Fizika A2E, 2. feladatsor

Vida György József
vidagyorgy@gmail.com

1. feladat: Határozza meg az elektrosztatikus és gravitációs kölcsönhatási erők arányát két elektron, illetve két proton esetében. Azonos részecskék kölcsönhatásakor milyen töltés-tömeg aránynál lenne a két erő abszolút értéke azonos?

Megoldás:
A Coulomb-erő és a gravitációs erő kifejezése nagyon hasonló:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{C}} = k\frac{Q_1 Q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \qquad \mathbf{F}_{\mathrm{G}} = \gamma\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \ , \tag{1-1}$$

ahol $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$, illetve $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$. Az erők nagyságának aránya tehát

$$\frac{F_{\mathrm{C}}}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{kQ_1Q_2}{\gamma m_1 m_2} \ . \tag{1-2}$$

Két protonra, illetve két elektronra ezek:

$$Q_{\mathrm{p}} = +1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\ , \quad m_{\mathrm{p}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\ , \quad \frac{F_{\mathrm{C,p}}}{F_{\mathrm{G,p}}} = 1{,}24 \cdot 10^{36}\ , \tag{1-3}$$

$$Q_{\mathrm{e}} = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\ , \quad m_{\mathrm{e}} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\ , \quad \frac{F_{\mathrm{C,e}}}{F_{\mathrm{G,e}}} = 4{,}17 \cdot 10^{42}\ . \tag{1-4}$$

A két erő aránya akkor 1, ha

$$1 = \frac{kQ^2}{\gamma m^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q}{m} = \sqrt{\frac{\gamma}{k}} = 8{,}6 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}\ . \tag{1-5}$$

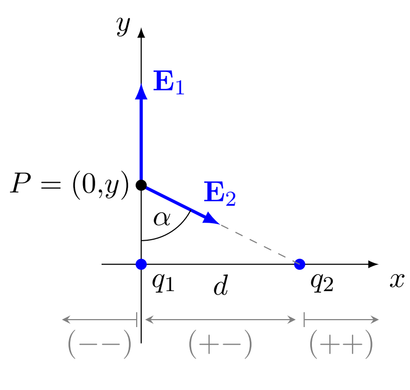
2. feladat: Derékszögű koordinátarendszer x tengelye mentén két töltés található. A $q_1 = 7\,\mu\mathrm{C}$ töltés az origóban helyezkedik el, míg a $q_2 = -5\,\mu\mathrm{C}$ töltés az origótól $d = 0{,}3\,\mathrm{m}$ távolságra van.

a) Határozza meg az elektromos térerősséget az y tengely mentén!
b) Határozza meg az elektromos térerősséget az x tengely mentén!
c) Van-e a tengelyek mentén olyan pont, ahol a térerősség nulla?
d) Van-e egyéb olyan pont a síkon, ahol a térerősség nulla?
e) Hogyan változik a helyzet, ha $q_2 = 5\,\mu\mathrm{C}$ a második töltés?

Megoldás:

a) Az y tengely pozitív felén az 1-gyes töltés által kifejtett erő a pozitív irányba mutat, míg a másik töltés terének van x és y irányú komponense is. A térerősség ennek a két járuléknak az összege.

$$\mathbf{E}_1^{(+)}(y) = k\frac{|q_1|}{y^2}\,(0{,}1{,}0) \tag{2-1}$$



2-A. ábra

$$\mathbf{E}_2^{(+)}(y) = k\frac{|q_2|}{y^2+d^2}(\sin\alpha, -\cos\alpha, 0) \tag{2-2}$$

$$= k\frac{|q_2|}{y^2+d^2}\left(\frac{d}{\sqrt{y^2+d^2}}, -\frac{y}{\sqrt{y^2+d^2}}, 0\right) , \tag{2-3}$$

vagyis

$$\mathbf{E}^{(+)}(y) = k\left(\frac{|q_2|\,d}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{|q_1|}{y^2} - \frac{|q_2|\,y}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}, 0\right) \tag{2-4}$$

A negatív féltengelyen az $\mathbf{E}_1$ megfordul, vagyis lefele fog mutatni, illetve az $\mathbf{E}_2$ y irányú járuléka pedig felfele fog mutatni, így

$$\mathbf{E}^{(-)}(y) = k\left(\frac{|q_2|\,d}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{|q_1|}{y^2} - \frac{|q_2|\,y}{(y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}, 0\right) . \tag{2-5}$$

b) Az x tengely mentén:

$$\mathbf{E}^{(++)}(x) = k\left(\frac{|q_1|}{x^2} - \frac{|q_2|}{(x-d)^2}, 0, 0\right) , \tag{2-6}$$

$$\mathbf{E}^{(+-)}(x) = k\left(\frac{|q_1|}{x^2} + \frac{|q_2|}{(x-d)^2}, 0, 0\right) , \tag{2-7}$$

$$\mathbf{E}^{(--)}(x) = k\left(-\frac{|q_1|}{x^2} + \frac{|q_2|}{(x-d)^2}, 0, 0\right) , \tag{2-8}$$

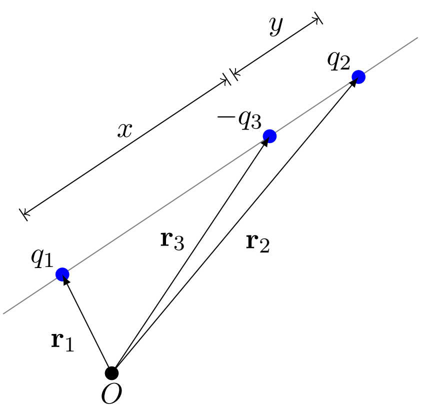
ahol a felső indexek az ábrán szereplő tartományoknak felelnek meg.

c) Az y tengelyen mentén biztos, hogy nincs, mert ott a térerősségnek mindig van x komponense. Az x tengely mentén pedig van ilyen pont, meg kell keresni az $E(x) = 0$ egyenlet megoldását. A q_1 és a q_2 arányától függően vagy a $(++)$, vagy a $(--)$ tartományon lesz megoldás.

d) Nincs. Csak a távoli végtelenben.

e) Ekkor sem lesz stabil pont az y tengely mentén. Az x tengely mentén ekkor a stabil hely a két töltés között lesz.

3. feladat: A q_1 és q_2 pozitív töltéseket az $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ helyvektorokkal megadott pontokban rögzítjük. Az $\mathbf{r}_3$ helyvektorú pontba q_3 töltést helyezve mindhárom töltésre zérus eredő erő hat. Határozzuk meg q_3-at és $\mathbf{r}_3$-at!



3-A. ábra

Megoldás:

Értelemszerűen a harmadik töltésnek negatívnak kell lennie, illetve ennek a háromnak egy egyenesre kell esnie.

Legyen a q_3-as töltés az 1-gyes töltéstől x a 2-es töltéstől pedig y távolságra. Ekkor $\mathbf{r}_3$ felírható úgy mint $\mathbf{r}_3 = \frac{x}{x+y}\mathbf{r}_1 + \frac{y}{x+y}\mathbf{r}_2$.

Azt tudjuk, hogy ekkor egyenként a három töltésre az erők eredője nulla:

$$0 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} \qquad 0 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} \qquad 0 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} , \tag{3-1}$$

és mivel az erők mind egy egyenesbe esnek, így a nagyságukra felírhatjuk, hogy

$$0 = F_{12} + F_{13} \qquad 0 = F_{21} + F_{23} \qquad 0 = F_{31} + F_{32} . \tag{3-2}$$

Ezek részletesen kiírva (majd k-val egyszerűsítve)

$$0 = \frac{q_1 q_3}{x^2} - \frac{q_1 q_2}{(x+y)^2} \qquad 0 = \frac{q_1 q_2}{(x+y)^2} - \frac{q_2 q_3}{y^2} \qquad 0 = \frac{q_1 q_3}{x^2} - \frac{q_2 q_3}{y^2} \,. \tag{3-3}$$

Az egyenletek átalakítva:

$$\frac{x}{x+y} = \sqrt{\frac{q_3}{q_2}} \qquad \frac{y}{x+y} = \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \qquad \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \,, \tag{3-4}$$

majd az elsőt és a harmadikat felhasználva

$$\frac{x}{x + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} x} = \sqrt{\frac{q_3}{q_2}} \tag{3-5}$$

$$1 = \sqrt{\frac{q_3}{q_2}} + \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \tag{3-6}$$

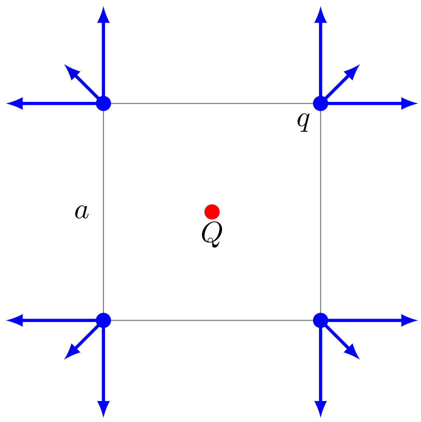
$$1 = \frac{q_3}{q_2} + \frac{q_3}{q_1} + 2\frac{q_3}{\sqrt{q_1 q_2}} \tag{3-7}$$

$$q_3 = \frac{q_1 q_2}{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2} \,. \tag{3-8}$$

Innen pedig már egyszerűen következik, hogy

$$\mathbf{r}_3 = \sqrt{\frac{q_3}{q_2}} \mathbf{r}_1 + \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \mathbf{r}_2 = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \mathbf{r}_1 + \frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \mathbf{r}_2 \tag{3-9}$$

4. feladat: Egy négyzet csúcspontjaiban négy egyforma nagyságú és előjelű töltés helyezkedik el. Mekkora és milyen irányú erő hat egy-egy töltésre? Hova kellene helyezni egy újabb töltést, hogy mindegyik esetén eltűnjön az eredő erő? Mekkora nagyságú és milyen előjelű ez a töltés?



4-A. ábra

Megoldás:

A töltésekre a négyzet átlója mentén hat erő, és mivel a töltések előjele megegyező, így az erők a négyzet középpontjától elfelé mutatnak. Szimmetriaokok miatt mind a négy töltésre ugyanakkora erő fog hatni.

Az a távolságban lévő töltések egymást $F_a = k\frac{q^2}{a^2}$ erővel taszítják. Az átlósan elhelyezkedő töltések $d = \sqrt{2}a$ távolságra vannak, így azok között $F_d = k\frac{q^2}{2a^2}$ erő hat. Az egy töltésre ható erő kiszámításánál az egyes erőket vektoriálisan kell összeadnunk. Mivel tudjuk, hogy az eredő erő átlóirányú lesz, így elég az egyes erőjárulékok átlóirányú komponensét összeadni, és megkapjuk az eredőerő nagyságát.

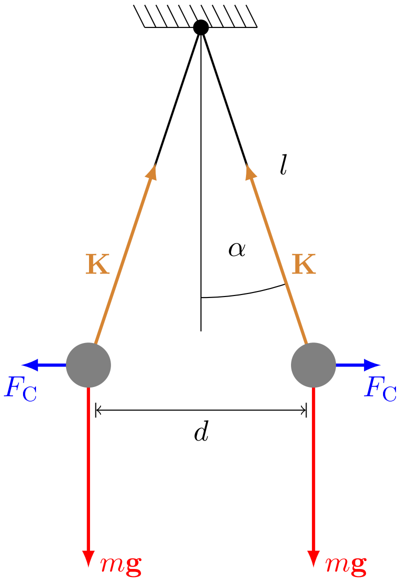
$$F = 2F_{a,\|} + F_{d,\|} = 2F_a \cos 45^\circ + F_d = 2k\frac{q^2}{a^2}\frac{1}{\sqrt{2}} + k\frac{q^2}{2a^2} = k\frac{q^2}{a^2}\frac{2\sqrt{2}+1}{2} \,. \tag{4-1}$$

Ha azt szeretnék, hogy ne hasson erő a töltésekre, akkor a négyzet középpontjába kell ezekkel egy ellentétes előjelű töltést helyezni. Annak akkorának kell lennie, hogy ugyanekkora erőt fejtsen ki mindegyik töltésen:

$$k\frac{Qq}{(d/2)^2} = F = k\frac{q^2}{a^2}\frac{2\sqrt{2}+1}{2} \tag{4-2}$$

$$k\frac{Qq}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = k\frac{q^2}{a^2}\frac{2\sqrt{2}+1}{2} \tag{4-3}$$

$$Q = q \cdot \frac{2\sqrt{2}+1}{4} \,. \tag{4-4}$$



5-A. ábra

5. feladat: Két egyenlő sugarú fémgolyócskát $l = 1$ méter hosszú fonálon közös pontban felfüggesztünk. Mindkét golyóval azonos q nagyságú töltést közlünk. Az elektromos taszítás hatására $d = 20\,\mathrm{cm}$-re eltávolodnak egymástól. Mekkora a golyók töltése, ha tömegük $m = 1\,\mathrm{g}$?

Megoldás:

Mivel a golyók nyugalomban vannak, így a rájuk ható erők eredője nulla. Ez felírva az x és y irányú komponensekre:

$$x: \quad 0 = F_\mathrm{C} - K\sin\alpha \qquad y: \quad 0 = -mg + K\cos\alpha\,. \tag{5-1}$$

A geometria alapján a bezárt szög:

$$\sin\alpha = \frac{d/2}{l} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{d}{\sqrt{4l^2-d^2}}\,, \tag{5-2}$$

és az egyensúlyi egyenletekből

$$F_\mathrm{C} = k\frac{q^2}{d^2} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{5-3}$$

$$q = d\sqrt{\frac{mg}{k}\mathrm{tg}\,\alpha} = 0{,}2\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{C}^2}}\cdot\frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{\sqrt{4\cdot(1\,\mathrm{m})^2-(0{,}2\,\mathrm{m})^2}}} \tag{5-4}$$

$$= 6{,}68\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}\,. \tag{5-5}$$

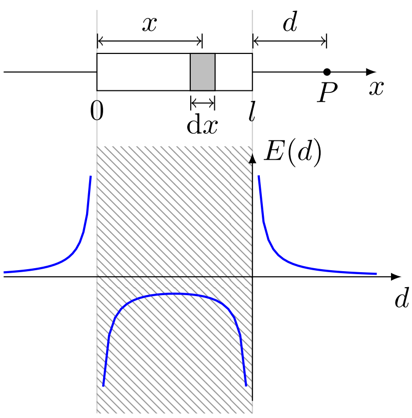
6. feladat: Vékony, egyenletesen töltött l hosszú egyenes rúd töltése $Q = \lambda l$. Határozzuk meg az elektromos térerősséget a rúd tengelyén!

Megoldás:

A folytonos töltéseloszlás által létrehozott elektromos térerősséget úgy határozzuk meg, hogy azt visszavezetjük a ponttöltésekre. Osszuk fel a rudat nagyon rövid $\mathrm{d}x$ hosszú darabokra. Az x helyen lévő $\mathrm{d}x$ hosszú darab töltése $\mathrm{d}q(x) = \lambda\mathrm{d}x$. Mivel ennek a kiterjedése nagyon pici, így ezt kezelhetjük úgy, mint egy ponttöltés. Ennek térerősségjáruléka a P pontban $\mathrm{d}E(x) = k\frac{\mathrm{d}q}{(l-x+d)^2}$.

Mivel minden darab térerősségjáruléka ugyanabba az irányba mutat, így az eredő térerősség nagyságát úgy kaphatjuk meg, ha az járulékok nagyságát összeadjuk.

$$E(d) = \int_0^l \mathrm{d}E(x) = \int_0^l k\frac{\lambda\mathrm{d}x}{(l-x+d)^2} = \left[\frac{k\lambda}{l-x+d}\right]_0^l = k\lambda\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+l}\right)\,. \tag{6-1}$$



6-A. ábra

Ez a mennyiség d-ben egy függvény, hiszen a fenti összefüggés felírható tetszőleges d távolságra. A térerősségre csak a rúdon kívül kapunk értelmes kifejezést, ugyanis a térerősség divergál a rúd végénél. Az ábrázolt $E(d)$ függvény tehát a térerősség nagysága. Annak iránya a rúdtól elfelé (a rúd felé) mutat, ha λ pozitív (negatív).

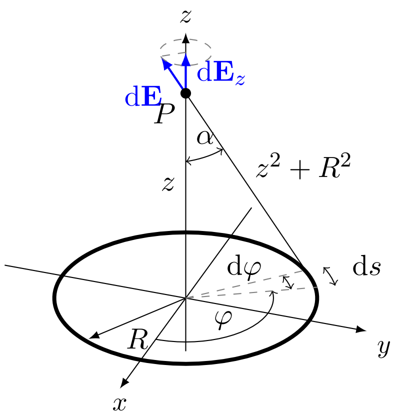
7. feladat: Egyenletesen töltött, R sugarú körvonal alakú test töltése Q. Határozzuk meg az elektromos térerősséget a középponton átmenő, a kör síkjára merőleges tengely mentén!

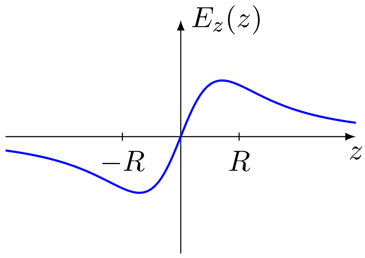
Megoldás:

Ezt a feladatot is az előzőhöz hasonló módon oldjuk meg: először felosztjuk a töltéseloszlást kis darabokra, melyeknek terét úgy tudjuk számolni, mintha azok ponttöltések lennének, majd összeadjuk az egyes darabok térerősségjárulékát.

Tekintsük a körvonal egy $\mathrm{d}s$ hosszú darabját. Ennek töltése $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}s$, ahol λ a körvonalon a vonalmenti töltéssűrűség: $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$. Térjünk át a φ szerinti paraméterezésre, vagyis indexeljük a kis darabokat azzal, hogy milyen φ szöghöz tartoznak. A $\mathrm{d}\varphi$ szög alatt $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\varphi$ körív látszik, vagyis a φ-nál lévő $\mathrm{d}\varphi$ hosszú körívszakasz töltése $\mathrm{d}q(\varphi) = \lambda R \mathrm{d}\varphi$.

A $\mathrm{d}q(\varphi)$ térerősségjárulékának nagysága $\mathrm{d}E(\varphi) = k\frac{\mathrm{d}q(\varphi)}{z^2+R^2}$. Ezek a járulékok azonban nem összegezhetőek egyszerűen, ugyanis a különböző darabok térerősségjáruléka nem egyirányú. Általános esetben a járulékoknak az x, y és z irányú vetületeit is ki kellene számolni, majd ezeket összeadni. Itt azonban láthatjuk, hogy az egymással szemben lévő darabok vízszintes térerősségjárulékai kiejtik egymást, így csak z irányban lehet eredő térerősség.





7-A. ábra

A $\mathrm{d}\mathbf{E}(\varphi)$ z irányú vetülete:

$$\mathrm{d}E_z(\varphi) = \mathrm{d}E(\varphi)\cos\alpha = k\frac{\mathrm{d}q(\varphi)}{z^2+R^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} = k\frac{z\mathrm{d}q(\varphi)}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7-1}$$

$$= k\frac{z\lambda R\mathrm{d}\varphi}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\ , \tag{7-2}$$

melyből az eredő térerősség z irányú komponense:

$$E_z(z) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}E_z(\varphi) = \int_0^{2\pi} k\frac{z\lambda R\mathrm{d}\varphi}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = k\frac{z\lambda R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \tag{7-3}$$

$$= k\frac{z\lambda R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2\pi = k\frac{Q}{2\pi R}\frac{zR}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2\pi = kQ\frac{z}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\ , \tag{7-4}$$

tehát a térerősség a z tengely mentén:

$$\mathbf{E}(z) = \left(0{,}0{,}kQ\frac{z}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\ . \tag{7-5}$$

8. feladat: Egy 10 cm sugarú korong egyenletesen töltött, $\sigma = 10^{-5}\,\mathrm{C/m^2}$ töltéssűrűséggel. Határozzuk meg a térerősséget a korong tengelyén, a korong síkjától 5 cm távolságban!

Megoldás:

Az előző feladat megoldása alapján tudjuk, hogy egy Q töltésű, r sugarú töltött körvonal tengelyében, annak síkjától z távolságra a térerősség z irányú, és annak nagysága

$$E_z(z) = kQ\frac{z}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\ . \tag{8-1}$$

Vegyük észre, hogy a korong felosztható r sugarú, nagyon vékony $\mathrm{d}r$ széles körvonalakra. Egy ilyen körvonal töltése $\mathrm{d}Q = \sigma \mathrm{d}A$, ahol $\mathrm{d}A$ a körvonal felülete. Mivel ez nagyon vékony, így területét kiszámolhatjuk úgy, mint a kerületének és a szélességének szorzata: $\mathrm{d}Q = \sigma \cdot 2\pi r \mathrm{d}r$. Felhasználva az előző feladatban levezetett összefüggést, az r sugarú $\mathrm{d}r$ vastag körív térerősségjáruléka:

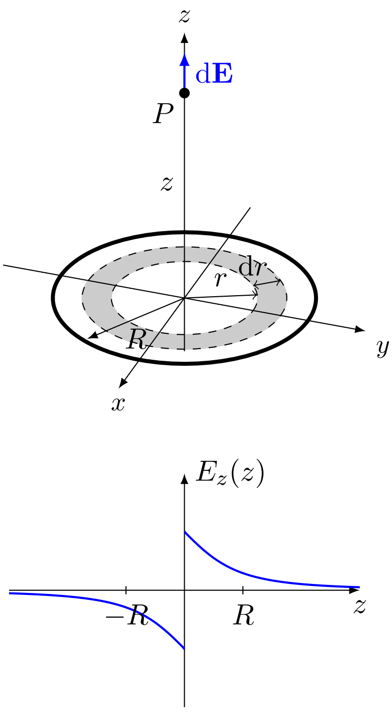
$$\mathrm{d}E_z(z,r) = k\mathrm{d}Q \frac{z}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = k\sigma 2\pi r \mathrm{d}r \frac{z}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} . \tag{8-2}$$

A teljes z irányú térerősség ezek összege az összes ilyen körívre:

$$E_z(z) = \int_0^R \mathrm{d}E_z(z,r) = \int_0^R k\sigma 2\pi r \mathrm{d}r \frac{z}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi k\sigma z \int_0^R \frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}r \tag{8-3}$$

$$= 2\pi k\sigma z \left[(-1) \cdot \frac{1}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^R = 2\pi k\sigma z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \tag{8-4}$$

$$= 2\pi k\sigma \left(\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} \right) . \tag{8-5}$$



8-A. ábra

Megjegyzés:

Láthatjuk, hogy a térerősség nem folytonos függvény, szakadása van ott, ahol átlépünk a felületi töltéseken. A szakadás mértéke kapcsolatban van a felületi töltéssűrűséggel:

$$\lim_{z\to 0+0} E(z) - \lim_{z\to 0-0} E(z) = 4\pi k\sigma = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \tag{8-6}$$

Ez a kapcsolat akkor is érvényes, ha a felületi töltéssűrűség helyfüggő.

9. feladat: Az x–y síkban végtelen vezető lap helyezkedik el, a $\mathbf{d} = (0,0,d)$ pontba Q töltést helyezünk. Mi lesz az elektromos térerősség a $z > 0$ féltérben?

Megoldás:

A vezető lap ideális fém, vagyis a térerősségnek arra merőlegesnek kell lennie, a fémen belül pedig a térerősség nulla.

A feladat megoldásához a tükörtöltések módszerét fogjuk felhasználni. Vegyük észre, hogy a feladat nagyfokú szimmetriával rendelkezik, emiatt a kérdéses térrészben a térerősségnek is nagyon szimmetrikusnak kell lennie. Tudjuk, hogy a szabad térrészben csak a Q az egyetlen töltés. Próbáljuk meg úgy megkonstruálni a szabad térrészben a térerősséget, hogy hipotetikus töltéseket helyezünk a fém belsejébe. Éppen a szimmetria miatt ezt a töltést csak a Q töltés alá a $(0,0,-d) = -\mathbf{d}$ pontba helyezhetjük el. Legyen ennek töltése $-Q$, hiszen ekkor a Q és $-Q$ töltések egy dipólust adnak, melynek tere olyan, hogy az a kettőt összekötő szakasz felezősíkjára minden pontban merőleges. Nekünk pont erre van szükségünk, vagyis legyen

$$\mathbf{E}_{z>0}(\mathbf{r}) = k \left(\frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{d}) - \frac{Q}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}|^3}(\mathbf{r}+\mathbf{d}) \right) . \tag{9-1}$$

Ez tényleg merőleges a $z = 0$ síkra, hiszen

$$\mathbf{E}_{z>0}(x,y,z=0) \tag{9-2}$$

$$= k\left(\frac{Q}{(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\big((x,y,0)-(0,0,d)\big)\right. \tag{9-3}$$

$$\left. - \frac{Q}{(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\big((x,y,0)+(0,0,d)\big)\right) \tag{9-4}$$

$$= -2k\frac{Q}{(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}(0,0,d)\ . \tag{9-5}$$

10. feladat: Végtelen földelt vezető síktól d távolságra Q ponttöltés helyezkedik el. Határozzuk meg a síkon a felületi töltéssűrűséget!

Megoldás:
Az előző feladatban kiszámoltuk a térerősséget a $z = 0$ síkban:

$$\mathbf{E}_{z>0}(x,y,z=0) = \left(0,0,\frac{-2kQd}{(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}})\right)\ . \tag{10-1}$$

Ahogy azt a 9. feladatban láttuk, a fém felületén a térerősség és a felületi töltéssűrűség között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ , \tag{10-2}$$

ahol $E_\perp$ a fém felületére merőleges térerősség nagysága és σ a felületi töltéssűrűség. Ezt felhasználva:

$$\sigma(x,y) = \varepsilon_0 E_\perp(x,y,z=0) = \frac{-2kQ\varepsilon_0 d}{(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\ . \tag{10-3}$$

Láthatjuk, hogy a töltéssűrűség Q-val ellentétes előjelű. Ez érthető, hiszen Q hatására az ellentétes előjelű töltések halmozódnak fel a fém felületén.