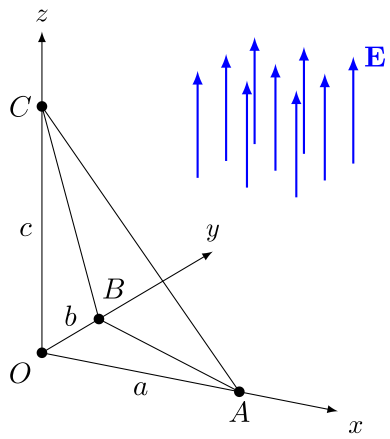
Fizika A2E, 3. feladatsor

Vida György József
vidagyorgy@gmail.com

1. feladat: A homogén, E nagyságú elektromos erőtér a koordinátarendszer z tengelyének irányába mutat. Határozzuk meg az elektromos fluxus értékét az $OABC$ tetraéder minden lapjára külön-külön, ahol az O pont az origót jelenti, $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$, $C = (0,0,c)$.



1-A. ábra

Megoldás:
Az elektromos térerősség fluxusa a térerősség felületi integrálja:

$$\Phi = \iint\limits_A \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f}\ . \tag{1-1}$$

Ezt a mennyiséget kell kiszámítanunk mind a négy oldalra.

OAB**:** Először is a felületet kell irányítanunk. Konvenció, hogy a felületelem-vektor a zárt felületből mindig kifelé mutat. A felületelem-vektor a felület síkjára merőleges és nagysága az adott felületelem nagyságával egyezik meg.

A fluxus:

$$\Phi_{OAB} = \iint\limits_{OAB} \mathbf{E}\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} \overset{(1)}{=} -\iint\limits_{OAB} E\,\mathrm{d}^2 f \overset{(2)}{=} -E\iint\limits_{OAB} \mathrm{d}^2 f \overset{(3)}{=} -E\frac{ab}{2}\ , \tag{1-2}$$

hiszen (1) a felületelem-vektor erőleges a térerősségre a teljes felületen mindenhol, (2) a térerősség homogén a felület mentén, vagyis az integrálból kiemelhető, illetve (3) a felületelemek nagyságának összege a teljes felületre a felület méretét adja meg.

OAC **és** OBC**:** A felületi integrál itt nulla, hiszen a felületelem-vektorok merőlegesek a térerősségre, így a skalárszorzatuk nulla.

ABC**:** Az OAB oldalhoz hasonlóan itt:

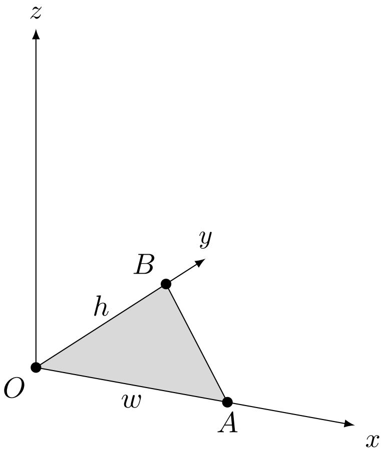
$$\Phi_{ABC} = \iint\limits_{ABC} \mathbf{E}\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = \mathbf{E}\iint\limits_{ABC} \mathrm{d}^2\mathbf{f} = \mathbf{E}\mathbf{A}_{ABC}\ , \tag{1-3}$$

ahol $\mathbf{A}_{ABC}$ a felületvektor. Ezt a háromszög két oldalát megadó vektorból meghatározhatjuk: $\overrightarrow{AB} = (-a,b,0)$, és $\overrightarrow{AB} = (-a,0,c)$, így

$$\mathbf{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(bc,ac,ab)\ , \quad \Phi_{ABC} = E\frac{ab}{2}\ . \tag{1-4}$$

Vegyük észre, hogy a teljes felületre a fluxus nulla.

2. feladat: Az elektromos térerősség a térben az $\mathbf{E}(x,y,z) = az\mathbf{i} + bx\mathbf{k}$ függvény szerint változik, ahol a és b adott állandók. Határozzuk meg az elektromos fluxus értékét az $O = (0,0,0)$, $A = (w,0,0)$, $B = (0,h,0)$ csúcspontok által meghatározott OAB háromszögre.



2-A. ábra

Megoldás:
A megoldáshoz az alábbi felületi integrált kell kiszámítani:

$$\Phi = \iint\limits_{OAB} \mathbf{E}(\mathbf{r})\, \mathrm{d}^2\mathbf{f} \ , \tag{2-1}$$

ahol az integrálást az OAB háromszögön végezzük, és a $\mathrm{d}^2\mathbf{f}$ a felületelem-vektorok a felületre merőlegesek, és nagyságuk megegyezik a hozzájuk tartozó felületdarabkák nagyságával. Irányítsuk a felületet felfelé, vagyis a $\mathrm{d}^2\mathbf{f}$ vektorok mutassanak a z irányba.

Az integrált Descartes-koordinátarendszerben fogjuk paraméterezni. Ehhez először meg kell határoznunk azt, hogy az x és az y koordináták milyen értékeket vehetnek fel, míg azok bejárják a megadott felületet. Az x koordináta 0 és w közötti értékeket vehet fel. Minden egyes x értékhez az y koordináta az OA és az AB egyenesek között lehet. Először határozzuk meg az AB egyenes egyenletét: $y(x) = A \cdot x + B$,

$$\left.\begin{aligned} y(x=w) = 0 = A\cdot w + B \\ y(x=0) = h = A \cdot w + B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad A = -\frac{h}{w} \qquad B = h \ , \tag{2-2}$$

vagyis az integrálási határok: $x \in [0,w]$, $y \in \left[0, -\frac{h}{w}x + h\right]$.

Ez alapján az integrál:

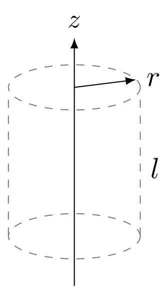
$$\Phi = \int\limits_0^w \int\limits_0^{-\frac{h}{w}x+h} \mathbf{E}(x,y,z)\mathbf{k}\, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^w \int\limits_0^{-\frac{h}{w}x+h} (az\mathbf{i} + bx\mathbf{k})\mathbf{k}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{2-3}$$

$$= \int\limits_0^w \int\limits_0^{-\frac{h}{w}x+h} bx\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^w bx \left(\int\limits_0^{-\frac{h}{w}x+h} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^w bx \cdot \left([y]_0^{-\frac{h}{w}x+h} \right) \mathrm{d}x \tag{2-4}$$

$$= \int\limits_0^w bx \left(-\frac{h}{w}x + h \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^w \left(-\frac{bh}{w}x^2 + bhx \right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{bh}{3w}x^3 + bh\frac{x^2}{2} \right]_0^w \tag{2-5}$$

$$= -\frac{bh}{3w}w^3 + bh\frac{w^2}{2} = \frac{1}{6}bhw^2 \ . \tag{2-6}$$

3. feladat: Végtelen hosszú egyenes mentén λ egyenletes töltéssűrűség van. Határozzuk meg a térerősséget a Gauss-tétel segítségével az egyenestől d távol lévő pontban!



3-A. ábra

Megoldás:
A Gauss-tétel kimondja, hogy

$$\iint\limits_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r})\, \mathrm{d}^2\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_V \varrho(\mathbf{r})\, \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\mathrm{in}} \ , \tag{3-1}$$

ahol a bal oldal a térerősség V térfogat felületére való felületi integrálja, míg a jobb oldal a töltéssűrűség a V térfogatra vett integrálja. Ez egy integrális összefüggés, a térerősség egy adott felületre vett integrálját köti össze a felületen felül található töltésmennyiséggel. Nekünk azonban minden egyes pontban (lokálisan) kell megadnunk a térerősséget. Ez akkor tehető meg egyszerűen, ha a rendszer nagyfokú szimmetriával rendelkezik, így a létrejövő térerősség viszonylag egyszerű struktúrával bír. Ekkor egy megfelelően megválasztott Gauss-felülettel gyorsan célt érhetünk.

Láthatjuk a töltéseloszlás hengerszimmetriával rendelkezik: a z tengely körül tetszőlegesen elforgathatjuk a rendszert, minden olyan síkra, amely tartalmazza a z tengelyt vagy merőleges arra megtükrözhetjük a rendszert, illetve a z tengellyel párhuzamosan tetszőlegesen eltolhatjuk a rendszert, ugyanazt fogjuk látni. A létrejövő térerősségnek is meg kell felelnie ezeknek a szimmetriáknak.

- Ha hengerkoordináta-rendszerben gondolkozunk, akkor a létrejövő térerősség függhet az r, a ϕ és a z koordinátáktól. Mivel ugyanazt látjuk, ha a rendszert eltoljuk a z tengely mentén, illetve ha elforgatjuk a z tengely körül, ezért valójában ettől a két mennyiségtől semmi nem függhet. Tehát $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(r)$.

- Emellett a vektor sem állhat akármilyen irányban. Érezzük, hogy a térerősség sugárirányú lesz, de más nem is lehet a vízszintes és a függőleges tükörsíkok miatt. Emiatt $\mathbf{E}(r) = E(r)\mathbf{e}_\mathrm{r}$, ahol $\mathbf{e}_\mathrm{r}$ a sugárirányban kifelé mutató egységvektor.

Ez alapján már fel tudjuk egyszerűen írni egy henger alakú Gauss-felületre a Gauss-törvényt:

$$\iint\limits_{\text{henger}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} \overset{(1)}{=} \iint\limits_{\text{hengerpalást}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} + 2\underbrace{\iint\limits_{\text{alaplap}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f}}_{=0} \overset{(2)}{=} \iint\limits_{\text{hengerpalást}} E(r)\,\mathrm{d}^2 f \tag{3-2}$$

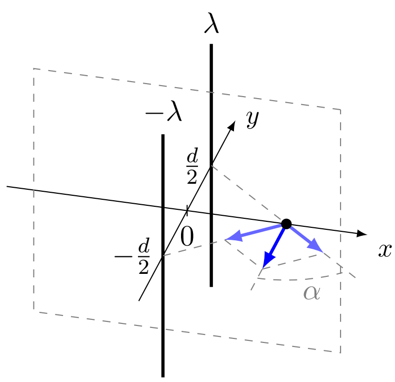
$$\overset{(3)}{=} E(r) \iint\limits_{\text{hengerpalást}} \mathrm{d}^2 f = E(r)\cdot 2r\pi l\ , \tag{3-3}$$

hiszen (1) a teljes hengerfelület felosztható a palástra és a két alaplapra, ahol az alaplapon vett felületi integrál nulla, hiszen ott a felületvektor merőleges a térerősségre, illetve (2) a paláston számolt felületi integrálnál a felületvektor párhuzamos a térerősséggel. Mivel a térerősség csak a sugártól függ, így a paláston a térerősség nagysága ugyanakkora (3), vagyis az kiemelhető az integrálás alól, a felületelemek összege pedig a palást felületét adja.

A hengerben található töltésmennyiség $Q_\mathrm{in} = \lambda\cdot l$. A kettő egyenlőségéből:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\ , \qquad\qquad \mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,\mathbf{e}_\mathrm{r}\ . \tag{3-4}$$

4. feladat: Egymástól d távolságban párhuzamosan elhelyezett két igen hosszú fonalat egyenletesen töltök fel $+\lambda$ és $-\lambda$ lineáris töltéssűrűséggel. Határozzuk meg a térerősséget abban a pontban, amely a két fonalat magában foglaló síktól x távolságban fekszik a szimmetriasíkban.



4-A. ábra

Megoldás:

Az előző feladat megoldása alapján tudjuk, hogy a λ töltéssűrűséggel rendelkező vonaltöltés elektromos térerőssége:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,\mathbf{e}_\mathrm{r}\,. \tag{4-1}$$

A két vonaltöltés által létrehozott térerősséget a megfelelő módon vektoriálisan kell összegeznünk. Azt láthatjuk, hogy a térerősség x komponensei kiejtik egymást, így csak a $-y$ irányba mutató vetületeket kell összeadnunk.

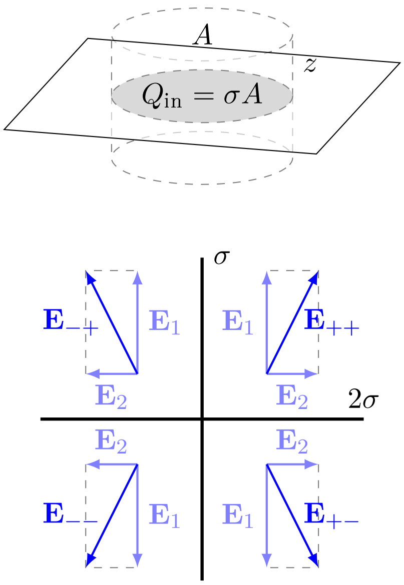
$$E(x) = 2E\left(\sqrt{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)\cdot\cos\alpha = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}\cdot\cos\alpha \tag{4-2}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}\cdot\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\,. \tag{4-3}$$

Vagyis

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\cdot(-\mathbf{e}_\mathrm{y})\,. \tag{4-4}$$

5. feladat: Milyen erőteret hogy létre két egymásra merőleges végtelen sík, ha rajtuk egyenletesen elosztva σ és 2σ felületi töltéssűrűség van.



5-A. ábra

Megoldás:

Először határozzuk meg egy σ felületi töltéssűrűséggel rendelkező síklap térerősségét. Ehhez is a Gauss-törvényt fogjuk használni. Szimmetriamegfontolások alapján megállíthatjuk, hogy a térerősség csak a síktól való z távolságtól függhet, illetve hogy a térerősségnek erőlegesnek kell lennie a síkra.

A Gauss-törvényt egy henger alakú felületre fogjuk felírni. Legyen ennek alapterülete A, magassága $2z$, és helyezzük el úgy, hogy a töltött sík ezt pont felezze. A befoglalt töltés $Q_\mathrm{in} = \sigma A$. A térerősségnek felületi integrálja csak a két alaplapon fog járulékot adni, hiszen az a palásttal párhuzamos. Mind a két alaplapon a felületvektor és a térerősség egy irányba mutat, így:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A = \iint\limits_{\text{henger}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = 2\iint\limits_{\text{alaplap}} \mathbf{E}(z)\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} = 2E(z)A \tag{5-1}$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,. \tag{5-2}$$

Tehát láthatjuk, hogy a síktól való távolságtól függetlenül a térerősség állandó nagyságú.

Ha két ilyen lemezt merőlegesen állítunk egymásra, akkor az egyes lemezek által létrehozott térerősségeket vektoriálisan össze kell adni. A nagysága mindenhol ugyanakkora:

$$E = \sqrt{E_1^2+E_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2+\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}\sigma}{2\varepsilon_0}\,. \tag{5-3}$$

A térerősségvektor:

$$\mathbf{E}(x,y) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\;\;1,\;\;2,0) & 0 < x\,, 0 < y \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-1,\;\;2,0) & 0 > x\,, 0 < y \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\;\;1,-2,0) & 0 < x\,, 0 > y \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-1,-2,0) & 0 > x\,, 0 > y \end{cases} \tag{5-4}$$

6. feladat: Tegyük fel, hogy a térben a térfogati töltéssűrűség csak az x–y síktól mért távolságtól függ, tehát $\varrho(x,y,z) = f\big(|z|\big)$ valamilyen f függvényre. Fejezzük ki f segítségével a térerősséget a tér minden pontjában.

Megoldás:

Ahogy azt a 3. feladatnál is tettük, most is először szimmetriamegfontolások alapján adunk feltételeket arra, hogy milyen lehet a térerősség alakja, majd ezután egy jól megválasztott Gauss-felülettel fel fogjuk írni a Gauss-tételt.

Ha a töltéssűrűség csak az x–y síktól mért távolságtól függ, akkor a rendszer

1. az x–y síkkal párhuzamosan tetszőlegesen eltolható
2. az x–y síkra is tükrözhető
3. minden x–y síkra merőleges síkra tükrözhető

úgy, hogy a rendszer a transzformáció után önmagába megy át. Az 1. szimmetria következménye, hogy semmilyen mennyiség sem függhet az x és az y koordinátáktól. A 2. szimmetriából adódik, hogy a térerősség z magasságban ellentétesen áll mint $-z$ magasságban. Végül pedig a 3. szimmetriából látszik, hogy a térerősség csak a z irányba mutathat.

Ez formálisan felírva:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(z) = E(z)\mathbf{e}_\mathrm{z} = E(|z|)\begin{cases} \mathbf{e}_\mathrm{z} & z > 0 \\ -\mathbf{e}_\mathrm{z} & z < 0 \end{cases} . \tag{6-1}$$

A megfelelő Gauss-felület egy olyan henger, melynek A területű alaplapjai párhuzamosak az x–y síkkal és azok a z, illetve a $-z$ magasságnál vannak. A Gauss-tétel két oldalán szereplő mennyiségek:

$$\iint\limits_{\text{henger}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} \stackrel{(1)}{=} \underbrace{\iint\limits_{\text{hengerpalást}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f}}_{=0} + 2\iint\limits_{\text{alaplap}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} \stackrel{(2)}{=} 2\iint\limits_{\text{alaplap}} E(r)\,\mathrm{d}^2 f \tag{6-2}$$

$$\stackrel{(3)}{=} 2E(z)\iint\limits_{\text{alaplap}} \mathrm{d}^2 f = E(z)\cdot 2A\,, \tag{6-3}$$

hiszen (1) a teljes hengerfelület felosztható a palástra és a két alaplapra, ahol a paláston vett felületi integrál nulla, hiszen ott a felületvektor merőleges a térerősségre, illetve (2) az alaplapokon számolt felületi integrálnál a felületvektor párhuzamos a térerősséggel. Mivel a térerősség csak a z koordinátától függ, így az alaplapon a térerősség nagysága mindenhol ugyanakkora (3), vagyis az kiemelhető az integrálás alól, a felületelemek összege pedig az alaplap felületét adja.

A körbezárt töltés:

$$\iiint\limits_V \varrho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} \stackrel{(1)}{=} \iiint\limits_V \varrho\big(|z'|\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z' \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\iint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{=A} \int\limits_{-z}^{z} \varrho\big(|z'|\big)\,\mathrm{d}z' \tag{6-4}$$

$$\stackrel{(3)}{=} 2A\int\limits_0^z \varrho(z')\,\mathrm{d}z'\,. \tag{6-5}$$

A Gauss-tétel alapján:

$$E(z) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_0^z \varrho(z')\,\mathrm{d}z' \; . \tag{6-6}$$

7. feladat: Legyen a térfogati töltéssűrűség olyan, hogy az csak a z tengelytől mért távolság függvénye, azaz $\varrho(x,y,z) = f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ valamilyen f függvényre. Adjuk meg a térerősséget a tér minden pontjában.

Megoldás:

Ha a töltéssűrűség csak az $r = \sqrt{x^2+y^2}$-től, vagyis a z tengelytől mért távolságtól függ, akkor a rendszer

1. a z tengellyel párhuzamosan tetszőlegesen eltolható,
2. a z tengely körül tetszőleges szöggel elforgatható,
3. a z tengelyre merőleges síkra tükrözhető,
4. minden a z tengelyt tartalmazó síkra tükrözhető

úgy, hogy a rendszer a transzformáció után önmagába megy át, vagyis a rendszer hengerszimmetrikus. Érdemes akkor hengerkoordináta-rendszerben gondolkodnunk. Az 1. szimmetria következménye, hogy semmilyen mennyiség sem függhet a z koordinátáktól, a 2. szimmetriáé pedig, hogy a φ-től sem függhet semmi. A 3. és a 4. szimmetriából adódik, hogy a térerősség csak sugárirányba mutathat.

Ez formálisan felírva:

$$\mathbf{E}(r,\varphi,z) = \mathbf{E}(r) = E(r)\mathbf{e}_\mathrm{r} \; . \tag{7-1}$$

A megfelelő Gauss-felület egy olyan r sugarú, l hosszú henger, melynek területű alaplapjai párhuzamosak az x–y síkkal és tengelye egybeesik a szimmetriatengellyel. A Gauss-tételhez:

$$\iint\limits_{\text{henger}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} \overset{(1)}{=} \iint\limits_{\text{hengerpalást}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} + 2\underbrace{\iint\limits_{\text{alaplap}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f}}_{=0} \overset{(2)}{=} 2\iint\limits_{\text{palást}} E(r)\,\mathrm{d}^2 f \tag{7-2}$$

$$\overset{(3)}{=} 2E(r)\iint\limits_{\text{palást}} \mathrm{d}^2 f = E(z)\cdot 2r\pi l \; , \tag{7-3}$$

hiszen (1) a teljes hengerfelület felosztható a palástra és a két alaplapra, ahol az alaplapokon vett felületi integrál nulla, hiszen ott a felületvektor merőleges a térerősségre, illetve (2) a paláston számolt felületi integrálnál a felületvektor párhuzamos a térerősséggel. Mivel a térerősség csak az r koordinátától függ, így a paláston a térerősség nagysága mindenhol ugyanakkora (3), vagyis az kiemelhető az integrálás alól, a felületelemek összege pedig az alaplap felületét adja.

A körbezárt töltés:

$$\iiint\limits_{\text{henger}} \varrho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} \overset{(1)}{=} \int\limits_0^l \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^r \varrho(r')r'\,\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \overset{(2)}{=} \int\limits_0^l \mathrm{d}z \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^r \varrho(r')r'\,\mathrm{d}r' \tag{7-4}$$

$$\overset{(3)}{=} l \cdot 2\pi \int\limits_0^r \varrho(r')r' \,\mathrm{d}r' \,, \tag{7-5}$$

ahol r az integrálás hatra és r' az integrálási változó.

A Gauss-tétel alapján:

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int\limits_0^r r'\varrho(r')\,\mathrm{d}r' \,. \tag{7-6}$$

8. feladat: Tegyük fel, hogy a térben a térfogati töltéssűrűség gömbszimmetrikus, tehát az csak az origótól mért távolságtól függ, vagyis $\varrho(x,y,z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ alakú. Hogyan fejezhető ki az elektromos térerősség f segítségével?

Megoldás:

Itt a töltéssűrűség csak az $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$-től, vagyis az origótól mért távolságtól függ. Így a rendszer

1. tetszőleges origót átmenő tengely körül tetszőleges szöggel elforgatható,
2. tetszőleges az origót tartalmazó síkra tükrözhető

úgy, hogy a rendszer a transzformáció után önmagába megy át, vagyis a rendszer gömbszimmetrikus. Gondolkodjunk gömbkoordináta-rendszerben, a megfelelő koordináták: r, ϑ és φ. Az 1. szimmetria következménye, hogy semmilyen mennyiség sem függhet a ϑ és a φ szögektől, a 2. szimmetriáé pedig, hogy a térerősség csak sugárirányba mutathat, azaz

$$\mathbf{E}(r,\vartheta,\varphi) = \mathbf{E}(r) = E(r)\mathbf{e}_\mathrm{r} \,. \tag{8-1}$$

A megfelelő Gauss-felület egy origó középpontú, r sugarú gömb. A Gauss-tételben szereplő felületi integrál:

$$\iint\limits_{\text{gömb}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{f} \overset{(1)}{=} \iint\limits_{\text{gömb}} E(r)\,\mathrm{d}^2 f \overset{(2)}{=} E(r)\iint\limits_{\text{gömb}} \mathrm{d}^2 f = E(r)\cdot 4r^2\pi \,, \tag{8-2}$$

hiszen (1) a gömb felületén számolt felületi integrálnál a felületvektor párhuzamos a térerősséggel minden pontban, illetve mivel a térerősség csak az r koordinátától függ, így a felületen a térerősség nagysága mindenhol ugyanakkora (2), vagyis az kiemelhető az integrálás alól, a felületelemek összege pedig az alaplap felületét adja.

A körbezárt töltés:

$$\iiint\limits_{\text{gömb}} \varrho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} \overset{(1)}{=} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{r} \varrho(r')r'^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r'\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \tag{8-3}$$

$$\overset{(2)}{=} \int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{r}\varrho(r')r'^2\,\mathrm{d}r' \overset{(3)}{=} 4\pi\int\limits_0^r r'^2\varrho(r')\,\mathrm{d}r' \,, \tag{8-4}$$

ahol r az integrálás határa és r' az integrálási változó.

A Gauss-tétel alapján:

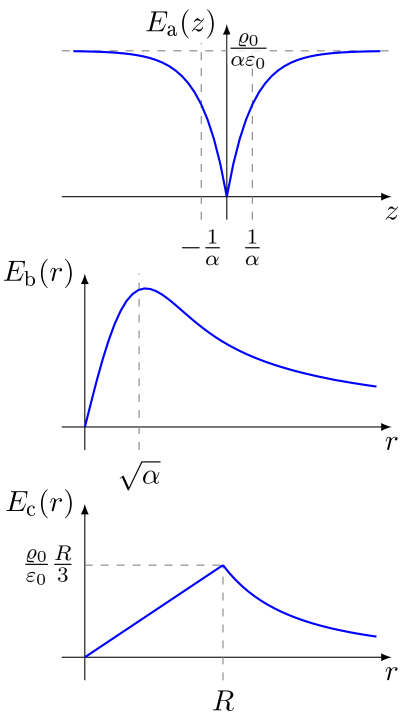
$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int\limits_0^r r'^2\varrho(r')\,\mathrm{d}r' \,. \tag{8-5}$$

9. feladat: Határozzuk meg az elektromos térerősséget, ha a térfogati töltéssűrűség a következő:

a) $\varrho(x,y,z) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\alpha|z|}$

b) $\varrho(x,y,z) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{\alpha}}$

c) $\varrho(x,y,z) = \varrho_0$, ha $x^2+y^2+z^2 < R^2$, illetve $\varrho(x,y,z) = 0$ egyébként.



9-A. ábra

Megoldás:

Észrevehetjük, hogy a három sűrűség az előző három feladatnak megfelelő szimmetriával rendelkezik. Így tehát használva az ott levezetett összefüggéseket:

a)

$$E_\mathrm{a}(z) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^z \varrho(z')\,\mathrm{d}z' = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\int_0^z \mathrm{e}^{-\alpha|z'|}\,\mathrm{d}z' = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{-\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|z'|}\right]_0^z \tag{9-1}$$

$$= \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{-\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|z|}-1\right) = \frac{\varrho_0}{\alpha\varepsilon_0}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha|z|}\right) , \tag{9-2}$$

b)

$$E_\mathrm{b}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_0^r r'\varrho(r')\,\mathrm{d}r' = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_0^r r'\mathrm{e}^{-\frac{r'^2}{\alpha}}\,\mathrm{d}r' = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\frac{-\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\frac{r'^2}{\alpha}}\right]_0^r \tag{9-3}$$

$$= \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{-\alpha}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{r'^2}{\alpha}}-1\right) = \frac{\alpha\varrho_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{r'^2}{\alpha}}\right) , \tag{9-4}$$

c) Itt két eset lehetséges: egyik, hogy $r<R$:

$$E_\mathrm{c}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_0^r r'^2\varrho(r')\,\mathrm{d}r' = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_0^r r'^2\varrho_0\,\mathrm{d}r' = \frac{1}{r^2}\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r'^3}{3}\right]_0^r = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{r}{3} , \tag{9-5}$$

illetve $r>R$

$$E_\mathrm{c}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_0^r r'^2\varrho(r')\,\mathrm{d}r' = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\int_0^R r'^2\varrho(r')\,\mathrm{d}r' \underbrace{\int_R^r r'^2\varrho(r')\,\mathrm{d}r'}_{=0}\right) \tag{9-6}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_0^R r'^2\varrho_0\,\mathrm{d}r' = \frac{1}{r^2}\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r'^3}{3}\right]_0^R = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{R^3}{3} . \tag{9-7}$$

Vagyis

$$E_\mathrm{c}(r) = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{r}{3} & r<R \\ \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{R^3}{3} & R<r \end{cases} . \tag{9-8}$$

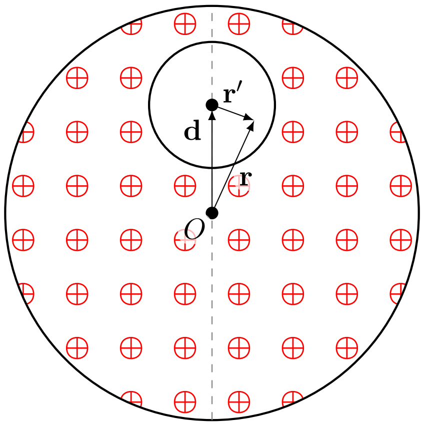
10. feladat: Az állandó térfogati töltéssűrűségű, R sugarú gömbben, a középponttól d távolságra r sugarú üreg van ($d + r < R$). Mekkora a térerősség az üregen belül?

Megoldás:

Az előző feladat c) része alapján tudjuk, hogy a homogén töltéssűrűséggel rendelkező gömb térerőssége a gömbön belül

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{r}{3}\mathbf{e}_\mathrm{r} = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{r}{3}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{3}\mathbf{r}\ , \tag{10-1}$$

ahol $\mathbf{e}_\mathrm{r} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ a gömb közepéből kifele mutató egységvektor.



10-A. ábra

Vegyük észre, hogy a feladat töltéselrendezését két ilyen gömb szuperpozíciójaként elő lehet állítani: a pozitív töltésű gömbben a lyuk olyan, mintha ott lenne egy ugyanakkora csak negatív töltéssűrűséggel rendelkező gömb. Ennek térerőssége:

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}') = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{3}\mathbf{r}'\ . \tag{10-2}$$

Az $\mathbf{r}'$ vektor felírható az $\mathbf{r}$ és a $\mathbf{d}$ vektorral:

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{3}(\mathbf{r} - \mathbf{d})\ . \tag{10-3}$$

Az üregben tehát a térerősség:

$$\mathbf{E}_\text{üreg}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{3}\mathbf{r} - \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{3}(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{3}\mathbf{d}\ , \tag{10-4}$$

vagyis a térerősség az üregben homogén és a $\mathbf{d}$ vektorral párhuzamos.