Fizika 2i, 3. feladatsor

5. hét

A mai órához szükséges elméleti anyag:

- kapacitás
- sík-, henger- és gömbkondenzátor

Síkkondenzátorban a feszültség és kapacitás:

$$U = \frac{Q}{\varepsilon A} d$$
$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Hengerkondenzátorban a feszültség és kapacitás:

$$U = \frac{Q}{\varepsilon 2\pi L} \ln \frac{r_{\mathrm{b}}}{r_{\mathrm{k}}}$$
$$C = \frac{\varepsilon 2\pi L}{\ln \frac{r_{\mathrm{b}}}{r_{\mathrm{k}}}}$$

Gömbkondenzátorban a feszültség és kapacitás:

$$U = \frac{Q}{\varepsilon 4\pi} \frac{r_{\mathrm{b}} - r_{\mathrm{k}}}{r_{\mathrm{b}} r_{\mathrm{k}}}$$
$$C = \varepsilon 4\pi \frac{r_{\mathrm{b}} r_{\mathrm{k}}}{r_{\mathrm{b}} - r_{\mathrm{k}}}$$

Órai feladatok:

1. feladat: Két végtelen hosszú koaxiális hengert egynemű töltéssel töltünk fel úgy, hogy a töltéssűrűség külső hengeren $2/3 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{cm}^2}$, a belsőn pedig $2/3 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{cm}^2}$. A hengerek sugara 10 mm, illetve 10,5 mm. Határozzuk meg a hengerek közötti potenciálkülönbséget!

Megoldás:
Hengerkondenzátorban a potenciál:

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{r_{\mathrm{b}}}{r_{\mathrm{k}}} = \frac{\sigma 2\pi L r_{\mathrm{b}}}{2\pi L \varepsilon_0} \ln \frac{r_{\mathrm{b}}}{r_{\mathrm{k}}} = -18{,}376\,\mathrm{V}.$$

2. feladat: Egy síkkondenzátor kapacitása 600 pF. Mennyivel változik meg a kondenzátor kapacitása, ha a fegyverzetek közé párhuzamosan olyan fémlemezt helyezünk, amelynek a vastagsága a fegyverzetek közötti távolság 1/4-e?

Megoldás:
Fémben nincsen elektromos tér, így a feszültség a két oldal között megváltozik. Előtte $U = Ed$ volt, most $U' = E\left(d - \frac{1}{4}d\right) = \frac{3}{4}Ed$ lesz. Az új kapacitás:

$$C' = \frac{Q}{U'} = \varepsilon_0 \frac{A}{\frac{3}{4}d} = \frac{4}{3}C = 800\,\mathrm{pF}.$$

A változás 200 pF.

3. feladat: Egy síkkondenzátor fegyverzetei d távolságra vannak. ε_0 és ε_2 dielektromos állandójú dielektrikummal töltjük ki a fegyverzetek közötti térrészt olyan módon, hogy a határfelületük merőleges a fegyverzetekre, és A_1, illetve A_2 felületen érintkeznek a fegyverzetekkel. Határozza meg az elrendezés kapacitását!

Megoldás:
Dielektrikumban ε_0 helyett $\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0$ szerepel mindig, így a kapacitás is megváltozik, és $\varepsilon_{\mathrm{r}} C$ lesz. Azaz:

$$C' = \frac{Q}{U'} = \varepsilon_{\mathrm{r}} \frac{Q}{U},$$

amelyből az új feszültség $U' = \frac{U}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$. Így az elektromos tér is változik, mert $E = \frac{U}{d}$, azaz:

$$E' = \frac{U'}{d} = \frac{E}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}.$$

A két szakaszon a térerősség ugyanaz $E_1 = E_2 = E$, a tölteseloszlás nem lesz egyenletes, de

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}.$$

A kapacitás:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2}{Ed} = \frac{E_1 \varepsilon_1 A_1 + E_2 \varepsilon_2 A_2}{Ed}$$
$$= \frac{\varepsilon_1 A_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 A_2}{d} = C_1 + C_2.$$

4. feladat: Határozzuk meg a gömbkondenzátor kapacitását, ha a fegyverzetek sugara r ill. R és a fegyverzetek közötti térrészben ε_1 és ε_2 dielektromos állandójú szigetelőket rétegezünk úgy, hogy a két dielektrikum határfelülete a sugarú koncentrikus gömb.

Utolsó módosítás 2015. március 10. 15:13

Megoldás: Az elektromos tér a két gömb között:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2},$$

a potenciálkülönbség egy réteg két határa között:

$$U = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_r^a \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)$$

A két rétegen adódó fezültség összeadódik:

$$\Delta U = U_{ra} + U_{aR} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}1}a} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}1}r} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}2}R} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}2}a}\right)$$

A kapacitás:

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}1}a} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}1}r} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}2}R} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}2}a}\right)^{-1},$$

amelyről belátható, hogy megfelel két gömbkondenzátor soros kapcsolásának.

5. feladat: Határozzuk meg a h magasságú hengerkondenzátor kapacitását, ha a fegyverzetek sugara r ill. R és a közöttük levő tér felét ε_1, a másik felét ε_2 dielektromos állandójú közeg tölti ki úgy, hogy a szigetelők határfelülete a henger tengelyén átfektetett sík.

Megoldás:
A két félhengeren a térerősség:

$$E_1(r') = \frac{Q_1}{\pi\varepsilon_1 h r'} \qquad E_2(r') = \frac{Q_2}{\pi\varepsilon_2 h r'}$$

A potenciál hengerkondenzátoron:

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon h}\ln\frac{R}{r} = Er'\ln\frac{R}{r}$$

A kapacitás

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \cdots = \pi h\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\ln\frac{R}{r}}.$$

6. feladat: Mekkora legnagyobb Q töltést vihetünk a 15 cm sugarú fémgömbre, ha feltételezzük, a hogy a levegő dielektromos szilárdsága 30 kV/cm?

Megoldás:
A gömb tere:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

Ez maximális a lehető legkisebb sugárnál, tehát a gömb szélén. Legyen itt a térerősség egyenlő a dielektromos szilárdsággal. Így a töltés:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 E r^2 = 7{,}5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}.$$

7. feladat: Az r és R sugarú koncentrikus gömbök közötti teret inhomogén szigetelő tölti ki, melynek dielektromos állandója a közös centrumtól mért távolság függvénye. Milyen függvény szerint kell változnia a dielektromos állandónak, hogy a kondenzátort feltöltve, az elektromos térerősség nagysága a fegyverzetek közötti térrészben állandó legyen. Számítsuk ki a kondenzátor kapacitását!

Megoldás: Bent a tér:

$$E(r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon(r')}\frac{Q}{r'^2},$$

ha Q töltés van a belső gömbön. Ez homogén, ha olyan, mint egy gömbkondenzátorban a tér:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon(r')}\frac{Q}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$$

$$\varepsilon(r') = \varepsilon\frac{r^2}{r'^2}$$

A potenciál:

$$U = -\int_r^R E(r')\mathrm{d}r' = \cdots = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}(R - r).$$

A kapacitás így

$$C = \frac{Q}{|V|} = 4\pi\varepsilon\frac{r^2}{R - r}.$$