás után valamennyi töltés kicserélődik a két kondenzátor között. Az új töltések legyenek Q_1' és Q_2'. Mivel a két kondenzátor össze van kapcsolva, így a feszültségük azonos: $U_1' = U_2' = U_\mathrm{k}$. Azt azonban tudjuk, hogy az össztöltésnek meg kell maradnia:

$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \tag{10-1}$$
$$C_1U_1 + C_2U_2 = C_1U_1' + C_2U_2' \tag{10-2}$$
$$C_1U_1 + C_2U_2 = (C_1 + C_2)U_\mathrm{k} \tag{10-3}$$
$$\frac{C_1}{C_2}U_1 + U_2 = \left(\frac{C_1}{C_2} + 1\right)U_\mathrm{k} \tag{10-4}$$
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{U_\mathrm{k} - U_2}{U_1 - U_\mathrm{k}} = \frac{250\,\mathrm{V} - 100\,\mathrm{V}}{300\,\mathrm{V} - 250\,\mathrm{V}} = 3 \,. \tag{10-5}$$