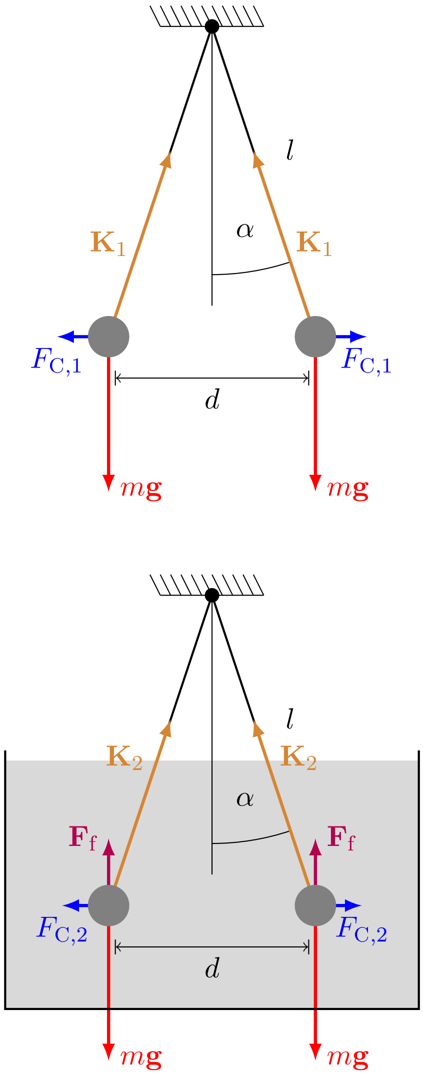
Utolsó módosítás: 2015. február 28., 10:41

Fizika A2E, 4. feladatsor

Vida György József
vidagyorgy@gmail.com

1. feladat: Közös pontban azonos hosszúságú szigetelő fonalakon felfüggesztett egyforma, ϱ_g sűrűségű golyók függnek, mindkettő töltése q. A golyók közötti teret ε_r relatív permittivitású, ϱ_f sűrűségű folyadékkal töltjük ki, eközben a fonalak közötti szög nem változik. Mekkora a golyók sűrűsége?



1-A. ábra

Megoldás:

Mind a két esetben a testek szimmetrikusan helyezkednek el, így elég, ha csak mindig a bal oldali testet vizsgáljuk. Az első esetben a Newton-törvény x és y irányban:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= K_1 \sin\alpha - F_{\mathrm{C},1} \\ 0 &= K_1 \cos\alpha - mg \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{C},1} = mg \operatorname{tg}\alpha = V_{\mathrm{g}}\varrho_{\mathrm{g}} g \operatorname{tg}\alpha\ . \tag{1-1}$$

A második esetben

$$\left.\begin{aligned} 0 &= K_2 \sin\alpha - F_{\mathrm{C},2} \\ 0 &= K_2 \cos\alpha - mg + F_{\mathrm{f}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{C},2} = (mg - F_{\mathrm{f}}) \operatorname{tg}\alpha = V_{\mathrm{g}}(\varrho_{\mathrm{g}} - \varrho_{\mathrm{f}}) g \operatorname{tg}\alpha\ . \tag{1-2}$$

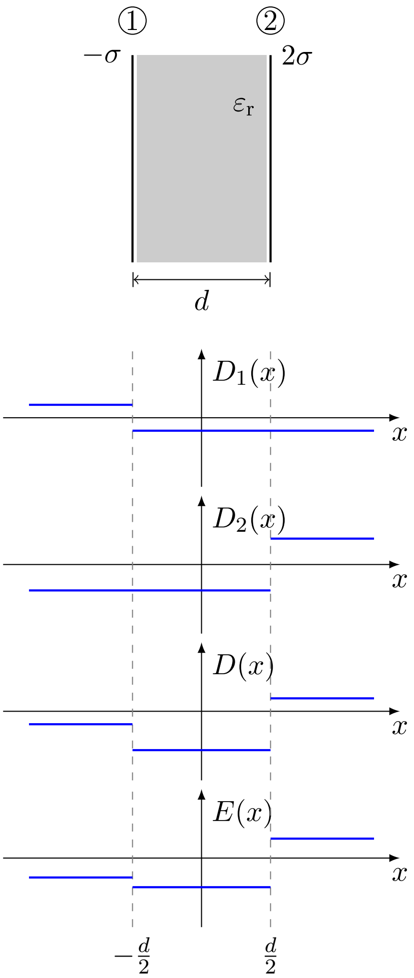
A két összefüggésből $\operatorname{tg}\alpha$ kifejezve, majd azok egyenlővé téve, illetve a Coulomb-erő behelyettesítve:

$$\frac{F_{\mathrm{C},1}}{V_{\mathrm{g}}\varrho_{\mathrm{g}} g} = \frac{F_{\mathrm{C},2}}{V_{\mathrm{g}}(\varrho_{\mathrm{g}} - \varrho_{\mathrm{f}}) g} \tag{1-3}$$

$$\frac{F_{\mathrm{C},1}}{F_{\mathrm{C},2}} = \frac{\varrho_{\mathrm{g}}}{\varrho_{\mathrm{g}} - \varrho_{\mathrm{f}}} \tag{1-4}$$

$$\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}\frac{q^2}{d^2}} = \varepsilon_{\mathrm{r}} = \frac{\varrho_{\mathrm{g}}}{\varrho_{\mathrm{g}} - \varrho_{\mathrm{f}}} \tag{1-5}$$

$$\varrho_{\mathrm{g}} = \varrho_{\mathrm{f}} \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1}\ . \tag{1-6}$$



2-A. ábra

2. feladat: Két párhuzamos, a közöttük lévő távolsághoz képest nagy kiterjedésű lemez egymástól $d = 2\,\mathrm{cm}$ távolságra helyezkedik el. Az egyik lemezen $\sigma_1 = -10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}$, a másikon $\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}$ a töltéssűrűség. A közöttük lévő teret $\varepsilon_r = 2$ relatív permittivitású közeg tölti ki. Határozza meg az elektromos térerősség és az elektromos eltolás irányát és nagyságát a lemezek között és a lemezen kívül!

Megoldás:

Azt tudjuk korábbról, hogy egy σ felületi töltéssűrűséggel rendelkező lap térerősségének nagysága $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}$, amely a laptól elfelé mutat. A dielektromos eltolás nagysága $D = \varepsilon_0\varepsilon_r E = \frac{\sigma}{2}$, melynek iránya megegyezik a térerősség irányával.

Ezeket a mennyiségeket felírva az egyes tartományokra, majd ezeket összeadva:

$$D_1(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} & x < -\frac{d}{2}\,, \\ -\frac{\sigma}{2} & x > -\frac{d}{2}\,, \end{cases} \tag{2-1}$$

$$D_2(x) = \begin{cases} -\sigma & x < \frac{d}{2}\,, \\ \sigma & x > \frac{d}{2}\,, \end{cases} \tag{2-2}$$

$$D(x) = D_1(x) + D_2(x) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2} & x < -\frac{d}{2}\,, \\ -\frac{3\sigma}{2} & -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}\,, \\ \frac{\sigma}{2} & \frac{d}{2} < x\,, \end{cases} \tag{2-3}$$

$$E(x) = \frac{D(x)}{\varepsilon_0\varepsilon_r(x)} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & x < -\frac{d}{2}\,, \\ -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} & -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}\,, \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \frac{d}{2} < x\,. \end{cases} \tag{2-4}$$

Az egyes mennyiségek előjele adja meg azok irányát: a pozitív előjel azt jelenti, hogy a vektor a $+x$ irányba mutat, a negatív pedig, hogy a $-x$ irányba.

3. feladat: Egymástól $4\,\mathrm{cm}$ távolságra lévő fémsíkok között olyan dielektrikum van, amelynek relatív permittivitása lineárisan változik 1-től 2-ig. A lemezek ellentétesen töltöttek, és a töltéssűrűség abszolút értéke a lemezeken $\sigma = 4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}$. Hogyan változik a térerősség és az elektromos eltolás a síkok között?

Megoldás:

Először a relatív dielektromos állandó helyfüggését kell függvény alakban megadnunk. Azt tudjuk, hogy $x = -\frac{d}{2}$-ben $\varepsilon_r(x) = 1$, és $x = \frac{d}{2}$-ben $\varepsilon_r(x) = 2$, és az a kettő között lineárisan változik. Erre a két pontra kell tehát egyenest illesztenünk. Az egyenes általános alakban felírt egyenlete: $\varepsilon_r(x) = A \cdot x + B$. Behelyettesítve ebbe a két ismert pontot:

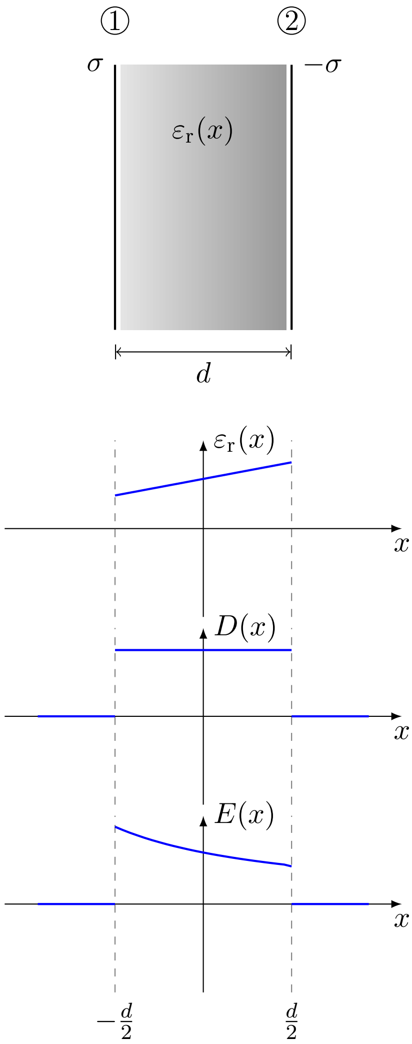
$$\left.\begin{aligned} 1 &= A \cdot \left(-\tfrac{d}{2}\right) + B \\ 2 &= A \cdot \left(\tfrac{d}{2}\right) + B \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{d} \qquad B = \frac{3}{2}\,. \tag{3-1}$$

A megfelelő a mennyiségeket felírva az egyes tartományokra:

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{d}{2} \\ \frac{1}{d} \cdot x + \frac{3}{2} & -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ 1 & x > \frac{d}{2} \end{cases} \tag{3-2}$$

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{d}{2} \\ \sigma & -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ 0 & x > \frac{d}{2} \end{cases} \tag{3-3}$$

$$E(x) = \frac{D(x)}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}(x)} = \begin{cases} 0 & x < -\frac{d}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\sigma}{\frac{1}{d}\cdot x + \frac{3}{2}} & \frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ 0 & x > \frac{d}{2} \end{cases} \tag{3-4}$$



3-A. ábra

4. feladat: R_1 =10 cm és R_2 =20 cm sugarú koncentrikus gömbök közötti teret $\varepsilon_r = 3$ relatív permittivitású szigetelő tölti ki. A belső gömbre Q töltést viszünk fel. Mekkora a szigetelőben a maximális térerősség? Hogyan változik az elektromos eltolás a középponttól való távolság függvényében?

Megoldás:

A Gauss-törvényt felhasználva fogjuk meghatározni az eltolásvektor sugárfüggését. A Gauss-törvény:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = \iiint_V \rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} = Q_\mathrm{in}\ , \tag{4-1}$$

ahol a bal oldalon a $\mathbf{D}$ dielektromos eltolás V térfogat határára vett felületi integrálja áll, míg a jobb oldalon az elektromos töltéssűrűség V térfogatra vett térfogati integrálja található. Ahhoz, hogy a fenti egyenletet ki tudjuk értékelni, egy megfelelő V Gauss-térfogatot kell választani. Ahhoz pedig, hogy ezt ügyesen válasszunk meg, érdemes megnézni a rendszer szimmetriáit.

Értelemszerűen a rendszer gömbszimmetrikus. Ez súlyos következményekkel van arra vonatkozóan, hogy milyen alakú lehet a $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ függvény.

- Ha gömbi koordináta-rendszerben gondolkodunk, akkor a $\mathbf{D}$ vektor az r, a ϑ és a φ mennyiségektől függhet. A gömbszimmetria miatt azonban mindegy, hogy milyen szögnél nézzük a dielektromos eltolást, így $\mathbf{D}$ valójában csak r-től függhet.

- Emellett pedig a rendszernek minden olyan síkja tükörsík, amely átmegy a középponton. Ennek az a következménye, hogy a $\mathbf{D}$ csak sugárirányú lehet. Ez onnan látszik, hogy ha nem sugárirányú lenne, akkor van olyan tükörsík, amelyre nem esik rá ez a vektor. Ekkor viszont a vektor és a tükörképe nem ugyanaz. De ez ellentmondás, hiszen ha a rendszert tükrözzük a tükörsíkjára, akkor az eredeti rendszert kell látnunk.

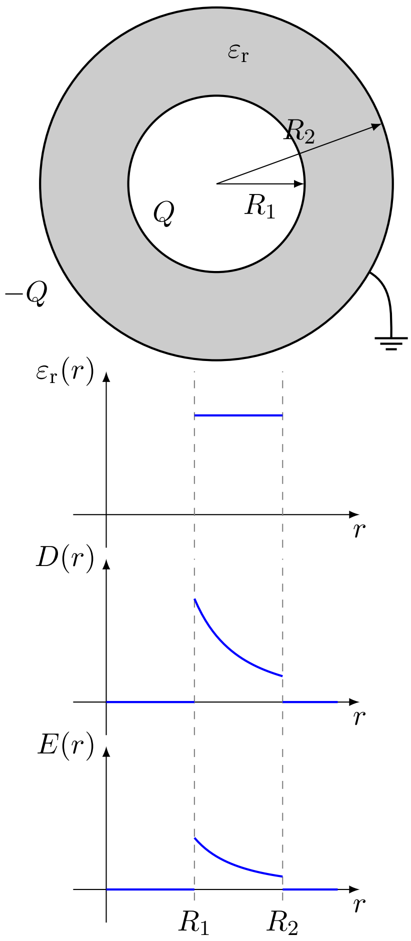
Tehát valójában $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D(r) \cdot \mathbf{e}_\mathrm{r}$, ahol $\mathbf{e}_\mathrm{r}$ a gömb középpontjától elfelé mutató egységvektor.

Ez alapján tehát érdemes egy olyan r sugarú, gömb alakú Gauss-felületet választani, amelynek a közepe megegyezik a rendszer középpontjával. Ekkor ugyanis a Gauss-felület minden pontjára merőleges lesz a $\mathbf{D}$, illetve a felületen a $\mathbf{D}$ nagysága állandó lesz.

A Gauss-törvényt három tartományra tudjuk felírni.

$r < R_1$**:** Ekkor a Gauss-felület nem tartalmaz töltést ($Q_\mathrm{in} = 0$), így

$$0 = \iint_{\partial V} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = \iint_{\partial V} D(r)\,\mathrm{d}^2 f = D(r) \iint_{\partial V} \mathrm{d}^2 f = D(r) 4 r^2 \pi \tag{4-2}$$



4-A. ábra

$$D(r) = 0 \tag{4-3}$$

$R_1 < r < R_2$**:** A Gauss-gömbön belül Q töltés van, így

$$Q = D(r)4r^2\pi \qquad \Rightarrow \qquad D(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2} . \tag{4-4}$$

$R_2 < r$**:** A földelés miatt a külső fémgömbön felhalmozódott $-Q$ töltés, így a Gauss-gömbön belül $Q - Q = 0$ töltés van. Ekkor szintén

$$D(r) = 0 . \tag{4-5}$$

Összefoglalva:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & r < R_1, \\ \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2} & R_1 < r < R_2, \\ 0 & R_2 < r, \end{cases} \tag{4-6}$$

ahonnan

$$E(x) = \frac{D(x)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(x)} = \begin{cases} 0 & r < R_1, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2} & R_1 < r < R_2, \\ 0 & R_2 < r. \end{cases} \tag{4-7}$$

5. feladat: Két koaxiális, igen hosszú fémhenger sugarai $R_1 = 2\,\mathrm{cm}$ és $R_3 = 8\,\mathrm{cm}$. A közöttük lévő teret kétféle szigetelő anyag tölti ki úgy, hogy a határfelület a fémhengerekkel koaxiális, $R_2 = 4\,\mathrm{cm}$ sugarú hengerfelület. A belső szigetelő relatív permittivitása $\varepsilon_{1r} = 5$, a külsőé $\varepsilon_{2r} = 2$. A belső fémhengeren $\sigma = 4 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C/cm^2}$ felületi töltéssűrűség van. Mekkora az elektromos eltolás vektorának maximális értéke? Mekkora a maximális térerősség?

Megoldás:

A megoldáshoz szintén a Gauss-törvényt fogjuk használni. Most nem vezetjük végig az előző feladatban részletesen bemutatott gondolatmenetet, de itt is hasonlóan kell eljárnunk. Értelemszerűen ez feladat hengerszimmetrikus. Itt a dielektromos eltolás mindenhol a hengerek tengelyére merőleges és attól elfelé mutat. A megfelelő Gauss-felület itt egy henger lesz, melynek sugara négy tartományra eshet:

$r < R_1$**:** Itt a $D(r) = 0$.

$R_1 < r < R_2$**:** Legyen l hosszú a Gauss-henger. Ez a felső hengernek $A = 2\pi R_1 \cdot l$ nagyságú felületét tartalmazza, vagyis $Q_{\text{in}} = \sigma \cdot A = \sigma 2\pi R_1 l$. A $\mathbf{D}$ felületi integrálja:

$$\iint\limits_{\text{henger}} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = \iint\limits_{\text{hengerpalást}} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} + 2\iint\limits_{\text{alaplap}} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} , \tag{5-1}$$

ahol az alaplapra vett integrál nulla, hiszen ott a felületvektor merőleges a $\mathbf{D}$-re, így

$$\iint\limits_{\text{henger}} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = \iint\limits_{\text{hengerpalást}} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = \iint\limits_{\text{hengerpalást}} D(r)\,\mathrm{d}^2 f \tag{5-2}$$

$$= D(r) \iint\limits_{\text{hengerpalást}} \mathrm{d}^2 f = D(r) 2\pi r l \;, \tag{5-3}$$

vagyis

$$D(r) = \sigma \frac{R_1}{r} \;. \tag{5-4}$$

$R_2 < r < R_3$**:** Mivel ezen a tartományon is ugyanannyi töltést tartalmaz a Gauss-felület, így a megoldás itt ugyanaz, mint az $R_1 < r < R_2$ tartományon.

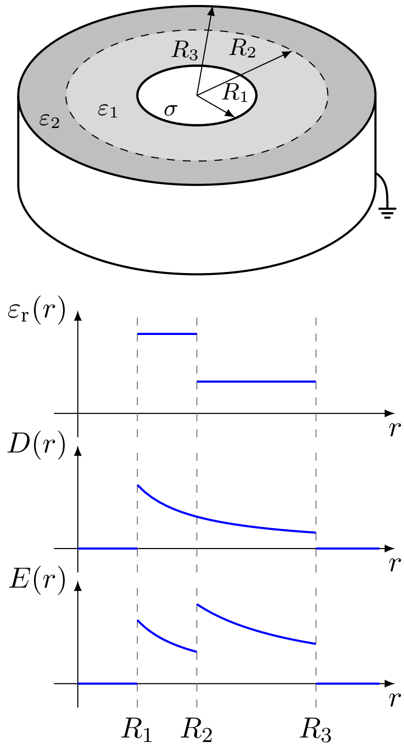
$R_3 < r$**:** A földelés miatt a külső fémhengeren negatív töltések halmozódnak fel. A felhalmozódott töltés mennyisége ugyanakkora lesz, mint a belső hengeren (emiatt persze a töltéssűrűség nem lesz ugyanakkora). Így összességében a Gauss-felületen belül az össztöltés nulla lesz, tehát $D(r) = 0$-t kapunk.

Összefoglalva:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \sigma \frac{R_1}{r} & R_1 < r < R_3 \\ 0 & R_3 < r \end{cases} \tag{5-5}$$

ahonnan

$$E(x) = \frac{D(x)}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}(x)} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \frac{R_1}{r} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} \frac{R_1}{r} & R_2 < r < R_3 \\ 0 & R_3 < r \end{cases} \tag{5-6}$$



5-A. ábra

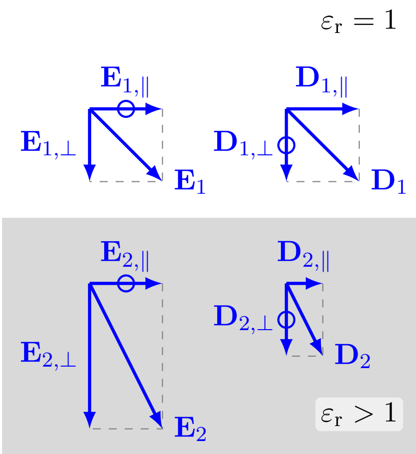
> **6. feladat:** Egy végtelen sík egyik oldalán vákuum van, a másikon ε_r relatív dielektromos állandójú szigetelő. A vákuumban a síktól d távolságra Q ponttöltést helyezünk. Milyen lesz az elektromos térerősség és az elektromos eltolás a térben?

Megoldás:

A megoldás a 2. feladatsor 9. feladatához hasonló lesz, itt is a tükörtöltések módszerét fogjuk használni, azonban itt ezt mind a két térrészre el kell végezni.

A fémlap esetében a határfeltétel kielégítése azt jelentette, hogy a térerősségek merőlegesnek kellett lennie arra. Dielektrikum határfelület esetében azt írhatjuk fel, hogy a dielektromos eltolás merőleges komponense ugyanaz a felület két oldalán, illetve a térerősség párhuzamos komponense halad át változatlanul:

$$\mathbf{D}_{\perp,1} = \mathbf{D}_{\perp,2} \;, \qquad \mathbf{E}_{\parallel,1} = \mathbf{E}_{\parallel,2} \;. \tag{6-1}$$



6-A. ábra

Ezt a két egyenletet kell majd kielégítenünk a feltételezett tükörtöltésekkel. A vákuumban lévő teret a fémlap esetéhez hasonlóan próbáljuk meg megadni az eredeti, $\mathbf{d} = (0{,}0{,}d)$ helyen lévő, q nagyságú töltés és egy, $\mathbf{d}' = (0{,}0,-d)$ helyen lévő, q' nagyságú töltés terének összegeként:

$$\mathbf{D}_{\text{vákuum}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|}(\mathbf{r}-\mathbf{d}) + \frac{1}{4\pi} \frac{q'}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}'|}(\mathbf{r}-\mathbf{d}') \tag{6-2}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{q}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z-d)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{q'}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z+d)\ . \tag{6-3}$$

A dielektrikumból csak az eredeti töltés látszik, ott nem várhatunk tükörtöltés megjelenését. Azonban a határfelületen felhalmozódott töltések miatt azt meg kell engedni, hogy a töltés értéke másnak látszódjon:

$$\mathbf{D}_{\mathrm{diel}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{q''}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|}(\mathbf{r}-\mathbf{d}) \tag{6-4}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\frac{q''}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z-d)\ . \tag{6-5}$$

A dielektromos eltolás merőleges (z irányú) komponensének egyenlősége a határfelület ($z=0$) két oldalán:

$$\left[\mathbf{D}_{\mathrm{vákuum}}\right]_z(z=0) = \left[\mathbf{D}_{\mathrm{diel}}\right]_z(z=0) \tag{6-6}$$
$$\frac{1}{4\pi}\frac{q}{\left(x^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot(-d) + \frac{1}{4\pi}\frac{q'}{\left(x^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot d$$
$$= \frac{1}{4\pi}\frac{q''}{\left(x^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot(-d) \tag{6-7}$$
$$q - q' = q''\ . \tag{6-8}$$

Illetve a térerősség párhuzamos irányú komponensének egyenlősége a két térrész határán:

$$\left[\mathbf{E}_{\mathrm{vákuum}}\right]_{x,y}(z=0) = \left[\mathbf{E}_{\mathrm{diel}}\right]_{x,y}(z=0) \tag{6-9}$$
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(x^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot(x,y) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{\left(x^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot(x,y)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}\frac{q''}{\left(x^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot(x,y) \tag{6-10}$$
$$q + q' = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\cdot q''\ . \tag{6-11}$$

A (6-8) és a (6-11) egyenletekből q és q' meghatározható:

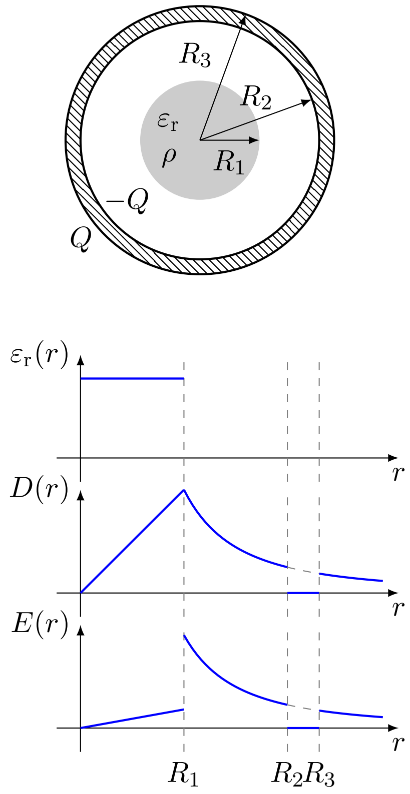
$$q' = \frac{1-\varepsilon_{\mathrm{r}}}{1+\varepsilon_{\mathrm{r}}}q \qquad\qquad q'' = \frac{2\varepsilon_{\mathrm{r}}}{1+\varepsilon_{\mathrm{r}}}q\ . \tag{6-12}$$

Mivel találtunk olyan q' és q'' paramétereket, amelyekkel a határfeltételek kielégíthetőek, így valóban felírható a vákuum térrészben a térerősség úgy, mint két ponttöltés terének az összege, a dielektrikum térrészében pedig úgy, mint egy ponttöltés tere.

7. feladat: $R_1 = 10\,\mathrm{cm}$ sugarú gömb térfogati töltéssűrűsége $\varrho = 300\,\mathrm{C/m^3}$, relatív permittivitása $\varepsilon_r = 5$. A gömböt körülveszi egy vele koncentrikus fém gömbhéj, amelynek sugarai $R_2 = 20\,\mathrm{cm}$ és $R_3 = 23\,\mathrm{cm}$. Ábrázolja a térerősség változását a középponttól mért távolság függvényében!

Megoldás:

A 4. feladat gondolatmenetét itt is végigvezethetjük. A Gauss-gömb sugara itt az alábbi tartományokba eshet:



7-A. ábra

$r < R_1$**:** Itt a Gauss-törvény egyik és másik oldala

$$\iiint\limits_{\text{gömb}} \varrho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \iiint\limits_{\text{gömb}} \varrho\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \varrho \iiint\limits_{\text{gömb}} \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \varrho\frac{4}{3}r^3\pi\,, \tag{7-1}$$

$$\iint\limits_{\text{gömb}} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = \iint\limits_{\text{gömb}} D(r)\,\mathrm{d}^2 f = D(r)\iint\limits_{\text{gömb}} \mathrm{d}^2 f \tag{7-2}$$

$$= D(r)4\pi r^2\,, \tag{7-3}$$

vagyis:

$$D(r) = \frac{\varrho}{3}r\,. \tag{7-4}$$

$R_1 < r < R_2$**:** Ezen a tartományon a Gauss-felület az egész szigetelő gömböt tartalmazza, vagyis $Q_\mathrm{in} = \varrho\frac{4}{3}R_1^3\pi (= Q)$. A felületi integrál az előző tartományhoz hasonlóan számítható, így

$$D(r)4\pi r^2 = \varrho\frac{4}{3}R_1^3\pi \tag{7-5}$$

$$D(r) = \frac{\varrho}{3}\frac{R_1^3}{r^2}\,. \tag{7-6}$$

$R_2 < r < R_3$**:** Ezen a tartományon a külső félgömbhéj belsejében vagyunk. Az ideális fém belsejében a térerősség és a dielektromos eltolás nulla. Ennek következménye az, hogy a gömbhéj belsejére $-Q$ töltésnek kell felhalmozódnia, hiszen a Gauss-törvény csak így teljesül. Mivel a fém nincs földelve, így a töltésmegmaradás miatt annak külsején Q töltés halmozódik fel.

$R_3 < r$**:** Itt is összesen $Q + Q - Q = Q$ töltés található a Gauss-felületen belül, vagyis a második tartományhoz hasonló megoldást kapjuk.

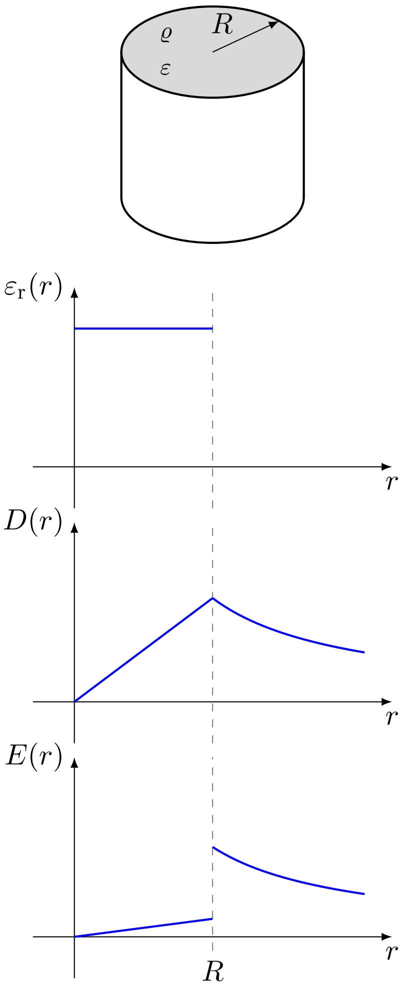
Összegfoglalva:

$$D(r) = \begin{cases} \frac{\varrho}{3}r & r < R_1 \\ \frac{\varrho}{3}\frac{R_1^3}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{\varrho}{3}\frac{R_1^3}{r^2} & R_3 < r \end{cases} \tag{7-7}$$

ahonnan

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}(r)} = \begin{cases} \frac{\varrho}{3\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}r & r < R_1 \\ \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} & R_3 < r \end{cases} \tag{7-8}$$

8. feladat: $R = 1\,\mathrm{cm}$ sugarú végtelen hosszú körhenger homogén, $\varepsilon_r = 5$ relatív permittivitású anyagból készült. A hengeren belül $\varrho = 5/3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C/m^3}$ tértöltés, a hengeren kívül vákuum van. Mekkora a térerősség a tengelytől 0,5 cm és 1,5 cm távolságban?



8-A. ábra

Megoldás:

Az 5. feladathoz hasonlóan itt is hengerszimmetrikus problémánk van. A megfelelő Gauss-felület egy l hosszú, a szigetelő hengerrel koaxiális henger alakú felület lesz. A henger sugara két tartományra eshet:

$r < R$**:** Itt a Gauss-törvény egyik és másik oldala

$$\iiint\limits_{\text{henger}} \varrho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \iiint\limits_{\text{henger}} \varrho\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \varrho \iiint\limits_{\text{henger}} \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \varrho r^2 \pi l\ , \tag{8-1}$$

$$\iint\limits_{\text{henger}} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = \iint\limits_{\text{palást}} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} + 2\underbrace{\iint\limits_{\text{alaplap}} \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f}}_{=0} = \iint\limits_{\text{henger}} D(r)\,\mathrm{d}^2 f \tag{8-2}$$

$$= D(r) \iint\limits_{\text{henger}} \mathrm{d}^2 f = D(r) 2r\pi l\ , \tag{8-3}$$

vagyis:

$$D(r) = \frac{\varrho}{2} r\ . \tag{8-4}$$

$R < r$**:** Ezen a tartományon a Gauss-felület az egész szigetelő hengert tartalmazza, vagyis $Q_\text{in} = \varrho \cdot R^2 \pi l$. A felületi integrál az előző tartományhoz hasonlóan számítható, így

$$D(r) 2r\pi l\ = \varrho \cdot R^2 \pi l \tag{8-5}$$

$$D(r) = \frac{\varrho}{2} \frac{R^2}{r}\ . \tag{8-6}$$

Összegfoglalva:

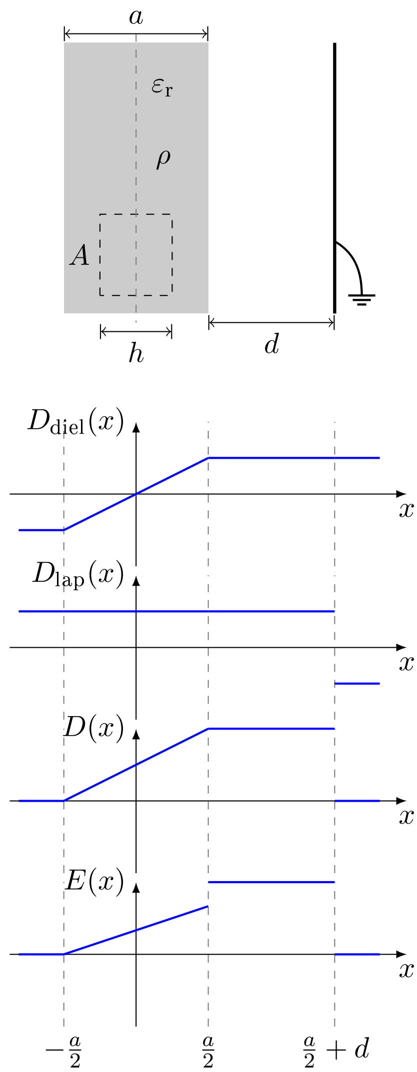
$$D(x) = \begin{cases} \frac{\varrho}{2} r & r < R \\ \frac{\varrho}{2} \frac{R^2}{r} & R < r \end{cases} \tag{8-7}$$

ahonnan

$$E(x) = \frac{D(x)}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}(x)} = \begin{cases} \frac{\varrho}{2\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} r & r < R \\ \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r} & R < r \end{cases} \tag{8-8}$$

A megfelelő sugárértékek behelyettesítésével megkapjuk a feladat kérdésére a közvetlen választ.

9. feladat: Két párhuzamos, egymástól $a = 2\,\mathrm{cm}$ távolságban lévő végtelen síklap közötti tartományt $\varrho = 10^{-5}\,\mathrm{C/m^3}$ töltéssűrűségű, $\varepsilon_r = 2$ relatív permittivitású anyag tölt ki. Az egyik síklaptól a másikkal ellentétes irányban $d = 8\,\mathrm{cm}$ távolságra egy, az előzőekkel párhuzamos földelt fémlap helyezkedik el. Hogyan változik a térerősség a síklapokra merőleges tengely mentén vett helyzet függvényében?



9-A. ábra

Megoldás:

Számoljuk ki először a szigetelő tartomány dielektromos eltolását. Ehhez vegyünk fel egy A alapterületű h magas hasábot, melynek tengelye merőleges a tartomány felületére és az szimmetrikusan helyezkedik el a tartomány belsejében. Ennek palástjával párhuzamos az eltolás, így a felületi integrál csak az alaplapokon fog járulékot adni. A Gauss-törvény felírva:

$h < a$:

$$D_\mathrm{diel}\left(\frac{h}{2}\right)\cdot A + D_\mathrm{diel}\left(-\frac{h}{2}\right)\cdot A = A\cdot h\cdot\varrho \tag{9-1}$$

$$D_\mathrm{diel}\left(\frac{h}{2}\right) = \varrho\cdot\frac{h}{2} \tag{9-2}$$

$$D(x) = \varrho x\ . \tag{9-3}$$

$a < h$:

$$D_\mathrm{diel}(x) = \varrho\frac{a}{2}\ . \tag{9-4}$$

A fémlap terének meghatározásához azt kell először meghatározni, hogy az mennyire töltődik fel. A töltéssemlegességet úgy tudja elérni, hogy a felületére akkora felületi töltéssűrűséget halmoz fel, mint amennyi töltés egy ugyanakkora felületű szigetelődarabon van. Így tehát $\sigma_\mathrm{lap} = -\varrho\frac{a}{2}$.

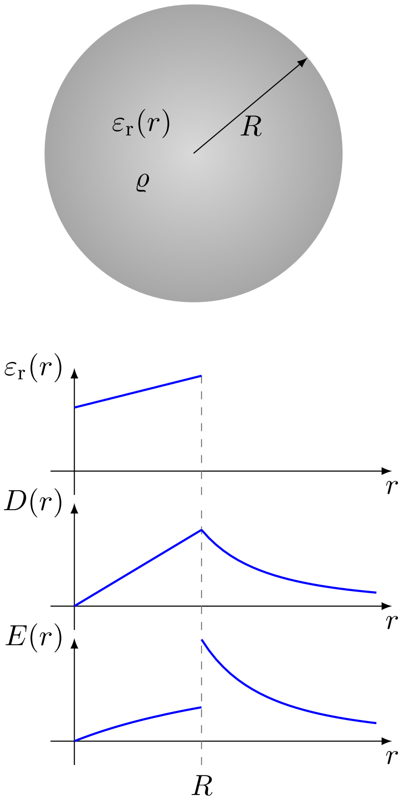
Összefoglalva

$$D_\mathrm{diel}(x) = \begin{cases} -\frac{\varrho a}{2} & x < -\frac{a}{2} \\ \varrho x & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \frac{\varrho a}{2} & \frac{a}{2} < x \end{cases} \tag{9-5}$$

$$D_\mathrm{lap}(x) = \begin{cases} \frac{\varrho a}{2} & x < d + \frac{a}{2} \\ -\frac{\varrho a}{2} & d + \frac{a}{2} < x \end{cases} \tag{9-6}$$

$$D(x) = D_\mathrm{diel}(x) + D_\mathrm{lap}(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{a}{2} \\ \varrho\left(x + \frac{a}{2}\right) & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \varrho a & \frac{a}{2} < x < d + \frac{a}{2} \\ 0 & d + \frac{a}{2} < x \end{cases} \tag{9-7}$$

$$E(x) = \frac{D(x)}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}(x)} = \begin{cases} 0 & x < -\frac{d}{2} \\ \frac{\varrho}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\left(x + \frac{d}{2}\right) & -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ \frac{\varrho}{\varepsilon_0} a & \frac{d}{2} < x < a + \frac{d}{2} \\ 0 & a + \frac{d}{2} < x. \end{cases} \tag{9-8}$$



10-A. ábra

10. feladat: Egy R sugarú gömb a sugár függvényében lineárisan változó permittivitású anyagból készült. A relatív permittivitás középen $\varepsilon_{1r} = 2$, a felületen pedig $\varepsilon_{2r} = 3$. A gömböt homogén ϱ töltéssűrűséggel töltjük fel. Mekkora az elektromos térerősség és az elektromos eltolás a középponttól való távolság függvényében, ha a gömbön kívül vákuum van?

Megoldás:

Először adjuk meg a relatív dielektromos állandó sugárfüggését. A lineáris függvény legyen $\varepsilon_\mathrm{r}(r)A \cdot r + B$, így

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{1\mathrm{r}} &= A \cdot 0 + B \\ \varepsilon_{2\mathrm{r}} &= A \cdot R + B \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}}{R} \qquad B = \varepsilon_{1\mathrm{r}} \,, \tag{10-1}$$

vagyis

$$\varepsilon_\mathrm{r}(r) = \frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}}{R} \cdot r + \varepsilon_{1\mathrm{r}} \,. \tag{10-2}$$

A homogén módon töltött gömb dielektromos eltolását a 7. feladatban már kiszámítottuk:

$$D(r) = \begin{cases} \frac{\varrho}{3} r & r < R \\ \frac{\varrho}{3} \frac{R^3}{r^2} & R < r \end{cases} \,, \tag{10-3}$$

melyből a térerősség:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}(r)} = \begin{cases} \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} \frac{1}{\frac{\varepsilon_{2\mathrm{r}} - \varepsilon_{1\mathrm{r}}}{R} \cdot r + \varepsilon_{1\mathrm{r}}} r & r < R \\ \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2} & R < r \end{cases} \,. \tag{10-4}$$