Fizika 2i, 4. feladatsor

7. hét

A mai órához szükséges elméleti anyag:

- kapacitás, sík-, henger- és gömbkondenzátor
- A Biot–Savart-törvény:
$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^2}$$
- Az Ampère-féle gerjesztési törvény:
$$\oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$
- Mágneses indukcióvektor és térerősség:
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

Órai feladatok:

6. feladat: Mekkora legnagyobb Q töltést vihetünk a 15 cm sugarú fémgömbre, ha feltételezzük, a hogy a levegő dielektromos szilárdsága 30 kV/cm?

Megoldás:
A gömb tere:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

Ez maximális a lehető legkisebb sugárnál, tehát a gömb szélén. Legyen itt a térerősség egyenlő a dielektromos szilárdsággal. Így a töltés:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 E r^2 = 7{,}5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}.$$

2. feladat: Egy síkkondenzátor dielektrikuma két rétegből áll, amelyek elválasztó felülete az elektródákkal párhuzamos. Meghatározandó a kondenzátorra kapcsolható legnagyobb feszültség, ha a dielektrikumok adatai a következők:
az első réteg vastagsága $d_1 = 1\,\mathrm{cm}$, dielektromos állandója $\varepsilon_{1\mathrm{r}} = 5{,}5$, dielektromos szilárdsága $E_{1\mathrm{kr}} = 350\,\mathrm{kV/cm}$;
a második réteg megfelelő adatai: $d_2 = 0{,}6\,\mathrm{cm}$, dielektromos állandója $\varepsilon_{2\mathrm{r}} = 2{,}2$, dielektromos szilárdsága $E_{2\mathrm{kr}} = 300\,\mathrm{kV/cm}$.

Megoldás: Ezt a kondenzátort úgy is el tudjuk képzelni, mint két sorba kapcsolt kondenzátort. A két kondenzátor ugyanakkora Q töltésre töltődik fel, hiszen a két belső fegyverzeten lévő töltés összege mindig nulla:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 \\ C_1U_1 &= C_2U_2\,. \end{aligned}$$

A rendszeren eső feszültség a két kondenzátoron eső feszültségek összege (felhasználva az előző összefüggést):

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= U_1 + \frac{C_1}{C_2}U_1 = \left(1+\frac{C_1}{C_2}\right)U_1 = \left(1+\frac{C_2}{C_1}\right)U_2\,. \end{aligned}$$

Az átütési szilárdság megadja U_1 illetve U_2 maximális értékét:

$$U_{1,\mathrm{max}} = E_{1,\mathrm{kr}}\cdot d_1 = 3{,}5\cdot 10^7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\cdot 0{,}01\,\mathrm{m} = 3{,}5\cdot 10^5\,\mathrm{V}\,,$$
$$U_{2,\mathrm{max}} = E_{2,\mathrm{kr}}\cdot d_1 = 3\cdot 10^7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\cdot 0{,}006\,\mathrm{m} = 1{,}8\cdot 10^5\,\mathrm{V}\,.$$

A teljes rendszerre kapcsolható maximális feszültség:

$$\begin{aligned} U_{(1),\mathrm{max}} &= \left(1+\frac{C_1}{C_2}\right)U_{1,\mathrm{max}} = \left(1+\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\frac{A}{d_1}}{\varepsilon_0\varepsilon_2\frac{A}{d_2}}\right)U_{1,\mathrm{max}} \\ &= \left(1+\frac{\varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_2 d_1}\right)U_{1,\mathrm{max}} \\ &= \left(1+\frac{5{,}5\cdot 0{,}006\,\mathrm{m}}{2{,}2\cdot 0{,}01\,\mathrm{m}}\right)\cdot 3{,}5\cdot 10^5\,\mathrm{V} = 8{,}75\cdot 10^5\,\mathrm{V}\,, \\ U_{(2),\mathrm{max}} &= \left(1+\frac{C_2}{C_1}\right)U_{2,\mathrm{max}} = \left(1+\frac{\varepsilon_2 d_1}{\varepsilon_1 d_2}\right)U_{2,\mathrm{max}} \\ &= \left(1+\frac{2{,}2\cdot 0{,}01\,\mathrm{m}}{5{,}5\cdot 0{,}006\,\mathrm{m}}\right)\cdot 1.8\cdot 10^5\,\mathrm{V} = 3\cdot 10^5\,\mathrm{V}\,. \end{aligned}$$

A két érték közül legfeljebb a kisebbet, vagyis 30 000 V-ot kapcsolhatjuk a rendszerre, annak érdekében, hogy megelőzzük az átütést.

3. feladat: Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy a dielektrikumok felülete a fegyverzetekre merőleges sík. Az elektród távolság 1,6 cm.

Megoldás:
Most a kritikus feszültségek:

$$U_{(1),\max} = E_{1\mathrm{kr}} d \qquad U_{(2),\max} = E_{2\mathrm{kr}} d$$

A kritikus érték érték a kettő minimuma, amely:

$$U_{\mathrm{kr}} = E_{2\mathrm{kr}} d = 480\,\mathrm{kV}.$$

4. feladat: Egy R sugarú gömbben ρ állandó töltéssűrűség van. Határozzuk meg az elrendezés energiáját!

Megoldás:
Az energia a töltések odamozgatásának munkája:

$$w = \frac{1}{2} QU.$$

Gömbre tudjuk, hogy ($r < R$):

$$U(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

A munka:

$$W = \frac{1}{2}\int U(r)\rho \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)\rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$
$$= \dots = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}.$$

5. feladat: Egy síkkondenzátornál a lemezek területe $200\,\mathrm{cm}^2$, a lemezek távolsága 0,1 cm. A fegyverzetek között üveglemez van ($\varepsilon_\mathrm{r} = 5$), amely teljesen betölti a kondenzátorlemezei közötti térséget. Hogyan változik meg a kondenzátor energiája, ha az üveget eltávolítjuk? A kondenzátor egész idő alatt 300 V elektromotoros erejű telephez van kapcsolva.

Megoldás:
Előtte:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{A}{d} U^2$$
$$= 3{,}98 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}.$$

Utána $\varepsilon_\mathrm{r}' = 1$

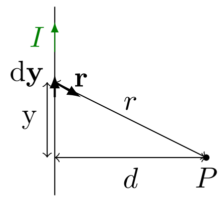
$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}' \frac{A}{d} U^2$$
$$= 7{,}96 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}.$$

A kettő különbsége:

$$W_2 - W_1 = -3{,}189 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}.$$

6. feladat: Határozzuk meg egy végtelen hosszú egyenes vezető mágneses erőterét, mint a vezetőtől mért távolság függvényét. A vezetőben I erősségű áram folyik. A számításokat végezzük
a) Biot-Savart törvény segítségével és
b) a gerjesztési törvény segítségével.

Megoldás:
a,



Kis szakaszokra bontás, egy szakasz járuléka:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}y}{r^2}\sin\theta$$

A geometriából:

$$r^2 = d^2 + y^2 \qquad \sin\theta = \frac{d}{r}$$

Összesítve:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}y}{d^2+y^2}\frac{d}{\sqrt{d^2+y^2}}$$

A teljes egyenes járuléka:

$$B(d) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 d}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}y}{(d^2+y^2)^{3/2}} = \dots$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

A mágneses térerősség

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi d}.$$

b, Gerjesztési törvényhez legyen a görbe egy kör az egyenes körül. Így

$$\oint H\mathrm{d}l = \sum I$$
$$H 2 r\pi = I$$
$$H = \frac{I}{2\pi}\frac{1}{r}.$$

7. feladat: Határozzuk meg egy R sugarú körvezető mágneses erőterét a körvezető tengelyén a középponttól d távolságra levő M pontban. A vezetőben I erősségű áram folyik.

Megoldás:

Kis szakaszokra bontás, egy kis körszakasz járuléka:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}\sin\theta,$$

és a geometria alapján

$$r^2 = d^2 + R^2 \qquad \theta = 90°.$$

A szimmetria miatt a B-nek csak a tengely irányú járuléka marad meg:

$$\mathrm{d}B_\mathrm{x} = \mathrm{d}B\sin\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{d^2+R^2}\frac{R}{\sqrt{R^2+d^2}}.$$

A teljes mágneses indukcióhoz ezt integráljuk a teljes körre:

$$B_\mathrm{x} = \int_0^{2R\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(d^2+R^2)^{3/2}}\mathrm{d}l = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(d^2+R^2)^{3/2}}$$

8. feladat: $I = 20\,\mathrm{A}$ erősségű áram $A = 10\,\mathrm{mm}^2$ keresztmetszetű vastag körvezetőn folyik keresztül. Az áram által keltett mágneses erőtér értéke a körvezető középpontjában $H = 178\,\mathrm{A/m}$. Mekkora feszültséget kapcsoltunk a körvezető végeire? A körvezető fajlagos ellenállása $\rho = 0{,}017\,\Omega\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$.

Megoldás:

A körvezető ellenállás:

$$R = \rho\frac{l}{A} = \rho\frac{2r\pi}{A},$$

ahol r a körvezető sugara. Az Ohm-törvény értelmében a feszültség $V = RI = \rho\frac{2r\pi}{A}$. Az előző feladatból kifejezhető a mágneses térerősség a kör közepén ($d = 0$):

$$H = \frac{I}{2r},$$

amelyből kifejezhető a sugár, és beírható a feszültség képletbe:

$$V = \rho\frac{2r\pi}{A} = \rho\frac{2I\pi}{2AH} = \cdots = 0{,}012\,\mathrm{V}.$$

9. feladat: Egy szolenoid tekercselése 0,8 mm átmérőjű huzalból készült. Az egyes menetek szorosan illeszkednek egymáshoz. Mekkora lesz a H mágneses erőtér értéke a tekercs belsejében 1 A erősségű áram esetén?.

Megoldás:

A gerjesztési törvényhez a görbe legyen egy téglalap, a tengellyel párhuzamos és merőleges oldalakkal. A négy oldal közül csak a tekercsben levő ad járulékot (mert nincs tér vagy a skaláris szorzat 0):

$$\oint \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_C^D \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l} + 0 = Hl \qquad \sum I = NI$$

$$H = \frac{NI}{l}$$

A tekercs hossza a sűrű tekercselés miatt $l = Nd$. Így:

$$H = \frac{NI}{Nd} = \frac{I}{d} = 1250\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$