Utolsó módosítás: 2015. május 4., 19:24

Fizika A2E, 1. feladatsor

Vida György József
vidagyorgy@gmail.com

1. feladat: Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{c} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

a) Mekkora az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok hossza?

b) Milyen szöget zár be egymással $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$?

c) Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelogramma területe?

d) Mekkora a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített háromszög területe?

e) Mekkora a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata?

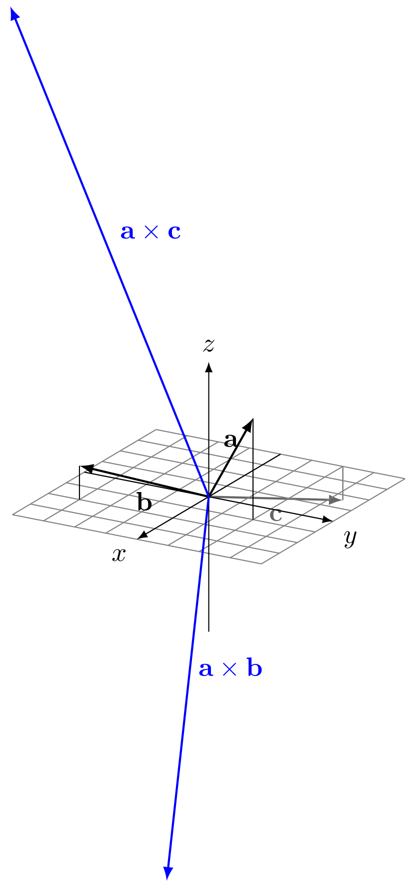
Megoldás:

a) A vektorok hosszát a saját magukkal vett skalárszorzatuk gyökeként definiáljuk:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})} = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}\,, \tag{1-1}$$

$$b = \sqrt{\mathbf{b}^2} = \sqrt{2^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{14}\,, \tag{1-2}$$

$$c = \sqrt{\mathbf{c}^2} = \sqrt{(-4)^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{21}\,. \tag{1-3}$$



1-A. ábra

b) $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge, szintén definíció szerint:

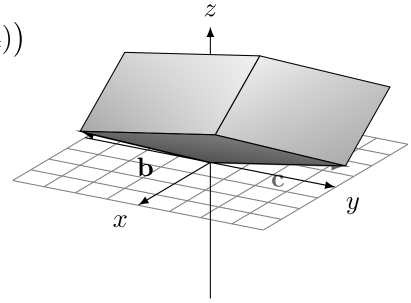
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+1\mathbf{k})}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1\cdot 2+2\cdot(-3)+3\cdot 1}{14} = -\frac{1}{14} \tag{1-4}$$

$$\alpha = 94{,}1^\circ\,. \tag{1-5}$$

c) A parallelogramma területe: $T = a\cdot c\cdot\sin\alpha$, ahol α a két vektor által közbezárt szög. A terület azonban úgy is kiszámítható, mint a két vektor vektoriális szorzatának hossza.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot\big(2\cdot(-1)-3\cdot 2\big) - \mathbf{j}\cdot\big(1\cdot(-1)-3\cdot(-4)\big) + \mathbf{k}\big(1\cdot 2-2\cdot(-4)\big) = -8\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \tag{1-6}$$

$$T = |\mathbf{a}\times\mathbf{c}| = \sqrt{(-8)^2+(-11)^2+10^2} = \sqrt{285} = 16{,}88\,. \tag{1-7}$$



1-B. ábra

d) A kifeszített háromszög területét ugyanúgy kell kiszámolni, mint a parallelogramma területét, azonban a háromszögé annak csak a fele,

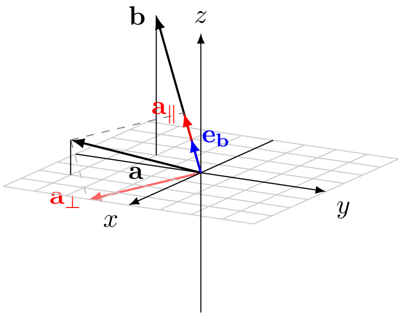
$$T = \frac{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|}{2}\,. \tag{1-8}$$

e) A paralelepipedon térfogatát a három vektor vegyesszorzatával lehet kiszámolni:

$$V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \ . \tag{1-9}$$

Ez a mennyiség egy skalár, hiszen két vektor skaláris szorzata. A vektorok sorrendje mindegy. Az abszolútérték-jel azért szükséges, mert ha a vektoriális szorzat két tagját felcseréljük, akkor a szorzat előjele megváltozik, azonban a térfogat pozitív mennyiség.

$$\begin{aligned} V &= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}| \\ &= \big|\big(- 8\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\big) \cdot \big(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\big| = |-16 + 33 + 10| = 27 \ . \end{aligned} \tag{1-10}$$



2-A. ábra

2. feladat: Adott két vektor: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Bontsa fel $\mathbf{a}$-t $\mathbf{b}$-vel párhuzamos és rá merőleges komponensekre! Hegyes- vagy tompaszöget zár be egymással a két vektor?

Megoldás:
Először elkészítjük a $\mathbf{b}$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{e_b} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \ . \tag{2-1}$$

Az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ irányába eső vetületének hosszát a $\mathbf{b}$ irányába mutató egységvektorral való skalárszorzat adja meg:

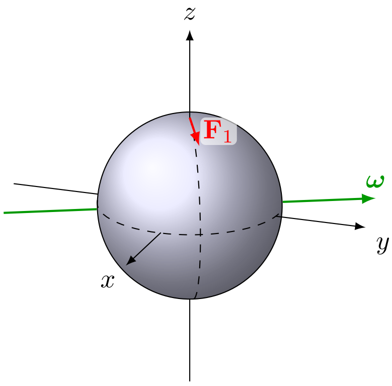
$$a_\parallel = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e_b} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{21}}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2 + 6 + 4) = \frac{8}{\sqrt{21}} \ , \tag{2-2}$$

vagyis az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos komponense:

$$\mathbf{a}_\parallel = a_\parallel \mathbf{e_b} = \frac{8}{21}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \ . \tag{2-3}$$

A merőleges komponens az eredeti vektornak és a párhuzamos komponensnek a különbsége:

$$\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \frac{8}{21}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \frac{50}{21}\mathbf{i} - \frac{47}{21}\mathbf{j} - \frac{11}{21}\mathbf{k} \ . \tag{2-4}$$



3-A. ábra

3. feladat: Egy origó középpontú, $R = 10\,\mathrm{cm}$ sugarú, $m = 1\,\mathrm{kg}$ tömegű homogén tömegeloszlású gömbre két erő hat: $\mathbf{F}_1 = (2\mathbf{i} + \mathbf{j})\,\mathrm{N}$, amelynek a támadáspontja $\mathbf{r}_1 = 0{,}1\mathbf{k}\,\mathrm{m}$, és $\mathbf{F}_2 = (-2\mathbf{i} - \mathbf{j})\,\mathrm{N}$, amelynek a támadáspontja $\mathbf{r}_2 = -0{,}1\mathbf{k}\,\mathrm{m}$. Mi lesz a gömb szöggyorsulás-vektora? $t = 1\,\mathrm{s}$ múlva milyen sebességű lesz az $\mathbf{r}_1$ helyvektorú pontja?

Megoldás:
A szöggyorsulás kiszámításához először meg kell határoznunk a gömbre ható forgatónyomatékot. Mivel a gömböt forgató két erő szimmetrikusan helyezkedik el, és ezek egymás ellentétei, ezért csak a tömegközéppont körüli forgómozgást fognak előidézni. Tudjuk, hogy ebben az esetben a forgástengely

a gömb középpontján fog átmenni, így a forgatónyomatékot is erre vonatkozóan írjuk fel:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = 0{,}1\mathbf{k} \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (-0{,}1\mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \\ &= (-0{,}2\mathbf{i} + 0{,}4\mathbf{j}) \left[\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right] . \end{aligned} \tag{3-1}$$

A forgatónyomaték a szöggyorsulás-vektor és a tehetetlenségi nyomaték szorzata:

$$\mathbf{M} = \Theta\boldsymbol{\beta} \, , \tag{3-2}$$

ahol a gömb tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_{\text{gömb}} = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5} \cdot 1\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}1\,\mathrm{m})^2 = 0{,}004\,\mathrm{kg\,m^2}$. Behelyettesítve:

$$\boldsymbol{\beta} = (-50\mathbf{i} + 100\mathbf{j})\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \, . \tag{3-3}$$

Ha álló helyzetből indult a gömb, akkor a szögsebesség 1 s múlva:

$$\boldsymbol{\omega}(t = 1\,\mathrm{s}) = \boldsymbol{\beta} \cdot t = (-50\mathbf{i} + 100\mathbf{j})\,\frac{1}{\mathrm{s}} \, , \tag{3-4}$$

a kerületi sebesség pedig:

$$\mathbf{v}(1\,\mathrm{s}) = \boldsymbol{\omega}(t = 1\,\mathrm{s}) \times \mathbf{r}_1 = (-50\mathbf{i} + 100\mathbf{j})\,\frac{1}{\mathrm{s}} \times 0{,}1\mathbf{k}\,\mathrm{m} = (10\mathbf{i} + 5\mathbf{j})\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \, . \tag{3-5}$$

4. feladat: Egy pontszerű test mozgását az $r(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$ függvények írják le gömbi koordinátarendszerben. Hogyan néz ki a test sebessége és gyorsulása Descartes-koordinátákkal megadva?

Megoldás:
Az áttérés a Descartes és a gömbi koordinátarendszer között az alábbi:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ z = z \cdot \cos\vartheta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \end{cases} . \tag{4-1}$$

A sebesség Descartes-koordinátákban:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(r(t) \cdot \cos\vartheta(t) \cdot \sin\varphi(t)\big) \tag{4-2}$$

$$\begin{aligned} &= \dot{r}(t) \cdot \cos\vartheta(t) \cdot \sin\varphi(t) \\ &\quad - r(t) \cdot \sin\vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t) \cdot \sin\varphi(t) \\ &\quad + r(t) \cdot \cos\vartheta(t) \cdot \cos\varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \, . \end{aligned} \tag{4-3}$$

A többi komponenst is hasonlóan lehet kiszámolni.

5. feladat: Határozzuk meg az

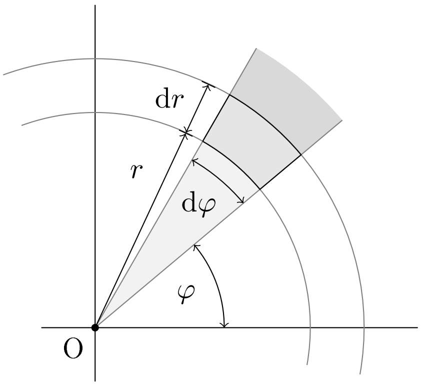
$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{5-1}$$

integrál értékét!

Számoljuk ki ehelyett az I^2 értékét, azt közvetlenül meg tudjuk tenni. Mivel az I egy olyan integrál, amelynek a hasában egy szigorúan pozitív függvény van, így az I értéke biztos, hogy pozitív, vagyis az I megadható úgy, mint a négyzetének a négyzetgyöke.

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-2}$$

Erre az I^2 integrálra úgy lehet tekinteni, mint az $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ alatti térfogatra. Az integrálás szemléletes (Riemann értelemben vett) kiszámítási módja az, hogy ezt a térfogatot úgy határozzuk meg, mint a $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$ alapterületű, $f(x,y)$ magas hasábok térfogatának összege.



5-B. ábra. Hengerkoordináta-rendszer

A megoldás kiszámításához azonban az $f(x,y)$ alatti térfogatot célszerű másként felbontani kis hasábokra. Végezzünk el egy koordinátarendszer-transzformációt, térjünk át polárkoordinátákra:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} . \tag{5-3}$$

Ekkor az integrandus: $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} = \mathrm{e}^{r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)} = \mathrm{e}^{r^2}$. Az integrálási hatásokat is az új koordinátákban kell megadni. A teljes síkot akkor fedjük le, ha r 0-tól végtelenig megy és φ pedig 0-tól 2π-ig.

Kérdés, hogy ekkor hogyan kell tekinteni a kis hasábok alapterületét. Ennek módja, hogy megnézzük, hogy az r és a φ koordináta kis változtatásával mekkora területet fedünk le. A kis körgyűrűdarabnak az egyik oldala $\mathrm{d}r$ hosszú a másik pedig $r\mathrm{d}\varphi$ (ez a $\mathrm{d}\varphi$ szög alatt látszódó ív hossza), vagyis területe $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$.

Tehát

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\ . \tag{5-4}$$

Mivel φ és r teljesen független változó, ezért ez az integrál két egyváltozós integrál szorzata:

$$I^2 = \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\right) = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^{\infty} \cdot [2\pi] = \pi\ , \tag{5-5}$$

vagyis $I = \sqrt{\pi}$.

6. feladat: Egy felület paraméteres megadása hengerkoordinátákban a következő:

$$\begin{aligned} \varrho(s,t) &= R + r\cos(t) \\ z(s,t) &= r\sin(t) \\ \varphi(s,t) &= s\ , \end{aligned}$$

ahol s és t is a $[0,\pi)$ intervallumot futja végig. Mi ez az alakzat? Hogyan néz ki a paraméteres megadás Descartes-koordinátákban?

7. feladat: Egy origó középpontú homogén fémkockában a hőmérséklet egy adott pillanatban a következő módon függ a helytől:

$$T(x,y,z) = T_0 + T_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha(x+y)\right) \cdot \mathrm{e}^{\beta z} \ .$$

Milyen irányú a hőáramlás az origóban, illetve a tér többi pontjában ebben a pillanatban?

Megoldás:

A hőáramlás a hőmérséklet gradiensével van kapcsolatban. A Fick-törvény alapján: $\mathbf{j}_\mathrm{q} = -\lambda \boldsymbol{\nabla} T$, ahol λ a hővezetési együttható. A feladatunk tehát, hogy kiszámoljuk a feladatban megadott függvény gradiensét. Descartes-koordinátákban $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, vagyis

$$\boldsymbol{\nabla} T = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) T(x,y,z) = \left(\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}\right) , \tag{7-1}$$

ahol az egyes komponensek:

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x} = T_1 \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha(x+y)\right) \cdot \mathrm{e}^{\beta z} \ , \tag{7-2}$$

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y} = T_1 \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha(x+y)\right) \cdot \mathrm{e}^{\beta z} \ , \tag{7-3}$$

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = T_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha(x+y)\right) \cdot \beta \mathrm{e}^{\beta z} \ . \tag{7-4}$$

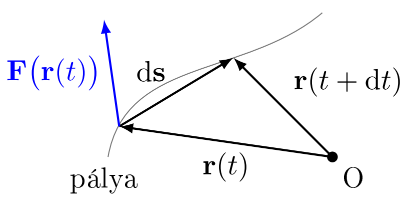
Így a hőáram:

$$\mathbf{j}_\mathrm{q} = -\lambda T_1 \mathrm{e}^{\beta z} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha(x+y)\right) \cdot \left(\alpha, \alpha, \beta \,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha(x+y)\right)\right) \ . \tag{7-5}$$

8. feladat: Egy tömegpontra a helyétől függő $\mathbf{F}(x,y,z) = a(x\mathbf{i} + y\mathbf{k}) + bz^2\mathbf{j}$ erő hat. Mekkora munkát végez az erőtér, miközben a tömegpont $\mathbf{r}(t) = ct\mathbf{i} + dt^2\mathbf{j}$ szerint mozog $t = 0$ időtől $t = T$-ig?

A feladat megoldása során egy vonalintegrált kell kiszámítani. Ennek megértéséhez először emlékezzünk vissza arra, hogy mi az a munka. Egy állandó nagyságú $\mathbf{F}$ erő munkája egy egyenes vonal mentén történő elmozdulás során megegyezik az $\mathbf{F}$ és a test elmozdulásvektorának skalárszorzatával: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$. A mi esetünkben azonban a testre a tér minden pontjában más-más erő hat, illetve nem egy egyenes, hanem a fent megadott út mentén mozog. Kérdés, hogy ekkor hogyan lehet kiszámolni ezt a mennyiséget.

Először is osszuk fel a test mozgását apró elemi lépésekre. A t és a $t + \mathrm{d}t$ időpillanat között a test az $\mathbf{r}(t)$ és az $\mathbf{r}(t + \mathrm{d}t)$ pontok között mozdul el. Mivel $\mathrm{d}t$ nagyon rövid idő, ezért az elmozdulást közelíthetjük egy egyenes szakasszal:



8-A. ábra

$$\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{r}(t + \mathrm{d}t) - \mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \mathrm{d}t) - \mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \mathbf{v} \,\mathrm{d}t \ . \tag{8-1}$$

Mivel ez a kis elmozdulás nagyon pici, így az erőt tekinthetjük végig állandóak az elmozdulás során, így az elemi munkát felírhatjuk úgy, mint

$$\mathrm{d}W(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \,\mathrm{d}t = \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{v}(t) \,\mathrm{d}t \ , \tag{8-2}$$

ahol az erőt az $\mathbf{r}$ helyen kell venni, és az $\mathbf{r}$ pedig a test helyzete a t időpillanatban. A test sebességét szintén a t időpontban kell venni.

Ezek ismeretében a teljes munkát úgy írhatjuk fel, mint az elemi munkáknak az összege $t = 0$-tól $t = T$-ig:

$$W = \int_0^T \mathrm{d}W(t) = \int_0^T \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\ . \tag{8-3}$$

Ennek kiszámításához meg kell határoznunk a test sebességét, amely, ahogy a (8-1) egyenletből is látszik, a helyvektor idő szerinti deriváltja:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(ct, dt^2, 0\big) = \left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}(dt^2)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}t}\right) = \big(c, 2dt, 0\big)\ , \tag{8-4}$$

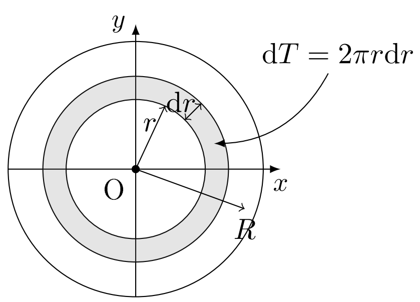
illetve meg kell határoznunk az $\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)$ függvényt. Ez nem más, mint az erő értéke azon a helyen, ahol a test a t időpontban van. Ezt úgy kapjuk meg, hogy behelyettesítjük az x, y és z változók helyére a test mozgását leíró $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ függvényeket, amelyeket le tudunk olvasni az $\mathbf{r}(t)$ megadott alakjából:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) &= \mathbf{F}\big(x(t),y(t),z(t)\big) = \mathbf{F}\Big(ct,dt^2,0\Big) \\ &= a\Big(ct\mathbf{i} + dt^2\mathbf{k}\Big) + b(0)^2\mathbf{j} = act\mathbf{i} + adt^2\mathbf{k} = \big(act, 0, adt^2\big)\ . \end{aligned} \tag{8-5}$$

Ezeket felhasználva már ki tudjuk számolni a fenti integrált:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \big(act, 0, adt^2\big) \cdot \big(c, 2dt, 0\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^T ac^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= ac^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{ac^2}{2}T^2\ . \end{aligned} \tag{8-6}$$

9. feladat: Egy R sugarú csőben folyadék áramlik, sebessége mindenhol párhuzamos a cső tengelyével, nagysága csak a cső középvonalától mért r távolságtól függ $v(r) = C \cdot (R^2 - r^2)$ módon. Mennyi folyadék áramlik át a cső egy keresztmetszetén t idő alatt?



9-A. ábra

Tekintsük a csőnek egy keresztmetszetét. A problémát az jelenti, hogy a folyadék áramlási sebessége más a cső pontjain. Osszuk fel a csövet kis körgyűrűkre. Mivel az áramlás hengerszimmetrikus (az áramlás sebessége csak sugártól függ), ezért egy ilyen kis körgyűrűn mindenhol ugyanakkora lesz az áramlási sebesség.

Egy ilyen körgyűrű területe $\mathrm{d}T = 2\pi r\mathrm{d}r$. Ezt úgy számolhatjuk ki, mint egy $\mathrm{d}r$ széles $2\pi r$ hosszú téglalap területét. Ha v az áramlás sebessége, akkor t idő alatt az áramlás egy frontja $v \cdot t$ távolságot halad előre. $\mathrm{d}T$ alapterületen ez a t idő alatt $\mathrm{d}V = \mathrm{d}T \cdot v \cdot t = 2\pi r\mathrm{d}rv(r)t$ térfogatnyi folyadék áramlik át.

Már csak összegeznünk kell az összes ilyen kis körgyűrűdarabon átfolyt térfogatot:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \mathrm{d}V(r) = \int_0^R 2\pi r\mathrm{d}rv(r)t = 2\pi tC\int_0^R r(R^2 - r^2)\mathrm{d}r \\ &= 2\pi tC\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi}{2}tCR^4\ . \end{aligned} \tag{9-1}$$

Tehát egy csövön átáramló folyadék a mennyisége a cső sugarának negyedik hatványával arányos.

10. feladat: Határozzuk meg annak az R sugarú gömbnek a tömegét és a z tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát, amelynek a sűrűsége a z tengely mentén változik:

$$\rho(x,y,z) = \rho_0 + \alpha \cdot z \,. \tag{10-1}$$

Ahhoz, hogy meg tudjuk oldani a feladatot, tudnunk kell, hogy hogyan lehet tömeget és tehetetlenségi nyomatékot számolni. Ezeket az alábbi formulák adják meg:

$$M = \iiint\limits_{\text{test}} \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \,, \quad \Theta = \iiint\limits_{\text{test}} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \,, \tag{10-2}$$

ahol térfogati integrálokat kell kiszámítani. A térfogati integrál azt jelenti, hogy a teret felosztjuk elemi darabokra, Descartes-koordinátákban elemi $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ térfogatú téglatestekre, és összeadjuk az integrandus értékét megszorozva a térfogat nagyságával minden egyes pici téglatestre. Azonban Descartes-koordinátákban az integrált nagyon nehézkes lenne kiszámítani.

Ehelyett a feladatot két különböző módon is megoldjuk, először hengerkoordináta-rendszerben, másodszorra pedig gömbikoordináta-rendszerben.

1. megoldás: Mivel a sűrűség hengerszimmetrikus (a z tengely körül forgásszimmetrikus), így talán érdemes bevezetni a hengerkoordinátákat. Az erre való áttérési szabály:

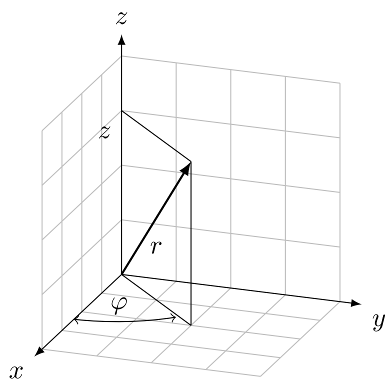
$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \,. \tag{10-3}$$

Az integrandus a tömeg esetében nem változik, a tehetetlenségi nyomatéknál pedig $(x^2+y^2)\rho(x,y,z) = r^2(\rho_0+\alpha\cdot z)$.

Itt is meg kell vizsgálni, hogy a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ térfogatelem helyett, mekkora lesz az infinitezimális térfogat. A polárkoordinátáknál láttuk, hogy egy $\mathrm{d}r$ $\mathrm{d}\varphi$ darabka területe $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, akkor egy ilyen alapú $\mathrm{d}z$ magas térfogatelem térfogata $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$. Vagyis

$$M = \iiint\limits_{\text{test}} \rho(r,\varphi,z)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\text{test}} (\rho_0+\alpha\cdot z)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \,, \tag{10-4}$$

$$\Theta = \iiint\limits_{\text{test}} r^2(\rho_0+\alpha\cdot z)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \,. \tag{10-5}$$



10-A. ábra. Hengerkoordináta-rendszer

Nézzük meg, hogy hogyan tudjuk megadni az integrálási határokat, ha az origó középpontú R sugarú gömböt akarjuk végigpásztázni. A z koordináta $-R$-től R-ig megy. Mivel a rendszer forgásszimmetrikus, így a φ z-től függetlenül minden esetben 0 és 2π között vehet fel bármilyen értéket. Az r koordináta viszont nem lehet akármi, annak határa függ attól, hogy milyen z értéknél vagyunk. Könnyen végiggondolható, hogy z magasságban a gömb metszete egy $\sqrt{R^2-z^2}$ sugarú kör, vagyis r 0-tól eddig az értékig mehet. Ez leírva:

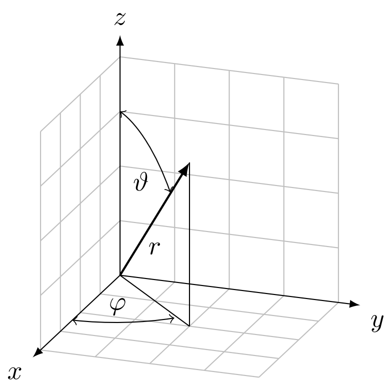
$$\begin{aligned} M &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} (\rho_0+\alpha\cdot z)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_{-R}^{R}\left(\int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} (\rho_0+\alpha\cdot z)\, r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\varphi \,. \end{aligned} \tag{10-6}$$

Itt mivel az r szerinti integrál határa függ z-től, ezért ez a két integrál nem emelhető át egymáson. Azonban ezt is igen magától értetődően kell megoldani:

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} (\rho_0 + \alpha \cdot z)\, r\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} (\rho_0 + \alpha \cdot z)\, r\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\mathrm{d}r \right) (\rho_0 + \alpha \cdot z)\, \mathrm{d}z = 2\pi \int_{-R}^{R} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} (\rho_0 + \alpha \cdot z)\, \mathrm{d}z \\
&= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)(\rho_0 + \alpha \cdot z)\, \mathrm{d}z = \pi \int_{-R}^{R} (R^2\rho_0 + R^2\alpha \cdot z - z^2\rho_0 - \alpha z^3)\, \mathrm{d}z \\
&= \pi \left[R^2\rho_0 \cdot z + R^2\alpha \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\rho_0 - \alpha\frac{z^4}{4} \right]_{-R}^{R} = 2\pi \left(\rho_0 - \frac{1}{3}\rho_0 \right) R^3 \\
&= \frac{4}{3} R^3 \pi \cdot \rho_0 \,.
\end{aligned} \tag{10-7}$$

A tehetetlenségi nyomaték ugyanígy:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^2 \rho(x,y,z)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = 2\pi \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3 (\rho_0 + \alpha \cdot z)\, \mathrm{d}r\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{-R}^{R} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} (\rho_0 + \alpha \cdot z)\, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2} \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 (\rho_0 + \alpha \cdot z)\, \mathrm{d}z \\
&= \rho_0 \frac{\pi}{2} \left[R^4 z - 2R^2 \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_{-R}^{R} = R^5 \rho_0 \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) \\
&= \frac{8}{15} R^5 \rho_0 \pi \frac{8}{15} = \frac{2}{5} \left(\frac{4}{3} R^3 \pi \rho_0 \right) R^2 = \frac{2}{5} M R^2 \,.
\end{aligned} \tag{10-8}$$



10-B. ábra. Gömbkoordinátarendszer

2. megoldás: Mivel a test határa gömbszimmetrikus ezért akár a gömbi koordinátákat is bevezethetjük. Az erre való áttérési szabály:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\vartheta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \,. \tag{10-9}$$

Levezethető, hogy az infinitezimális térfogat $\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$. Ugyanazt kell tegyük, mint az előbb: be kell helyettesíteni az új koordinátákat a sűrűségfüggvénybe, meg kell határozni az integrálási határokat, majd el kell végezni az egyváltozós integrálokat.

Mivel egy gömbön belül integrálunk, így az r változó $0 \ldots R$ tartományon lehet, a ϑ $0 \ldots \pi$-ig mehet, a φ pedig $0 \ldots 2\pi$-ig. Így tehát

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} (\rho_0 + \alpha \cdot r \cos\vartheta)\, r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^\pi \int_0^R (\rho_0 + \alpha \cdot r \cos\vartheta)\, r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\pi \int_0^\pi \left(\rho_0 \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R + \alpha \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \cos\vartheta \right) \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d} \\
&= \frac{2}{3}\rho_0 R^3 \pi \int_0^\pi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta + 2\pi\alpha \cdot \frac{R^4}{4} \int_0^\pi \cos\vartheta \, \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{2}{3}\rho_0 R^3 \pi \left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi + 2\pi\alpha \cdot \frac{R^4}{4} \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{4}{3}R^3\pi \cdot \rho_0 + 2\pi\alpha \cdot \frac{R^4}{4} \underbrace{\left[\frac{-\cos(2\vartheta)}{4}\right]_0^\pi}_{0} = \frac{4}{3}R^3\pi \cdot \rho_0 \, .
\end{aligned}
\tag{10-10}
$$

és

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin^2\vartheta (\rho_0 + \alpha \cdot r\cos\vartheta)\, r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^3\vartheta (\rho_0 + \alpha \cdot r\cos\vartheta)\, \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\pi \int_0^\pi \left(\rho_0 \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R + \alpha \cdot \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^R \cos\vartheta \right) \sin^3\vartheta \mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{2}{5}\rho_0 R^5 \pi \int_0^\pi \sin^3\vartheta \mathrm{d}\vartheta + 2\pi\alpha \cdot \frac{R^6}{6} \int_0^\pi \cos\vartheta \sin^3\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, .
\end{aligned}
\tag{10-11}
$$

Itt a második integrált könnyű kiszámítani, ha észrevesszük, hogy megjelent a $\sin^4\vartheta$ deriváltja:

$$
\int_0^\pi \cos\vartheta \sin^3\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_0^\pi = 0 \, . \tag{10-12}
$$

Az első integrál kicsit trükkösebb. Használjuk fel a trigonometrikus átalakító képleteket, hogy az előző trükköt ismét tudjuk használni:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^3\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta &= \int_0^\pi \sin^2 \cdot \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \int_0^\pi (1-\cos^2\vartheta) \cdot \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^\pi \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta - \int_0^\pi \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi + \left[\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^\pi \\
&= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \, ,
\end{aligned}
\tag{10-13}
$$

tehát

$$
\Theta = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}R^3\pi\rho_0\right) R^2 = \frac{2}{5} M R^2 \, . \tag{10-14}
$$

Megjegyzés:

Láthatjuk, hogy mind a két módszerrel ugyanazt a megoldást kaptuk, ez nem is lehetne másképp, az eredménynek minden esetben függetlennek kell lennie attól, hogy milyen koordináta-rendszert választunk. Vegyük észre, hogy a gömb tömege pont megegyezik egy ρ_0 sűrűségű homogén gömb tömegével. Ez magától értetődik hiszen ez egy olyan gömb, amelynek a teteje pont annyival nehezebb, mint amennyivel az alja könnyebb. A tehetetlenségi nyomatéka is megegyezik egy homogén gömbével. Ez is a szimmetria és a speciálisan megválasztott forgástengely következménye. Ha ezeket észrevesszük az elején, akkor egy kis indoklással egy sor integrálás nélkül is megadhatjuk az eredményt.