Fizika A2E, 5. feladatsor

Vida György József
vidagyorgy@gmail.com

1. feladat: Mi a homogén $\mathbf{E}$ térerősség potenciálja?

Megoldás:

A potenciál definíciója: $\mathbf{E}(x,y,z) = -\boldsymbol{\nabla} U(x,y,z)$, amely kifejtve a három komponensre:

$$E_x(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \tag{1-1}$$

$$E_y(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \tag{1-2}$$

$$E_z(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \ , \tag{1-3}$$

ahol a ∂ a parciális deriválást jelenti. Homogén térerősség esetében $\mathbf{E} = (E_x,E_y,E_z)$. Tehát az U függvénynek olyannak kell lennie, hogy x, y és z szerint is deriválva egy-egy konstanst kapunk. Azonnal látszik, hogy az $U(x,y,z) = -E_x \cdot x - E_y \cdot y - E_z \cdot z$ függvény jó választás, hiszen ez mind a három fenti egyenletet kielégíti:

$$-\boldsymbol{\nabla} U(x,y,z) = -\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(-E_x \cdot x - E_y \cdot y - E_z \cdot z) \tag{1-4}$$

$$= (E_x,E_y,E_z) = \mathbf{E} \ . \tag{1-5}$$

Azonban vegyük észre azt is, a fent megadott potenciálfüggvényhez egy tetszőleges konstanst hozzáadhatok, a gradiens nem fog megváltozni, hiszen egy konstans deriváltja nulla. A lehető legáltalánosabb megoldás:

$$U(x,y,z) = -E_x \cdot x - E_y \cdot y - E_z \cdot z + C = -\mathbf{E}\mathbf{r} + C \ . \tag{1-6}$$

2. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{E}(x,y,z) = a(y\mathbf{i}+x\mathbf{j})$ elektromos erőtér potenciálját, ha a állandó, $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ pedig az x és y tengely irányába mutató egységvektorok!

Megoldás:

A potenciálfüggvény definíciója alapján a keresett $V(x,y,z)$ függvénynek olyannak kell lenni, amely kielégíti az alábbi egyenleteket:

$$ay = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} \tag{2-1}$$

$$ax = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} \tag{2-2}$$

$$0 = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \ . \tag{2-3}$$

Ezek az egyenletek most kicsit bonyolultabbak, mint a homogén esetben. Kezdjük megoldani ezeket az egyenleteket szépen sorban. Integráljuk az elsőt x szerint:

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = -ay \tag{2-4}$$

$$\int \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\,\mathrm{d}x = -\int ay\,\mathrm{d}x \tag{2-5}$$

$$V(x,y,z) = -axy + C_1(y,z)\ , \tag{2-6}$$

ahol a $C_1(y,z)$ egy integrálási konstans. Határozatlan integrálásnál egy konstans mindig megjelenik, ám itt a konstans még függhet a másik két koordinátától, hiszen ha deriváljuk a (2-6) egyenleteben szereplő $V(x,y,z)$-t x szerint parciálisan, akkor kielégítjük azt az egyenletet, amiből kiindultunk, a parciális deriválásnál minden csak y-tól és z-től függő tag kiesik.

A (2-6) potenciál akkor ezek szerint kielégíti a (2-1) egyenletet. Most nézzük a (2-2) egyenletet. Ebbe már a (2-6) egyenletben szereplő potenciált helyettesítjük be:

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = -ax \tag{2-7}$$

$$\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 0 \tag{2-8}$$

$$C_1(y,z) = C_2(z)\ , \tag{2-9}$$

hiszen ha a $C_1(y,z)$ függvény y szerinti deriváltja nulla, akkor az csak z-től függhet. Visszahelyettesítve a (2-6) képletbe:

$$V(x,y,z) = -axy + C_2(z)\ , \tag{2-10}$$

amely már a (2-1) és a (2-2) egyenletet is kielégíti.

A harmadik komponenssel is hasonlóan járunk el:

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = 0 \tag{2-11}$$

$$\frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = 0 \tag{2-12}$$

$$C_2(z) = C\ , \tag{2-13}$$

ahonnan láthatjuk, hogy a $C_2(z)$ egy konstans, ami már semmitől sem függ. Tehát a potenciál:

$$V(x,y,z) = -axy + C\ . \tag{2-14}$$

Ha ennek a gradiensét képezzük, akkor valóban elő lehet állítani a megadott térerősséget. Az is látszik, hogy a potenciál egy konstansban bizonytalan. Ez mindig így van, a potenciálfüggvény egy számmal mindig eltolható.

3. feladat: Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{E}(x,y,z) = a(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$ elektromos erőtérnek nincsen potenciálja $a \neq 0$ esetén, tehát nem lehet álló töltések által keltett erőtér!

Megoldás:

Egy térerősséghez akkor és csak akkor tartozik potenciál, ha a térerősség rotációmentes, vagyis $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$. A feladatban megadott térerősség rotációja:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay & -ax & 0 \end{vmatrix} \tag{3-1}$$

$$= \left(0 - \frac{\partial(-ax)}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{i} - \left(0 - \frac{\partial(ay)}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial(-ax)}{\partial x} - \frac{\partial ay}{\partial y}\right) \cdot \mathbf{k} \tag{3-2}$$

$$= 2a\mathbf{k}\ . \tag{3-3}$$

Ez nem nulla, ha $a \neq 0$, vagyis a térerősség nem rotációmentes, azaz nem lehet potenciálfüggvényt sem megadni.

4. feladat: Tegyük fel, hogy a térben a térfogati töltéssűrűség csak az x–y síktól mért távolságtól függ, tehát $\varrho(x,y,z) = f\big(|z|\big)$ valamilyen f függvényre. Fejezzük ki f segítségével a potenciált a tér minden pontjában!

Megoldás:

Használjuk fel a 3. feladatsor 6. feladatának eredményét. Ott kiszámoltuk, hogy ebben az esetben a térerősség

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^z \varrho(z')\,\mathrm{d}z' \cdot \mathrm{sgn}(z) \cdot \mathbf{e}_z\ . \tag{4-1}$$

A töltéselrendezés szimmetriája miatt a potenciál is szimmetrikus lesz az x–y síkra, vagyis $U(z) = U(|z|)$. A potenciál a $z > 0$ tartományban

$$U(z) = U(0) - \int_0^z \mathbf{E}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\ , \tag{4-2}$$

ahol az integrálás egy olyan úton megy végig, amelyik a $z' = 0$ magasságban kezdődik, és $z' = z$ magasságig jut. Sok ilyen integrálási út létezik, azonban a potenciálelmélet alaptétele kimondja, hogy a potenciál értéke független ettől az integrálási úttól, az csak a kezdeti és a végponttól függ. Válasszuk akkor ezt az utat úgy, hogy az integrálás a lehető legegyszerűbb legyen: haladjuk a z tengellyel párhuzamosan.

$$U(z) = U(0) - \int_0^z \mathbf{E}(\mathbf{r}')\mathbf{e}_z \mathrm{d}z' = U(0) - \int_0^z \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{z'} \varrho(z'')\,\mathrm{d}z'' \cdot \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z}_{=1} \mathrm{d}z' \tag{4-3}$$

Válasszuk a potenciál referenciapontjának az x–y síkot, vagyis rögzítsük az $U(z=0) = 0$-t. A megoldás így:

$$U(z) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^z \int_0^{z'} \varrho(z'')\,\mathrm{d}z''\mathrm{d}z'\ . \tag{4-4}$$

5. feladat: Legyen a térfogati töltéssűrűség olyan, hogy az csak a z tengelytől mért távolság függvénye, azaz $\varrho(x,y,z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ valamilyen f függvényre. Adjuk meg a potenciált a tér minden pontjában.

Megoldás:

A megoldás menete nagyon hasonló az előző feladat megoldásához. Itt is emlékezzünk vissza a 3. feladatsor 7. feladatának eredményére:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_0^r r'\varrho(r')\,\mathrm{d}r' \cdot \mathbf{e}_r\,. \tag{5-1}$$

A potenciált itt is definíció szerint számoljuk. A potenciál nullpontját a forgástengely mentén ($r = 0$) rögzítjük, és a szimmetria miatt sugárirányban integrálunk:

$$\begin{aligned} U(r) &= \underbrace{U(0)}_{=0} - \int_0^r \mathbf{E}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}' = -\int_0^r \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\int_0^{r'} r''\varrho(r'')\,\mathrm{d}r'' \cdot \underbrace{(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r)}_{=1}\,\mathrm{d}r' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{1}{r'}\int_0^{r'} r''\varrho(r'')\,\mathrm{d}r''\,\mathrm{d}r'\,. \end{aligned} \tag{5-2}$$

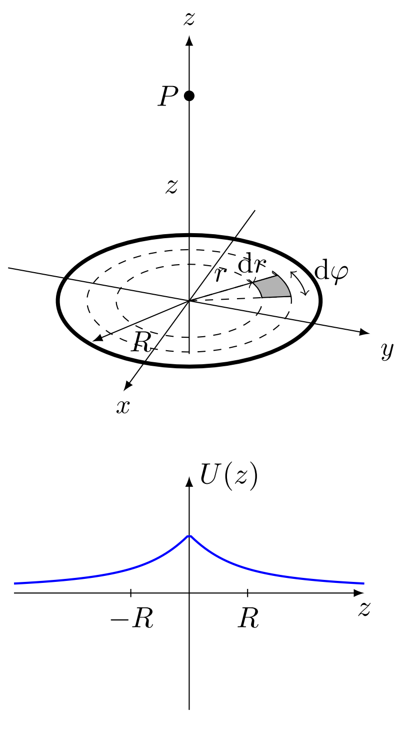
6. feladat: Tegyük fel, hogy a térben a térfogati töltéssűrűség gömbszimmetrikus, tehát csak az origótól mért távolságtól függ, vagyis $\varrho(x,y,z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ alakú. Hogyan fejezhető ki a potenciál f segítségével?

Megoldás:

Az előző feladathoz teljesen hasonló módon járunk el. A potenciál nullpontját itt az origóban célszerű rögzíteni. Az eredmény:

$$U(r) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{1}{(r')^2}\int_0^{r'} (r'')^2\varrho(r'')\,\mathrm{d}r''\,\mathrm{d}r'\,. \tag{6-1}$$

7. feladat: R sugarú szigetelő körlemezre Q töltést viszünk fel egyenletes felületi töltéssűrűséget kialakítva. A kör középpontja felett, a kör síkjától z távolságra mekkora a potenciál? Mekkora itt a térerősség?



7-A. ábra

Megoldás:

A feladat megoldásához felhasználjuk azt, hogy a kiterjedt tölteseloszlást fel tudjuk osztani elemi töltésekre, és a töltésrendszer potenciálját meg tudjuk adni úgy, mint ezek az elemi töltések potenciáljának összege.

Dolgozzunk polárkoordináta-rendszerben. Osszuk fel a korongot $\mathrm{d}r$ széles és $\mathrm{d}\varphi$ szög alatt látszódó darabokra. Ekkor a φ szög 0-tól 2π-ig futhat, míg a sugár 0 és R között változhat. Egy ilyen kis darab területe: $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, vagyis töltése: $\mathrm{d}q = \mathrm{d}A\cdot\sigma = \mathrm{d}A\cdot\frac{Q}{R^2\pi} = \frac{Q}{R^2\pi}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$.

Az (r,φ) helyen lévő $\mathrm{d}q$ nagyságú ponttöltés potenciálja a P pontban:

$$\mathrm{d}U(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{r^2+z^2}}\,. \tag{7-1}$$

Az összes ponttöltés járulékának összege adja a teljes potenciált. Ne felejtsük, hogy a potenciál skalármennyiség (a tér minden pontjában egy szám, nem vektor), vagyis a járulékok összege is egy szám lesz.

$$U(z) = \int\limits_{\text{korong}} \mathrm{d}U(z) = \int\limits_{\text{korong}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2\pi} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{7-2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2\pi} \int\limits_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2\pi} \left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^R \tag{7-3}$$

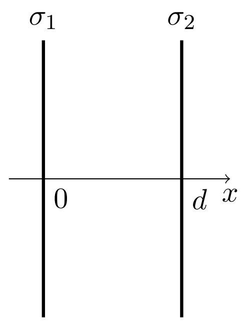
$$= \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2\pi} \left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right) . \tag{7-4}$$

A térerősség vektor a potenciál definíciójából előáll. Most $U(z)$ csak a z koordinátától függ, így a térerősségnek is csak z irányú komponense lesz a deriválások miatt.

$$E_z(z) = -\frac{\partial U(z)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2\pi} \left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)\right) \tag{7-5}$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2\pi} \left(\operatorname{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) . \tag{7-6}$$

8. feladat: Egymástól $d = 10\,\mathrm{cm}$ távolságban lévő, végtelen kiterjedésű párhuzamos síkok felületi töltéssűrűsége $\sigma_1 = 3\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}$ és $\sigma_2 = 7\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}$. Mekkora a vezetők közötti potenciálkülönbség?



8-A. ábra

Megoldás:

Először számoljuk ki, hogy egy síklapnak mi a potenciálja. Azt tudjuk, hogy a térerősség nagysága $E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, ahol σ a fémlap felületi töltéssűrűsége. Mivel a térerősség a laptól elfelé mutat, azért ha az irányt is bele szeretnénk foglalni a kifejezésbe, akkor $E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\operatorname{sgn} x$-et írhatunk, ahol az sgn függvény az x változó előjelét adja meg.

Ehhez a térerősséghez nagyon egyszerűen tudunk potenciált találni. A sgn függvény az abszolútérték-függvény deriváltja, hiszen annak meredeksége -1 a negatív féltengelyen és $+1$ a pozitívon. Így:

$$U(x) = -\int E(x)\mathrm{d}x = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x| + C . \tag{8-1}$$

A két sík által létrehozott potenciál tehát:

$$U_1(x) = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}|x| , \qquad U_2(x) = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}|x-d| . \tag{8-2}$$

Innen a teljes potenciálfüggvény: $U(x) = U_1(x) + U_2(x)$, és a két lap közötti potenciálkülönbség:

$$U(d) - U(0) = U_1(d) + U_2(d) - \big(U_1(0) + U_2(0)\big) \tag{8-3}$$

$$= -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}d + 0 - \left(0 - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}d\right) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0}d . \tag{8-4}$$

9. feladat: A $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ térrészben a potenciál

$$U(x,y,z) = U_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}y} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}y}\right)$$

alakú, ahol U_0 és a állandók. Mi ebben a térrészben a térerősség? Mennyi töltés van a térrészen belüli $0 \le z \le L$ négyzetes oszlopban?

Megoldás:
A térerősség a potenciál negatív gradiense, vagyis

$$\mathbf{E}(x,y,z) = -\boldsymbol{\nabla} U(x,y,z) = -\left(\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right) , \tag{9-1}$$

ahol

$$-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = U_0 \frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}y} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}y}\right) \tag{9-2}$$

$$-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = U_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}}\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}y} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}\left(-\frac{\pi}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}y}\right) \tag{9-3}$$

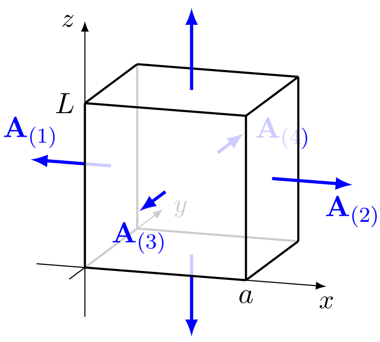
$$-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = 0 , \tag{9-4}$$

azaz

$$\mathbf{E}(x,y,z) \tag{9-5}$$
$$= -U_0\frac{\pi}{a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}y} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}y}\right),\right. \tag{9-6}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}y} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}y}\right), \tag{9-7}$$
$$\left. 0 \right] . \tag{9-8}$$

A térrészen belüli töltés kiszámolásához használjuk a Gauss-tételt. Ismerjük a téglatest határain a térerősséget, így a fluxust közvetlenül ki tudjuk számolni, amely a Gauss-tétel értelmében megegyezik a bent található töltés mennyiségével.

Mivel a térerősségnek nincsen z komponense, így a téglatest alsó és felső síkján nincsen fluxusjárulék, hiszen ott merőlegesek az $\mathbf{E}$ és a $\mathrm{d}\mathbf{A}$ vektorok. A többi négy oldalt az



9-A. ábra

$$(1):\begin{cases} x = 0 \\ 0 < y < a \\ 0 < z < L \end{cases} \qquad (2):\begin{cases} x = a \\ 0 < y < a \\ 0 < z < L \end{cases} \tag{9-9}$$

$$(3):\begin{cases} 0 < x < a \\ y = 0 \\ 0 < z < L \end{cases} \qquad (4):\begin{cases} 0 < x < a \\ y = a \\ 0 < z < L \end{cases} \tag{9-10}$$

egyenletek határozzák meg.

Az első kettő lap esetén a felület normálisa $\mathbf{e}_x$ irányú, így a skaláris szorzás után csak az elektromos tér x komponense marad meg. Ezen a két felületen az integrálás során az x koordináta végig 0, illetve az a értéket veszi fel:

- Az (1)-es felületen: $\mathrm{d}\mathbf{A}_{(1)} = -\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathbf{e}_x$, így:

$$\Phi_{(1)} = \int_{(1)} \mathbf{E}(x=0,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{A} \tag{9-11}$$

$$= \int_0^a \int_0^L -U_0 \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}y} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}y} \right) \mathbf{e}_x (-\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathbf{e}_x) \tag{9-12}$$

$$= U_0 \frac{\pi}{a} \underbrace{\int_0^L \mathrm{d}z}_{L} \int_0^a \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}y} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}y} \right) \mathrm{d}y \tag{9-13}$$

$$= U_0 L \left(\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} + \frac{\mathrm{e}^{-\pi}-1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \right) = -U_0 L\ . \tag{9-14}$$

- A (2)-es felületen: $\mathrm{d}\mathbf{A}_{(2)} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathbf{e}_x$, azaz

$$\Phi_{(2)} = \int_{(1)} \mathbf{E}(x=a,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{A} \tag{9-15}$$

$$= \int_0^a \int_0^L U_0 \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}y} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}y} \right) \mathbf{e}_x (\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathbf{e}_x) \tag{9-16}$$

$$= -U_0 L\ . \tag{9-17}$$

- A (3)-as felületen $\mathrm{d}\mathbf{A}_{(3)} = -\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathbf{e}_y$, tehát:

$$\Phi_{(3)} = \int \mathbf{E}(x,y=0,z)\,\mathrm{d}\mathbf{A} \tag{9-18}$$

$$= \int_0^a \int_0^L -U_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \right) \mathbf{e}_y (-\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathbf{e}_y) \tag{9-19}$$

$$= U_0 \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \right) \underbrace{\int_0^L \mathrm{d}z}_{L} \underbrace{\int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x}_{2\frac{a}{\pi}} \tag{9-20}$$

$$= 2U_0 L \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \right)\ . \tag{9-21}$$

- Az utolsó esetben $\mathrm{d}\mathbf{A}_{(4)} = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathbf{e}_y$, vagyis:

$$\Phi_{(4)} = \int \mathbf{E}(x,y=a,z)\,\mathrm{d}\mathbf{A} \tag{9-22}$$

$$= \int_0^a \int_0^L -U_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \left(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} - \frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \right) \mathbf{e}_y (\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathbf{e}_y) \tag{9-23}$$

$$= -U_0 \frac{\pi}{a} \left(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} - \frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \right) \underbrace{\int_0^L \mathrm{d}z}_{L} \underbrace{\int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x}_{2\frac{a}{\pi}} \tag{9-24}$$

$$= -2U_0 L \left(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} - \frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \right)\ . \tag{9-25}$$

Ezek összege adja a teljes fluxust, amelyből az össztöltés:

$$Q_{\text{össz}} = \varepsilon_0 \Phi_{\text{kocka}} = \varepsilon_0 \left(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)} + \Phi_{(3)} + \Phi_{(4)}\right) \tag{9-26}$$

$$= -2\varepsilon_0 U_0 L + 2\varepsilon_0 U_0 L \left(\frac{1-\mathrm{e}^{\pi}}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} - \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}\right) \tag{9-27}$$

$$= -2\varepsilon_0 U_0 L + 2\varepsilon_0 U_0 L \frac{-2\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi} + 2\mathrm{e}^{-\pi} + \mathrm{e}^{2\pi}}{2 - \mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}} \tag{9-28}$$

10. feladat: Legyen a térben a potenciál a következő:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{pr}}{r^3}$$

ahol $\mathbf{p}$ konstans vektor, $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ és $r = |\mathbf{r}|$. Mi lesz az elektromos térerősség az origón kívül?

Megoldás:

A térerősség kiszámításához a feladatban megadott potenciálfüggvény gradiensét kell kiszámolni. A gradiensképzés során a függvényt az x, az y és a z koordináták szerint kell parciálisan deriválni.

Az integrál közvetlen kiszámítása helyett próbáljunk kicsit általánosabbak lenni. Mivel az $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ mennyiség valamilyen hatványát kell deriválnunk, ezért az r^n-t fogjuk deriválni. Vegyük észre, hogy a koordináták felcserélhető módon helyezkednek el a kifejezésben. Ha tudjuk pl. azt, hogy mi az x szerinti derivált, akkor az y szerinti derivált ugyanaz lesz, csak az x-et és az y-t fel kell cserélni. Deriváljunk az egyik (most az x) koordináta szerint:

$$\frac{\partial r^n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}} \tag{10-1}$$

$$= \frac{n}{2}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1}\cdot 2x = nx\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1}. \tag{10-2}$$

$$= nx\cdot r^{n-2}. \tag{10-3}$$

Így tehát r^n gradiense:

$$\boldsymbol{\nabla}\, r^n = \frac{\mathrm{d}r^n}{\mathrm{d}\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial r^n}{\partial x}, \frac{\partial r^n}{\partial y}, \frac{\partial r^n}{\partial z}\right) = n\,(x,y,z)\, r^{n-2} = n\cdot r^{n-2}\cdot\mathbf{r}. \tag{10-4}$$

A térerősség ebben a konkrét esetben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\, U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mathbf{pr}}{r^3}\right) \tag{10-5}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{pr})\right)\frac{1}{r^3} + (\mathbf{pr})\,\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r^3}\right), \tag{10-6}$$

ahol felhasználtuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát. Az első tag:

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{pr}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(p_x x + p_y y + p_z z) = (p_x, p_y, p_z) = \mathbf{p}, \tag{10-7}$$

a másodikra pedig használhatjuk az előbb levezetett azonosságot:

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r^3} = \boldsymbol{\nabla}\, r^{-3} = -3\cdot r^{-5}\mathbf{r} = -\frac{3}{r^5}\mathbf{r}. \tag{10-8}$$

Így

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}. \tag{10-9}$$

Megjegyzés: ez a potenciál és ez a térerősség a $\mathbf{p}$ dipólmomentummal rendelkező dipólus tere.