Feladatok a zárthelyi előtt

2015. október 26.

Tartalomjegyzék

A feladatokat az órai és otthoni feladatok, pár korábbi zárthelyi és a bevezető fizika tárgy ideillő példái közül válogattam. Vannak feladatok, amelyek az órai szintnél egyszerűbbek, ezek inkább a fogalom szemléltetésére vannak, de akár előkerülhetnek egy igazhamis kérdésként is.

1. Kinematika

1.1. Egyenes vonalú mozgások

1.1.1. Egyenletes mozgás

1.1. feladat: Egyenletesen mozgó gyalogos sebessége $v = 4{,}5\,\mathrm{km/h}$. Mekkora utat tesz meg $t = 75$ perc alatt?

A megtett út:

$$s = v \cdot t = 4{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 75\,\mathrm{min} = 4{,}5 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} \cdot 75 \cdot 60\,\mathrm{s} = 5625\,\mathrm{m}\,.$$

6. feladat: Egy gépkocsi 30 percig $50\,\mathrm{km/h}$ állandó sebességgel haladt, majd 75 percen keresztül $60\,\mathrm{km/h}$ volt a sebessége. Mekkora az átlagsebessége?

$v_{\text{átl}} = 57{,}14\,\mathrm{km/h}$

1.6. feladat: Két helyiség között a kocsik átlagsebessége az egyik irányban $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$, a másik irányban $v_2 = 60\,\mathrm{km/h}$. Mekkora az átlagsebesség egy teljes fordulót figyelembe véve?

Az átlagsebesség az teljes megtett út és az ehhez szükséges idő hányadosa. Legyen s a távolság a két település között. Ekkor a teljes megtett út $2s$. Az odaút és a visszaút időtartama:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} \qquad t_2 = \frac{s}{v_2}\,,$$

vagyis az átlagsebesség:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}\,.$$

1.17. feladat: Egy gépkocsi céljához vezető út felén $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$ állandó sebességgel halad. Mekkora legyen a sebessége az út másik felén (v_2), hogy az egész utat figyelembe véve átlagsebessége $\overline{v} = 50\,\mathrm{km/h}$ legyen?

Az átlagsebesség az összes megtett út és az ehhez szükséges idő hányadosa. Legyen a teljes út s hosszúságú. Az út első és második felének megtételéhez szükséges idő:

$$t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1}\,, \qquad t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{v_2}\,.$$

Az átlagsebesség tehát

$$\overline{v} = \frac{\frac{s}{2} + \frac{s}{2}}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{\frac{s}{2}}{v_1} + \frac{\frac{s}{2}}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}\,,$$

ahonnan

$$v_2 = \frac{1}{\frac{2}{\overline{v}} - \frac{1}{v_1}} = \frac{1}{\frac{2}{50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} - \frac{1}{40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}} = 66{,}7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

1.19. feladat: Az esőcseppek függőleges irányban esnek $v_{\text{eső}} = 6\,\mathrm{m/s}$ sebességgel. Az esőcseppek nyomai a vonatablakon a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró csíkok. Milyen gyorsan megy a vonat?

A vonatablakon lévő csíkok az esőcseppek látszólagos sebességvektorával egy irányba mutatnak. Az esőcseppek függőleges sebességvektora, illetve a vonat vízszintes sebességvektora egy derékszögű háromszöget határoz meg, ahol a háromszög átfogójának hossza megegyezik a cseppek látszólagos, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró sebességvektorának hosszával. A háromszögben a megfelelő szögfüggvényt felírva:

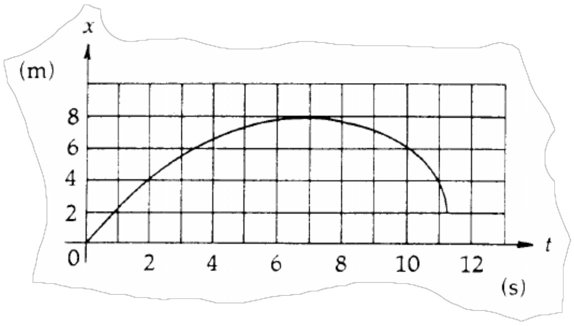
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_{\text{eső}}}{v_{\text{vonat}}}$$

$$v_{\text{vonat}} = \frac{v_{\text{eső}}}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{tg}\,30°} = 10{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

6. feladat: Egy halász a csónakjával a folyón lefelé evez. Egy híd alatt áthaladva vízbe esik a csáklyája, ezt azonban csak fél óra múlva veszi észre. Ekkor visszafordul, és a hídtól 8 km-rel lejjebb éri utol a csáklyát. Mekkora a folyó sebessége, ha a halász a folyón felfelé és lefelé haladva egyformán evez?

1.1.2. Gyorsuló mozgás

2B-19. feladat: Az ábra egy egyenesvonalú pályán mozgó részecske út-idő grafikonját mutatja.
a, Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ és $t_2 = 5\,\mathrm{s}$ időintervallumra!
b. Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége?
c. Mekkora a $t = 10\,\mathrm{s}$ időpontban a pillanatnyi sebesség?



Az átlagsebesség: (az adatok nagyjából leolvashatóak a grafikonról)

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{7{,}3\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = 1{,}1\,\mathrm{m/s}. \tag{1}$$

A sebesség ott zérus, ahol a görbe meredeksége nulla, ahol vízszintes. Ez jelen esetben a $t^* = 7\,\mathrm{s}$-nál van.
A pillanatnyi sebesség meghatározásához meg kell nézni az adott pontban a görbe meredekségét.

1.39. feladat: Egy test sebessége most $v_2 = -20\,\mathrm{m/s}$, $\Delta t = 100$ másodperccel ezelőtt $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$ volt. Mennyi volt a test átlagos gyorsulása?

Az átlaggyorsulás az adott idő alatt történt sebességváltozás és az ehhez szükséges idő hányadosa:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{-20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{100\,\mathrm{s}} = -0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

1.10. feladat: $a = 2\,\mathrm{m/s}^2$ gyorsulással induló gépkocsi elérve a $v_{\mathrm{v}} = 6\,\mathrm{m/s}$ sebességet egyenletesen mozog tovább. Milyen messze jut az indulástól számított $T = 8$ másodperc alatt?

Először számoljuk ki, hogy mennyi időre van szüksége az autónak, hogy elérje a v_{v} sebességet. Mivel a gyorsulás egyenletes, így

$$a = \frac{v_{\mathrm{v}}}{t_1} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{v_{\mathrm{v}}}{a} = \frac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 3\,\mathrm{s}\,.$$

Ez alatt az autó

$$s_1 = \frac{a}{2}t_1^2 = \frac{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}\cdot(3\,\mathrm{s})^2 = 9\,\mathrm{m}$$

távolságot tesz meg.

A hátralévő $t_2 = 8\,\mathrm{s} - 3\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{s}$ idő alatt az autó egyenletes mozgást végez. Az ezalatt megtett út:

$$s_2 = v_\mathrm{v}\cdot t_2 = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 5\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{m}\,.$$

Vagyis a teljes megtett távolság $s = 39\,\mathrm{m}$.

1.21. feladat: Egy gépkocsi $a = 2{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ állandó gyorsulással indul, majd egyenletesen halad tovább, és $t = 5$ másodperc alatt $s = 29{,}4$ méter messzire jut. Határozzuk meg a gyorsulás időtartamát!

Gyorsítson az autó t_1 ideig. Mivel az autó álló helyzetből indul, így az ezalatt megtett távolság:

$$s_1 = \frac{a}{2}t_1^2\,.$$

Ez idő alatt az autó $v_\mathrm{v} = a\cdot t_1$ sebességre tett szert. Az idő hátralevő részében ekkora sebességgel halad egyenletesen, és

$$s_2 = v_\mathrm{v}\cdot t_2 = a\cdot t_1\cdot(t - t_1)$$

távot tesz meg. Összefoglalva

$$\begin{aligned}
s = s_1 + s_2 &= \frac{a}{2}t_1^2 + a\cdot t_1\cdot(t-t_1)\\
&= -\frac{a}{2}t_1^2 + a\cdot t_1\cdot t\\
0 &= \frac{a}{2}t_1^2 - at\cdot t_1 + s\\
0 &= 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t_1^2 - 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t_1 + 29{,}4\,\mathrm{m}\\
(t_1)_{1,2} &= \frac{14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{\left(14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 4\cdot 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 29{,}4\,\mathrm{m}}}{2\cdot 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\\
&= \begin{cases} 7\,\mathrm{s}\\ 3\,\mathrm{s}\end{cases}\,.
\end{aligned}$$

A két megoldás közül csak a $t_1 = 3\,\mathrm{s}$ az értelmes, hiszen a teljes időtartam $5\,\mathrm{s}$.

1.37. feladat: $v_\mathrm{v} = 72\,\mathrm{km/h}$ sebességgel haladó vonaton egy utas a vonat mozgásával ellentétes irányban elindul a vonathoz viszonyított $a_\mathrm{e} = 0{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással. Három másodperc alatt mekkora a pályatesthez viszonyított elmozdulása?

A pályatesthez viszonyítva az ember egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A négyzetes úttörvényt használva:

$$s = -\frac{a_\mathrm{e}}{2}t^2 + v_\mathrm{v}t = -\frac{0{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}\cdot(3\,\mathrm{s})^2 + 72\cdot\frac{1000}{3600}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 3\,\mathrm{s}$$
$$= 56{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

1.9. feladat: Egy gépkocsi sebességét $v_1 = 54\,\mathrm{km/h}$-ról $v_2 = 90\,\mathrm{km/h}$-ra növelte állandó $a = 1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással. Mennyi ideig tartott ez, és mekkora utat tett meg a gépkocsi ezalatt?

Állandó gyorsulás esetén a sebesség megváltozása egyenlő a mindenkori gyorsulással, vagyis:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\Delta v}{\Delta t}\\
\Delta t &= \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\\
&= \frac{36\,\frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}}{1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 6{,}25\,\mathrm{s}\,.
\end{aligned}$$

Az ezalatt megtett utat a négyzetes úttörvénnyel számolhatjuk

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0\,,$$

ahol a a kocsi gyorsulása, v_0 a kezdeti időpontban a sebessége, vagyis $54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, és x_0 annak kezdeti pozíciója. Ez utóbbi legyen nulla, hiszen onnan kezdjük el mérni a megtett utat a gyorsítás végéig:

$$x(t) = \frac{1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(6{,}25\,\mathrm{s})^2 + 54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot 6{,}25\,\mathrm{s} = 125\,\mathrm{m}\,.$$

2A-28. feladat: Egy $10\,\mathrm{m/s}$ sebességgel haladó teherautó $10\,\mathrm{s}$ alatt egyenletesen gyorsulva megkétszerezi sebességét.
a, Határozzuk meg a gyorsulását!
b, Mekkora utat tesz meg ezalatt a teherautó?

a, Ha a kezdeti sebessége $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ volt, akkor a megkétszerezés után $v = 20\,\mathrm{m/s}$ lett. A sebességváltozás $\Delta v = v - v_0 = (20 - 10)\,\mathrm{m/s} = 10\,\mathrm{m/s}$, miközben az ehhez szükséges idő $t = 10\,\mathrm{s}$. A gyorsulás egyenletes, így megegyezik az átlagos gyorsulással, amely

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{s}} = \underline{1\,\mathrm{m/s^2}}.$$

b, Gyorsuló mozgás esetén a sebesség kiszámolható a következő formulával:

$$s = v_0t + \frac{a}{2}t^2 = 10\,\mathrm{m/s}\cdot 10\,\mathrm{s} + \frac{1\,\mathrm{m/s^2}}{2}(10\,\mathrm{s})^2 = \underline{150\,\mathrm{m}}.$$

2B-33. feladat: Egy követ 50 m mély kútba ejtettünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! (A hang terjedési sebessége 330 m/s)

Elsőként ki kell számolnunk, mennyi idő alatt ért le (t_{le}) a kő a vízbe, majd után mennyi idő kellett a hang feléréséhez (t_{fel}). A kő lefelé gyorsul, a 0 kezdősebességű gyorsuló mozgás esetén a megtett út $s = a/2t^2$, jelen esetben a megtett út $s = h = 50\,\mathrm{m}$, a kút mélysége, és a gyorsulás $a = g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$ a nehézségi gyorsulás. Ez alapján a leesés ideje:

$$t_{\mathrm{le}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m/s^2}}} = \sqrt{10}\,\mathrm{s}.$$

A hang egyenletes $v_{\mathrm{h}} = 330\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad felfelé:

$$t_{\mathrm{fel}} = \frac{h}{v_{\mathrm{h}}} = \frac{50}{330}\,\mathrm{s}.$$

Az összes idő tehát $t = t_{\mathrm{le}} + t_{\mathrm{fel}} \approx \underline{3{,}31\,\mathrm{s}}$.

2B-34. feladat: Egy gépkocsi 15 m/s-os egyenletes sebességgel egyenes úton halad. Abban a pillanatban, amikor egy parkoló motoros rendőr mellé ér, a rendőr $2\,\mathrm{m/s^2}$ állandó gyorsulással üldözni kezdi:
a, Mennyi idő alatt éri utol a rendőr az autót?
b, Mennyi utat tesz meg ezalatt a rendőr és mekkora a sebessége a találkozás pillanatában?

Az autó egyenletesen, a motor gyorsulva mozog, de a végén a megtett út ugyanannyi lesz:

$$v_{\mathrm{a}} t = \frac{a_{\mathrm{r}}}{2} t^2.$$

Ez alapján az eltelt idő:

$$t = \frac{2 v_{\mathrm{a}}}{a_{\mathrm{r}}} = 15\,\mathrm{s},$$

a megtett út:

$$s = \frac{a_{\mathrm{r}}}{2} t^2 = 225\,\mathrm{m},$$

a sebessége:

$$v_{\mathrm{r}} = a_{\mathrm{r}} t = 30\,\mathrm{m/s}.$$

2A-32. feladat: Függőlegesen felfelé hajítunk egy labdát $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ sebességgel. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik az $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ és a $t_2 = 2\,\mathrm{s}$ időpontban az elhajítás után?

A labda lassul, 1 s alatt megtett út:

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 12\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} - \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{2} (1\,\mathrm{s})^2 = 7{,}095\,\mathrm{m}.$$

ahol a negatív előjellel figyelembe vettük, hogy a gyorsulás a kijelölt pozitív iránnyal szemben van. A sebessége:

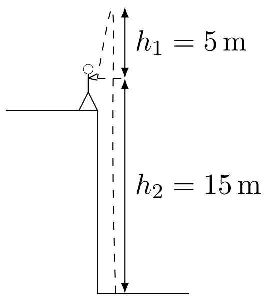
$$v_1 = v_0 - gt = 12\,\mathrm{m/s} - 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1\,\mathrm{s} = 2{,}19\,\mathrm{m/s}.$$

Kérdéses, hogy mikor áll meg fent. Ekkor $v^* = 0$, azaz $0 = v^* = v_0 - gt^*$, amelyből

$$t^* = \frac{v_0}{g} = 1{,}22\,\mathrm{s},$$

vagyis elindult lefelé.

2B-36. feladat: Egy labdát az ábrának megfelelően egy szakadék széléről felfelé hajítottunk. A labda 5 m magasra emelkedik, majd 15 m mélyen ér talajt a szakadék alján.
a, Mekkora volt a labda kezdősebessége?
b, Mekkora sebességgel csapódik a talajba?
c, Mennyi ideig tartózkodik a labda a levegőben?



A megállásig a megtett út:

$$h_1 = v_0 t_1 - \frac{g}{2} t_1^2,$$

de v_0, és t_1 is ismeretlen. Könnyítés ha felfedezzük, hogy ugyanazon magasságba visszaeséshez ugyanakkora t_1 idő kell, de a kezdősebesség úgy 0, azaz:

$$h_1 = \frac{g}{2} t_1^2,$$

amelyből megkapjuk a időt ($t_1 = 1\,\mathrm{s}$), majd visszahelyettesítve a fenti összefüggésbe kijön a sebesség is ($v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$).

Hasonlóan a teljes leesés útjából kiszámolható a teljes leesési idő:

$$s_{ö} = h_1 + h_2 = \frac{g}{2}t_2^2,$$

azaz $t_2 = 2\,\mathrm{s}$, a becsapódási sebesség

$$v_2 = gt_2 = 20\,\mathrm{m/s}.$$

A levegőben töltött idő (fel+le) pedig $t_l = t_1 + t_2 = 3\,\mathrm{s}$.

1.13. feladat: A talaj fölött $h_0 = 30$ méter magasságból $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel kavicsot dobunk függőlegesen fölfelé. Mekkora a kavics sebessége, elmozdulása és a megtett út $t_1 = 1\,\mathrm{s}, t_2 = 3\,\mathrm{s}; t_3 = 5\,\mathrm{s}$ múlva.

A kavics útja a következő. Először felfelé megy, eléri a maximális magasságot, majd elindul lefelé és eléri a talajt. Ez két nevezetes időpontot jelent, egyet a csúcson (t_{fel}), és az út végén ($t_{\mathrm{össz}}$). t_{fel} meghatározható a kezdeti sebességtől, és a lassulásból:

$$t_{\mathrm{fel}} = \frac{v_0}{g} = \frac{20\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 2\,\mathrm{s}.$$

Ez alapján az első időpontban még emelkedett. A sebessége $v_1 = v_0 - gt = 20\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m/s}$. A megtett út

$$\begin{aligned} s_1 =& v_0 t_1 - \frac{g}{2}t_1^2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} - \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(1\,\mathrm{s})^2 \\ =& 15\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

és végig azonos irányban haladt, így az elmozdulás megegyezik az úttal. A maximális magasság:

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{fel}} =& v_0 t_{\mathrm{fel}} - \frac{g}{2}t_1^2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 2\,\mathrm{s} - \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(2\,\mathrm{s})^2 \\ =& 20\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

tehát összesen $H = h_0 + s_{\mathrm{fel}} = 50\,\mathrm{m}$ magasra jutott, ahonnan a leeséshez szükséges idő meghatározható a $H = \frac{g}{2}t_{\mathrm{le}}^2$ összefüggésből:

$$t_{\mathrm{le}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{10}\,\mathrm{s} > 3\,\mathrm{s},$$

azaz az ötödik másodpercben még repülni fog. Tehát 2 másodpercig emelkedett, így t_2-ig még 1-et zuhant. A megtett út:

$$s_{22} = \frac{g}{s}(t_2 - t_{\mathrm{fel}})^2 = \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s})^2 = 5\,\mathrm{m},$$

összesen $s_2 = s_{\mathrm{fel}} + s_{22} = 25\,\mathrm{m}$. Az elmozdulás $r_2 = s_{\mathrm{fel}} - s_{22} = 15\,\mathrm{m}$. A sebessége ekkor $v_2 = -g(t_2 - t_{\mathrm{fel}}) = -10\,\mathrm{m/s}$, ahol figyelembe vettük, hogy a pozitív irány függőlegesen felfelé választottuk.

t_3 időpillanatig $t_3 - t_{\mathrm{fel}}$-t zuhan. A keresett értékek:

$$s_{32} = \frac{g}{s}(t_3 - t_{\mathrm{fel}})^2 = \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s})^2 = 45\,\mathrm{m},$$

összesen $s_3 = s_{\mathrm{fel}} + s_{32} = 65\,\mathrm{m}$. Az elmozdulás $r_2 = s_{\mathrm{fel}} - s_{32} = -25\,\mathrm{m}$. A sebessége ekkor $v_3 = -g(t_3 - t_{\mathrm{fel}}) = -30\,\mathrm{m/s}$.

2C-49. feladat: Egy $3\,\mathrm{m/s}$ sebességgel süllyedő hőlégballonból homokzsákot ejtenek ki.
a, Határozzuk meg a homokzsák sebességét a Földhöz képest a kiejtés után 1 másodperccel.
b, Milyen távolságba jut egy másodperc alatt a homokzsák a ballontól, ha a zsák kiejtésének pillanatában a ballon süllyedési sebessége $2\,\mathrm{m/s}$-ra csökken?

a, A kidobott homokzsáknak kezdetben a ballonnal együtt mozgott, tehát a kezdősebessége neki is $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$ volt lefelé. Ezen felül még gyorsult is. $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ alatt a sebességváltozása:

$$\Delta v = g\Delta t = 10\,\mathrm{m/s}.$$

Így 1 másodperc után a sebessége:

$$v_1 = v_0 + \Delta t = 13\,\mathrm{m/s}$$

b, Nézzük mekkora utat tett meg lefelé ezalatt. Egyrészről egyenletesen mozgott lefelé, másrészről gyorsult is. A megtett út ennek a kettőnek az összege.

$$s_{\mathrm{zsák}} = v_0\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2 = 3 + 5 = 8\,\mathrm{m}$$

Másrészt a ballon is süllyedt tovább:

$$s_{\mathrm{ballon}} = v_{\mathrm{ballon}}\Delta t = 2\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{m}$$

Mivel mindkét test ugyanabba az irányba (lefelé) haladt a távolságukhoz a két út különbségét kell venni:

$$\Delta s = s_{\mathrm{zsák}} - s_{\mathrm{ballon}} = 6\,\mathrm{m}$$

2C-58. feladat: Egy forgalmi lámpa olyan kereszteződésben áll, ahol 40 km/h sebességkorlátozás érvényes. A kereszteződés felé a maximálisan megengedett sebességgel gépkocsi közlekedik. A kocsi maximális lassulása $2\,\mathrm{m/s^2}$ a vezető reflexideje 0,5 s.
a, Tegyük fel, hogy a gépkocsi maximális sebességgel haladt és $3\,\mathrm{m/s^2}$ egyenletes lassulással fékezett. Milyen messzire volt a lámpától a fékezés megkezdésének pillanatában (amikor a lámpa éppen sárgára váltott), ha éppen a stop-vonalon állt meg?
b, Milyen hosszú volt a sárga jelzés időtartama, ha a lámpa pontosan a kocsi megállásának pillanatában váltott pirosra?

A lassuláshoz szükséges idő:

$$t = \frac{0 - v_0}{a} = \frac{-11{,}\dot{1}\,\mathrm{m/s}}{-3\,\mathrm{m/s^2}} = 3{,}7\,\mathrm{s}.$$

De ezen felül még a reflexidő is, így összesen $t_{\text{ö}} = t + t_{\mathrm{r}} = 4{,}2\,\mathrm{s}$ kell.

A megtett út a reflex alatt egyenletes, majd lassuló (most $a < 0$!):

$$x = v_0 t_{\mathrm{r}} + \underbrace{v_0 t + \frac{a}{2}t^2}_{\frac{|a|}{2}t^2} = 5{,}5\dot{5}\,\mathrm{m} + 20{,}53\,\mathrm{m} = 26{,}09\,\mathrm{m}$$

2B-18. feladat: Egy futó a 100 m-es vágtaszámot 10,3 s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó 10,8 s-os idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták az egész távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltól, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

A győztes átlagsebessége (amellyel most feltettük, hogy végig fut):

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{100\,\mathrm{m}}{10{,}3\,\mathrm{s}} = 9{,}71\,\mathrm{m/s},$$

a második helyezetté:

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{100\,\mathrm{m}}{10{,}8\,\mathrm{s}} = 9{,}26\,\mathrm{m/s}.$$

A második által megtett út, amíg az első beért:

$$s_{12} = v_2 t_1 = 0{,}923\,\mathrm{m/s} \cdot 10{,}3\,\mathrm{s} = 95{,}37\,\mathrm{m},$$

tehát a lemaradása:

$$\Delta s = s_{\text{összes}} - s_{12} = 100\,\mathrm{m} - 95.37\,\mathrm{m} = 4{,}63\,\mathrm{m}.$$

3. feladat: Egy tömegpont az x tengely mentén mozog $a = -4\,\mathrm{m/s^2}$ állandó gyorsulással. Az $x = 0\,\mathrm{m}$ helyen a sebessége 20 m/s, az időt itt kezdjük mérni. Mikor lesz a test először az $x = 18\,\mathrm{m}$ helyen?

$$x = v_0 t + \frac{a}{2}t^2,$$

amelyből az idő:

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2ax}}{a} = \begin{cases} 1\,\mathrm{s}, \\ 9\,\mathrm{s}. \end{cases}$$

2B-26. feladat: Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik.
a. Mekkora a kocsi gyorsulása?
b, Ezután az autó 12 s alatt egyenletesen lassulva megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon?
c. Összesen mekkora utat tett meg a 21 s alatt az autó?
d. Mekkora az átlagsebessége?

a, $a_1 = 1/3\,\mathrm{m/s^2}$ b, $a_2 = -7/12\,\mathrm{m/s^2}$
c, $s = 91{,}5\,\mathrm{m}$ d, $v_{\text{átl}} = 4{,}34\,\mathrm{m/s}$

A1. feladat: Egy követ függőlegesen felfelé, egy másik követ függőlegesen lefelé hajítunk $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ sebességgel, ugyanabban a pillanatban, Mennyi idő múlva lesznek egymástól $x = 60$ méter távolságban?

Írjuk fel a két megtett utat a kívülről nézve:

$$x_{\text{fel}} = v_0 t - \frac{g}{2}t^2,$$

$$x_{\text{le}} = v_0 t + \frac{g}{2}t^2.$$

Összegük (amely pont a távolságnak felel meg): $x = x_{\text{fel}} + x_{\text{le}} = 2v_0 t$, így az eltelt idő:

$$t = \frac{x}{2v_0} = 2{,}5\,\mathrm{s}.$$

F.1. feladat: Egy egyenletesen gyorsuló autó 80 m úton növelte sebességét 10 m/s-ról 20 m/s-ra. Mekkora úton érte el előzőleg a 10 m/s sebességet, ha nyugalmi helyzetből indult, s gyorsulása végig állandó volt?

1.2. Ferde mozgás

1. feladat: Milyen irányban dobtuk el azt a testet, amely 4 s múlva 80 m távolságban esik a földre ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, a légellenállást elhanyagoljuk)?

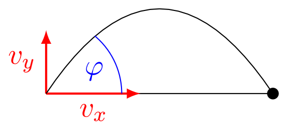
A feladat nem mondja, de tegyük fel, hogy a talaj mellől dobtuk el a testet. Ha $t = 4$ másodperc alatt $x = 80\,\mathrm{m}$-re jut el, akkor a vízszintes irányú sebessége:

$$v_x = \frac{80}{4} = 20\,\mathrm{m/s}.$$

Mivel a talaj mellől indult és a talajszintre ért vissza a mozgás első felében emelkednie, míg a második 2 másodpercben süllyednie kellett. Ebből azt következik, hogy akkora volt a függőleges irányú kezdősebessége, hogy 2 másodperc alatt lement 0-ra vagyis:

$$v_y = g\frac{t}{2} = 20\,\mathrm{m/s}.$$

Ábrázoljuk ezt:



A kérdéses φ szög:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{20}{20}\right) = 45°$$

1.18. feladat: Hajó sebessége 10 m/s. A hajón gyerekek labdáznak. A labda egyik gyerektől a másik felé 4 m/s sebességgel gurul a hajó mozgásának irányára merőlegesen. Mekkora és milyen irányú a labda sebessége?

A partról nézve a hajó és a labda mozgása két merőleges komponenset jelent, amelyet összegezni kell:

$$v = \sqrt{v_\mathrm{l}^2 + v_\mathrm{h}^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10{,}77\,\mathrm{m/s},$$

az iránya a hajóhoz képest:

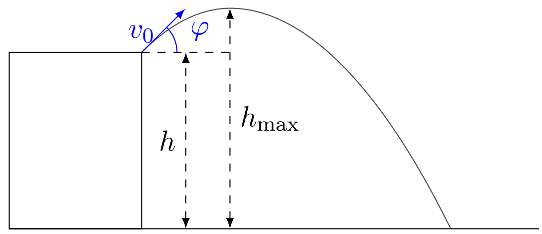
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_\mathrm{l}}{v_\mathrm{h}}$$

alapján $\varphi = 21{,}8°$.

1.33. feladat: A folyó szélessége $d = 200\,\mathrm{m}$, sebessége $v_\mathrm{f} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$. Hol köt ki a túlsó parton az átkelő csónak, ha a vízhez viszonyított sebességének nagysága $v_\mathrm{cs} = 3\,\mathrm{m/s}$, iránya a víz folyásának irányára merőleges?

A csónak $t = \frac{d}{v_\mathrm{cs}} = \frac{200\,\mathrm{m}}{3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{200}{3}\,\mathrm{s}$ alatt ér át a másik partra. Eközben a folyó $d = v_\mathrm{f} \cdot t = 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{200}{3}\,\mathrm{s} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{200}{3}\,\mathrm{s} = 66{,}7\,\mathrm{m}$ viszi le a csónakot a folyásirányba. Tehát a csónak ennyivel lejjebb fog kikötni a túloldalon.

1.28. feladat: 20 m magas ház tetejéről 12 m/s kezdősebességgel ferdén felfelé elhajítunk egy testet. A vízszintessel bezárt szög 30°. Mennyi idő múlva és a háztól mekkora távolságban ér földet, ha a közegellenállástól eltekintünk? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



A kiinduló függőleges sebesség $v_{y0} = v_0 \sin\varphi = 6\,\mathrm{m/s}$, tehát a csúcspontra $t_1 = \frac{v_{y0}}{g} = 0{,}6\,\mathrm{s}$ alatt ér. A megtett út(=emelkedés) $h_1 = \frac{g}{2}t_1^2 = 1{,}8\,\mathrm{m}$, azaz a maximális magasság $h_{\mathrm{max}} = h + h_1 = 21{,}8\,\mathrm{m}$. Ez alapján a leesés ideje $t_2 = \sqrt{\frac{2h_{\mathrm{max}}}{g}} = 2{,}088\,\mathrm{s}$, azaz az összidő a levegőben

$$t = t_1 + t_2 = 2{,}688\,\mathrm{s}.$$

A vízszintes sebesség $v_x = v_0 \cos\varphi = 10{,}39\,\mathrm{m/s}$ a mozgás során végig. A megtett út:

$$x = v_x t = 27{,}93\,\mathrm{m}.$$

1.14. feladat: $h = 200$ méter magasságban $v_0 = 360\,\mathrm{km/h}$ sebességgel haladó repülőgépről a cél előtt milyen távolságban kellene kioldani a segélycsomagot ahhoz, hogy a célba csapódjék, ha nem lenne légellenállás? Mekkora lenne a segélycsomag sebessége a becsapódás pillanatában?

Függőlegesen a csomag egyenletes gyorsulással mozog, vagyis a magassága az idő függvényében:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h\,.$$

T idő alatt ez a magasság nullára csökken:

$$0 = -\frac{g}{2}T^2 + h \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6{,}32\,\mathrm{s}.$$

A csomag vízszintes kezdősebessége megegyezik a repülő sebességével, és ez a csomag mozgása során nem is változik. Emiatt, ha T idő alatt ér földet a csomag, akkor az vízszintesen $s = v_0 \cdot T$ távolságot tesz meg. Ez alapján

$$0 = -\frac{g}{2}\frac{s^2}{v_0^2} + h \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}} = 632{,}45\,\mathrm{m}\,.$$

A függőlegesen szerzett sebessége: $v_y = -gT = -63{,}2\,\mathrm{m/s}$, vízszintesen pedig maradt $v_x = v_0$. Az eredő sebesség nagysága:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 118{,}32\,\mathrm{m/s}.$$

1.15. feladat: Határozzuk meg a $v_0 = 120\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel $\alpha = 30°$-os szögben kilőtt test helyzetét a kilövés után 3 másodperccel!

A test vízszintes irányban egyenletes mozgást végez:

$$x(t) = v_{0x}t + x_0\,,$$

ahol v_{0x} a kezdősebesség vízszintes komponense: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$. Az x_0 a $t = 0$ pillanatban a test helye. Helyezzük a koordináta-rendszerünket oda, ahonnan elhajítjuk a testet, így $x(t = 0) = 0$, vagyis $x_0 = 0$.

Függőleges irányban a test egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Az y tengely felfelé mutat, így a gyorsulás negatív:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0\,,$$

ahol v_{0y} a függőleges kezdősebesség: $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$, illetve az előzőekhez hasonlóan y_0 itt is nulla.

A mozgást leíró két egyenlet tehát:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t\,. \end{aligned}$$

A $t = 3\,\mathrm{s}$-ban:

$$\begin{aligned} x(3\,\mathrm{s}) &= 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 30° \cdot 3\,\mathrm{s} = 311{,}77\,\mathrm{m} \\ y(3\,\mathrm{s}) &= -\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(3\,\mathrm{s})^2 + 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 30° \cdot 3\,\mathrm{s} \\ &= 135\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

1.3. Körmozgás

6.2. feladat: Forgó kerék két ugyanazon sugáron levő pontjának sebessége $v_1 = 13\,\mathrm{m/s}$, illetve $v_2 = 7\,\mathrm{m/s}$. Mekkora a kerék szögsebessége, ha a két pont egymástól való távolsága $\Delta r = 30\,\mathrm{cm}$?

A kerületi sebességük különböző de szögsebességük azonos, azaz:

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1 \cdot \omega = (r_2 + \Delta r) \cdot \omega \\ v_2 &= r_2 \cdot \omega \end{aligned}$$

összevonva $v_1 = v_2 + \Delta r \cdot \omega$, amelyből a szögsebesség:

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{\Delta r} = \frac{13\,\mathrm{m/s} - 7\,\mathrm{m/s}}{0{,}3\,\mathrm{m}} = 20\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

6.5. feladat: Mekkora a TU-144 utasszállító repülőgép centripetális gyorsulása, ha $v = 2400\,\mathrm{km/h}$ sebességgel $r = 80\,\mathrm{km}$ sugarú körívben halad fordulás közben? Ily módon mennyi időbe telik, amíg északi irányból kelet felé fordul? Mennyi utat tesz meg e fordulás közben?

A centripetális gyorsulás:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(2400\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}/3{,}6\,\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}\right)^2}{80000\,\mathrm{m}} = 5{,}\dot{5}\,\mathrm{m/s}^2.$$

A negyedkör alatt megtett út:

$$s = \frac{2r\pi}{4} = \frac{2 \cdot 80\,\mathrm{km} \cdot \pi}{4} = 125{,}6\,\mathrm{km},$$

az ehhez szükséges idő:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{125{,}6\,\mathrm{km}}{2400\,\mathrm{km/h}} = 188{,}5\,\mathrm{s}.$$

6.15. feladat: Egy gépkocsi $v = 108\,\mathrm{km/h}$ sebességgel halad. Kerekeinek átmérője $d = 75\,\mathrm{cm}$. Mekkora a kerekek szögsebessége?

Az autó éppen akkora sebességgel halad, mint amekkora a kerekei egy pontjának kerületi sebessége.

Ez a legegyszerűbben onnan látható be, hogy tudjuk, hogy a kerék az aszfalton tapad, vagyis a kerék legalsó pontja a kocsi mozgása során mindig áll. Mivel az autó minden pontja előre felé halad v sebességgel, ezért a kerék külső pontjainak kerületi sebessége olyan kell hogy legyen, hogy a legalsó pont mindig álljon, vagyis a kerületi sebességnek is v-nek kell lennie. Így a szögsebesség:

$$\omega = \frac{v}{d/2} = \frac{108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{37{,}5\,\mathrm{cm}} = 80\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

4C-26. feladat: Egy 300 m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó $1{,}2\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással fékezni kezd.
Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége 15 m/s. Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére.

3/3. feladat: Amikor egy $R = 100\,\mathrm{m}$ sugarú, vízszintes körpályán a gépkocsi sebessége $v = 10\,\mathrm{m/s}$, gyorsulása $\alpha = 120°$-os szöget zár be a sebességvektorral. Mekkora utat tesz meg a megállásig, ha a tangenciális gyorsulása nem változik?

A körpályán mozgó test centripetális gyorsulása kezdetben:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{R} = 1\,\mathrm{m/s^2}$$

A bezárt szög alapján a tangenciális komponens nagysága:

$$a_{\mathrm{t}} = a_{\mathrm{cp}} \cdot \mathrm{tg}\,30° = 0{,}57\,\mathrm{m/s^2},$$

amely időben állandó. Ez alapján a megállásig eltelt idő:

$$t = \frac{v}{a_{\mathrm{t}}} = \frac{10\,\mathrm{m/s}}{0{,}57\,\mathrm{m/s^2}} = 17{,}32\,\mathrm{s}.$$

Az ezalatt megtett út:

$$s = \frac{a_{\mathrm{t}}}{2}t^2 = \frac{0{,}57\,\mathrm{m/s^2}}{2} \cdot (17{,}32\,\mathrm{s})^2 = 86{,}6\,\mathrm{m}.$$

3/7. feladat: 1 kg tömegű testet 10 m/s kezdősebességgel a vízszinteshez képest 60° szöggel elhajlítunk. Mekkora a pálya görbületi sugara, amikor a sebesség a vízszintessel 30° -os szöget zár be?

$R = 87\,\mathrm{m}$

4A-11. feladat: A nagy gyorsulásoknak az emberi testre gyakorolt hatását úgy tanulmányozzák, hogy az űrhajósokat egy 15 m hosszú rúd végéhez rögzített kabinban vízszintes síkú körpályán megforgatják.
a, Mekkora az űrhajó gyorsulása, ha a kabin 23 fordulatot tesz meg percenként?
b, Hányszorosa ez a gyorsulása a nehézségi gyorsulásnak?

A frekvencia $f = 23\,1/\mathrm{min} = 0{,}383\,1/\mathrm{s}$, így $v = Rf = 5{,}75\,\mathrm{m/s}$, így

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{R} = 2{,}20\,\mathrm{m/s^2}.$$

$g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, így

$$\frac{a_{\mathrm{cp}}}{g} = 0{,}22$$

4B-13. feladat: A tipikus pulzárokról úgy hisszük, hogy kb. $R = 40\,\mathrm{km}$ sugarú, másodpercenként 1 fordulatot tevő, különlegesen sűrű neutroncsillagok.
a, Mekkora a neutroncsillag egyenlítőjén elhelyezkedő részecske gyorsulása?
b, Mekkora a 45. szélességi körön (azaz az egyenlítő és a pólus között félúton) levő részecske gyorsulása?
c, Milyen irányban gyorsul a b, kérdés szerint mozgó részecske?

A forgás frekvenciája $f = 1\,\mathrm{Hz}$, a centripetális gyorsulás:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = 40 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \cdot (2\pi\,\mathrm{rad/s})^2$$
$$= 1\,579\,136\,\mathrm{m/s^2}.$$

A 45. szélességen már kisebb a sugár, $R' = R\cos\alpha$, így megváltozik a gyorsulás is:

$$a'_{\mathrm{cp}} = R'\omega^2 = R\cos\alpha\omega^2 = a_{\mathrm{cp}}\cos$$
$$= 1\,116\,617\,\mathrm{m/s^2},$$

és a gyorsulás iránya a tengely felé és nem a csillag közepe felé mutat.

3/6. feladat: Vidámparki óriáskerék sugara $R = 20\,\mathrm{m}$ és 5 fordulatot tesz meg percenként. A kereket 9 s alatt egyenletesen lefékezik. A fékezés elkezdése után kb. hány másodperccel lesz a tangenciális és a centripetális gyorsulás egyenlő nagyságú?

$t = 5\,\mathrm{s}$

4B-18. feladat: Egy sólyom 12 m sugarú, vízszintes síkú íven 4 m/s sebességgel repül.
a, Mekkora a centripetális gyorsulása?
b, Mekkora a sólyom gyorsulásának nagysága és iránya, ha pályájának síkja és íve nem változik, de $1{,}2\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással növelni kezdi sebességét?

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{R} = 1{,}3\dot{3}\,\mathrm{m/s}$$

A gyorsítás érintő irányú, tangenciális! Így

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{cp}}^2 + a_{\mathrm{t}}^2} = 1{,}79\,\mathrm{m/s^2}$$

az iránya:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a_{\mathrm{cp}}}{a_{\mathrm{t}}} = 48{,}01°$$

Az irány úgy mérjük, hogy ...

14A-15. feladat: Határozzuk meg a 60 méter sugarú versenypálya szakasz ideális dőlésszögét arra az esetre, ha a kocsik 96 km/h sebességgel veszik a kanyart. Oldjuk meg a feladatot egy gépkocsihoz rögzített koordináta rendszerben.

2. Dinamika

2.1. Impulzus

3.6. feladat: A rakománnyal együtt $M = 1$ tonna tömegű vasúti pályakocsi vízszintes pályán $v = 10\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad. Mozgás közben a kocsin ülő emberek lelöknek egy $m = 100\,\mathrm{kg}$ tömegű síndarabot, amely függőlegesen esik a talpfákra. Mekkora sebességgel halad tovább a pályakocsi, ha a súrlódástól eltekinthetünk?

Oldjuk meg impulzusmegmaradással. Kezdetben az egész rendszerben van $p = Mv$, a ledobás után $p' = (M - m)v' + m \cdot 0$. A kettő egyenlőségéből a sebesség:

$$v' = \frac{M}{M-m}v = \frac{1000\,\mathrm{kg}}{1000\,\mathrm{kg} - 100\,\mathrm{kg}}10\,\mathrm{m/s} = \\ = 11{,}\dot{1}\,\mathrm{m/s}.$$

3.9. feladat: Állóvízben két csónak halad egymás felé. A vízhez viszonyított sebessége mindkét csónaknak ugyanakkora, $|v| = 0{,}6\,\mathrm{m/s}$. Amikor egymás mellé érnek, az egyikről a másikra $m = 60\,\mathrm{kg}$ tömegű testet tesznek át. Ezután a másik csónak az eredeti irányában $|v_2'| = 0{,}4\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad tovább. Mekkora ennek a második csónaknak a tömege? (A víz ellenállását elhanyagoljuk.)

Legyen az első iránya pozitív, a másodiké negatív, és legyen az átadás olyan, hogy közben nem változik meg az az első csomag sebessége (pl. oldalra adja át csomagot). Azaz

$$\begin{aligned} m_1 v - m_2 v &= (m_1 - m)v - (m_2 + m)v_2' \\ -m_2 v &= -mv - m_2 v_2' + m v_2' \\ m(v + v_2') &= m_2(v - v_2') \end{aligned}$$

A kifejezett tömeg:

$$m_2 = m\frac{v + v_2'}{v - v_2'} = 60\,\mathrm{kg}\frac{0{,}6\,\mathrm{m/s} + 0{,}4\,\mathrm{m/s}}{0{,}6\,\mathrm{m/s} - 0{,}4\,\mathrm{m/s}} = \\ = 300\,\mathrm{kg}.$$

3.14. feladat: A $m_1 = 120\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_1| = 40\,\mathrm{cm/s}$ sebességű és a $m_2 = 80\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_2| = 100\,\mathrm{cm/s}$ sebességű két test egymással szembe mozog egy egyenes mentén. Teljesen rugalmatlan ütközés után mekkora és milyen irányú sebességgel mozognak tovább?

Jelöljük ki a pozitív irányt úgy, hogy az első test mozgásával megegyező legyen. Az ütközés előtt az összimpulzus:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

utána:

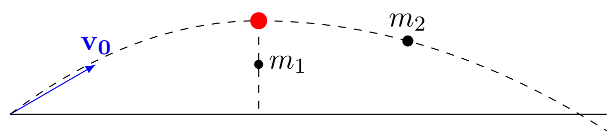
$$p' = (m_1 + m_2)v',$$

és persze tudjuk, hogy a kettőnek meg kell egyeznie. Ezért a sebesség:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{0{,}12\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}4\,\mathrm{m/s} + 0{,}08\,\mathrm{kg} \cdot (-1\,\mathrm{m/s})}{0{,}12\,\mathrm{kg} + 0{,}8\,\mathrm{kg}} = \\ &= -0{,}16\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

A sebesség előjele alapján a második test sebességének irányában mozognak együttesen.

3.31. feladat: A $m = 10\,\mathrm{kg}$ tömegű lövedék a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró irányban $v_0 = 240\,\mathrm{m/s}$ sebességgel hagyja el az ágyú torkolatát. Pályájának legmagasabb pontján a lövedék két részre robban szét. Az egyik, egy $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$-os darab, éppen a robbanás helye alatt, függőlegesen zuhan a földre. A másik, $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$-os darab sebességének iránya robbanás közben nem változik meg. Hol csapódna be ez a másik darab, ha nem lenne légellenállás? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



A kiinduló sebesség komponensei: $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$, $v_{0y} = v_0 \cos\alpha$. A kezdeti y irányú sebességgel a legmagasabb pontig t_1 idő alatt juthatunk el, amely kiszámolható a gyorsulásból:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}.$$

A robbanásra felírhatjuk az impulzusmegmaradást. Előtte volt egy $p_x = mv_{0x}$ impulzusú testünk, míg utána csak a 2-es mozgott vízszintesen, azaz $p'_x = m_1 \cdot 0 + m_2 v'_x$. A megmaradás miatt:

$$mv_{0x} = m_2 v'_x$$
$$v'_x = \frac{mv_{0x}}{m_2} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{m_2}.$$

A robbanás után a test 0 y irányú sebességgel indul lefelé, és a leékezéshez szükséges idő ugyanakkora, mint lentről a tetejéig (gyorsulás, távolság, kezdősebesség megegyezik, ezért az idő is!), azaz $t_{\mathrm{le}} = t_1$. A megtett út vízszintesen összefoglalva:

$$s = v'_x t_{\mathrm{le}} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{m_2} \frac{v_0 \cos\alpha}{g} = \frac{mv_0^2 \sin 2\alpha}{2m_2 g} =$$
$$= \frac{10\,\mathrm{kg} \cdot (240\,\mathrm{m/s})^2 \cdot \sin(2 \cdot 30^\circ)}{2 \cdot 6\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} =$$
$$= 2400\sqrt{3}\,\mathrm{m/s} = 4156{,}9\,\mathrm{m/s}.$$

3.32. feladat: Az $H = 1000\,\mathrm{m}$ magasan lebegő léggömbről $m = 80\,\mathrm{kg}$ tömegű bombát ejtenek le. A bomba $h = 600\,\mathrm{m}$ esés után két részre robban szét. Az egyik, $m_1 = 30\,\mathrm{kg}$ tömegű rész a robbanás pillanatában vízszintes irányban $v_1 = 200\,\mathrm{m/s}$ sebességet kap. Hol éri el a talajt a másik rész? (A légellenállástól tekintsünk el.)

Kövessük a bomba mozgását. Az első szakasz h hosszú, és egyenletesen gyorsulva tesszük meg, azaz

$$h = \frac{g}{2} t_1^2 \qquad \to \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

A teljes magasság leeséséhez:

$$H = \frac{g}{2} t^2 \qquad \to \qquad t = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

így a robbanás után még

$$t_2 = t - t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - t = \sqrt{\frac{2H}{g}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1000\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m/s^2}}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 600\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m/s^2}}} = 3{,}19\,\mathrm{s}$$

időt mozog.

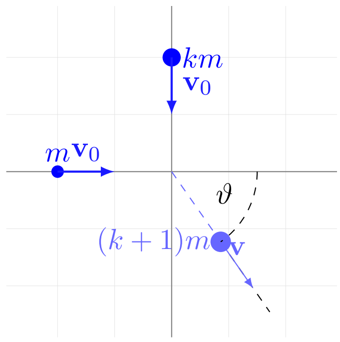
A robbanásra felírhatunk egy impulzusmegmaradást, azaz előtte $p = m \cdot 0$, utána $p' = m_1 v_1 + (m - m_1)v_2$. Az egyenlőség alapján:

$$v_2 = -\frac{m_1}{m - m_1} v_1 = -\frac{30\,\mathrm{kg}}{80\,\mathrm{kg} - 30\,\mathrm{kg}} 200\,\mathrm{m/s} =$$
$$= -120\,\mathrm{m/s}.$$

Az elmozdulás az eltelt idő és a fenti sebesség szorzata:

$$s_2 = t_2 v_2 = -382{,}5\,\mathrm{m}.$$

8B-11. feladat: Két m, ill. km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 nagyságú kezdősebességgel merőleges irányból az ábrán látható módon közlekedik egymáshoz és összeütközik, majd összeragadva mozog tovább. Fejezzük ki a végsebességük *irányát* meghatározó ϑ szöget k segítségével.



Az x irányban az ütközés előtt mv_0, az y irányban kmv_0 impulzus volt. Utána az eredő vetületei lesznek, vagyis a megmaradási egyenlet:

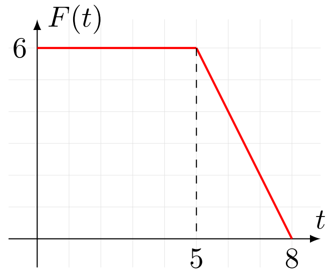
$$(k+1)mv\cos\vartheta = mv_0,$$
$$(k+1)mv\sin\vartheta = kmv_0.$$

A kettő hányadosából megkapjuk az összefüggést:

$$\mathrm{tg}\vartheta = k.$$

8B-27. feladat: Egy 5 kg tömegű kezdetben nyugalomban lévő testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

Rajzoljunk:



A gyorsulás grafikon hasonló, csak minden értéke le kell osztani a tömeggel. A sebessége:

$$v(t) = \int_0^5 a_0 \mathrm{d}t + \int_5^8 (3{,}2 - 0{,}4t)\mathrm{d}t = 7{,}8\,\mathrm{m/s}$$

2.2. Erők

2.3. feladat: A $v_0 = 9\,\mathrm{m/s}$ sebességgel elütött korong a jégen $s = 36\,\mathrm{m}$ út megtétele után áll meg. Mekkora a súrlódási együttható a korong és a jég között?

A korong egyenletesen lassult, átlagsebessége $v_{\text{átl}} = \frac{v_0}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$. Ez alapján a megállásig eltelt idő

$$t = \frac{s}{v_{\text{átl}}} = \frac{36\,\mathrm{m}}{4{,}5\,\mathrm{m/s}} = 8\,\mathrm{s}.$$

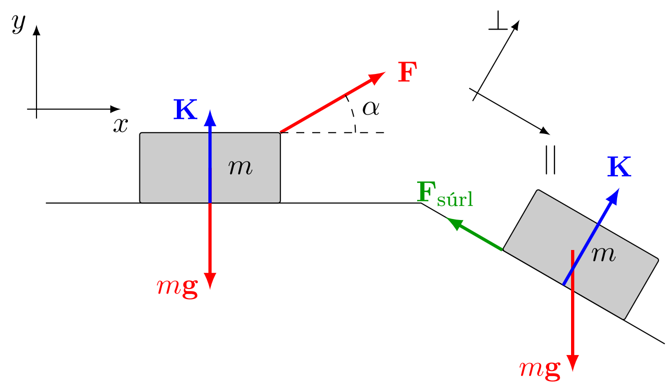
A gyorsulása

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0\,\mathrm{m/s} - 9\,\mathrm{m/s}}{8\,\mathrm{s}} = -\frac{9}{8}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Newton szerint $ma = -F_{\text{súrl}} = -\mu F_{\text{nyomó}} = -\mu mg$, azaz

$$\mu = -\frac{a}{g} = \frac{9/8}{10} = 0{,}1125.$$

2.4. feladat: Milyen erők hatnak egy vízszintes lapon és egy lejtőn nyugvó testre? (Készítsen ábrát!)
$m = 10\,\mathrm{kg}$ tömegű testet a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró $F = 20\,\mathrm{N}$ erővel húzunk. Mekkora a test gyorsulása, ha a csúszási súrlódási tényező értéke $\mu = 0{,}1$?



A Newton-törvények, figyelembe véve, hogy függőlegesen nem mozdulunk el:

$$\begin{aligned} x:&\qquad ma = F\cos\alpha - F_{\text{súrl}} \\ y:&\qquad 0 = F\sin\alpha - mg + K \end{aligned}$$

A második alapján a kényszererő nagysága:

$$K = mg - F\sin\alpha = 10\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} - 20\,\mathrm{N}\cdot\sin 30° = 90\,\mathrm{N},$$

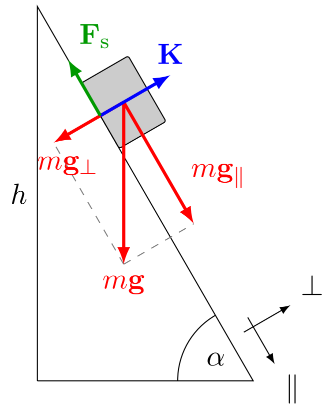
amelyet már behelyettesíthetünk az elsőbe, hiszen $F_{\text{súrl}} = \mu K$, és a gyorsulásra azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{m}(F\cdot\cos\alpha - \mu K) \\ &= \frac{1}{10\,\mathrm{kg}}(20\,\mathrm{N}\cdot\cos 30° - 0{,}1\cdot 90\,\mathrm{N}) = \\ &= 0{,}832\,\mathrm{m/s^2}. \end{aligned}$$

2.12. feladat: $h = 10\,\mathrm{m}$ magas, $\alpha = 60°$-os lejtő tetejéről csúszik le egy test. Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt ér le a lejtő aljára, ha

a) a lejtő súrlódásmentes,

b) a lejtő és a test közötti súrlódási együttható $\mu = 0{,}5$?



a) Írjuk fel a Newton-törvényt a lejtőről lecsúszó testre, a lejtővel párhuzamos és arra merőleges irányban:

$$\begin{aligned} \parallel &\qquad ma_\parallel = mg_\parallel = mg\sin\alpha \\ \perp &\qquad ma_\perp = K - mg_\perp = K - mg\cos\alpha\ , \end{aligned}$$

Mivel a test a lejtőn csúszik, így arra merőlegesen nincsen elmozdulás, azaz $a_\perp = 0$. Az előző egyenletből adódik, hogy test gyorsulása a lejtő mentén $a_\parallel = g\cdot\sin\alpha$.

A lejtő hossza $s = \frac{h}{\sin\alpha}$, így a lecsúszás ideje:

$$\begin{aligned} s &= \frac{a}{2}T^2 \\ \frac{h}{\sin\alpha} &= \frac{a\sin\alpha}{2}T^2 \\ T &= \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\sin^2 60°}} = 1{,}63\,\mathrm{s}\ , \end{aligned}$$

illetve a test sebessége a lejtő alján:

$$\begin{aligned} v_{\text{vég}} &= a\cdot T = g\sin\alpha\cdot T = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 60°\cdot 1{,}63\,\mathrm{s} \\ &= 14{,}14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ . \end{aligned}$$

b) Ha van súrlódás a lejtőn, akkor a Newton-egyenletek kiegészülnek:

$$\begin{aligned} \parallel \qquad & ma_{\parallel} = mg_{\parallel} - F_s = mg\sin\alpha - \mu K \\ \perp \qquad & ma_{\perp} = K - mg_{\perp} = K - mg\cos\alpha \, , \end{aligned}$$

ahol a második egyenletből kifejezhető K,

$$0 = K - mg\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad K = mg\cos\alpha \, ,$$

majd az elsőbe helyettesíthető:

$$a_{\parallel} = g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big) \, .$$

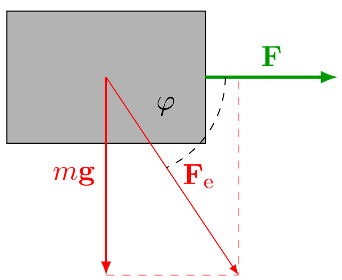
A lecsúszás ideje:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2h}{g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\cdot\sin\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\big(\sin 60° - 0{,}5\cdot\cos 60°\big)\cdot\sin 60°}} \\ &= 1{,}94\,\mathrm{s} \, , \end{aligned}$$

illetve a test sebessége a lejtő alján:

$$\begin{aligned} v_{\text{vég}} &= a_{\parallel}\cdot T = g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\cdot T \\ &= 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\big(\sin 60° - 0{,}5\cdot\cos 60°\big)\cdot 1{,}94\,\mathrm{s} \\ &= 11{,}93\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \, . \end{aligned}$$

5B-15. feladat: $m = 4\,\mathrm{kg}$ tömegű testre két erő – a lefelé mutató nehézségi erő, és egy állandó, vízszintes irányú erő – hat. A megfigyelések szerint a test nyugalomból indult és $a = 12\,\mathrm{m/s}^2$ gyorsulással mozog. Határozzuk meg, hogy
a, mekkora a vízszintes irányú erő?
b, milyen irányban gyorsul a test?
c, vajon egyenes vonalon vagy parabola pályán mozog-e a test?



A gyorsulás alapján az eredő erő:

$$F_e = ma = 48\,\mathrm{N},$$

amely a nehézségi és húzóerő vektoriális összege. A Pitagorasz-tétel alapján:

$$(mg)^2 + F^2 = F_e^2,$$

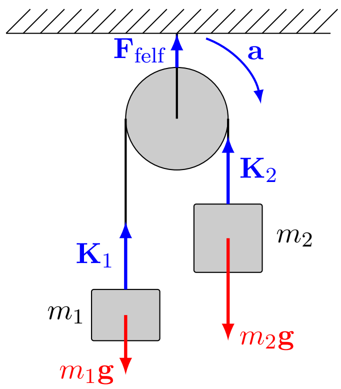
így $F = \sqrt{F_e^2 - (mg)^2} = 26{,}53\,\mathrm{N}$.

Az eredő erő szöge:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{mg}{F} = 56{,}44°.$$

Kezdetben a sebessége zérus volt, így csak ez az erő gyorsítja, csak ennek irányába mozdul el, tehát a pálya egyenes lesz.

5B-35. feladat: Az ábrán látható módon, súrlódásmentesen forgó csigán átvetett, elhanyagolható tömegű kötél végeire $m_1 = 1{,}8$ és $m_2 = 3{,}6\,\mathrm{kg}$-os tömeget erősítettünk, majd nyugalomból indítva magára hagytuk a rendszert.
a, Newton második törvényének alkalmazásával határozzuk meg a testek gyorsulását!
b, Mekkora erő feszíti a fonalat, miközben a testek gyorsulnak?
c, Mekkora sebességgel érkezik le $h = 15\,\mathrm{cm}$ magasból az $m_2 = 3{,}6\,\mathrm{kg}$-os test?



Írjuk fel a testekre a kötél mentén, illetve a csigára függőleges irányban a Newton-törvényt:

$$\begin{aligned} 1: \qquad & m_1 a = K_1 - m_1 g \\ 2: \qquad & m_2 a = m_2 g - K_2 \\ \text{cs}: \qquad & 0 = F_{\text{felf}} - K_1 - K_2 \, . \end{aligned}$$

Mivel a kötél és a csiga ideális, ezért a két kötélerő nagysága megegyezik, $K_1 = K_2 = K$. Az első két egyenletből adódik:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g = \frac{3{,}6\,\mathrm{kg} - 1{,}8\,\mathrm{kg}}{3{,}6\,\mathrm{kg} + 1{,}8\,\mathrm{kg}}10\,\mathrm{m/s}^2 \\ &= 3{,}3\,\mathrm{m/s}^2. \end{aligned}$$

Az m_2 test a nehezebb, arra fog mozogni a rendszer. A kötélerő:

$$K = m_1 \cdot (a+g) = m_1 \cdot \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + 1\right) g$$
$$= \frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1} g = \frac{2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}6\,\mathrm{kg}}{3{,}6\,\mathrm{kg} + 1{,}8\,\mathrm{kg}} 10\,\mathrm{m/s^2} =$$
$$= 24\,\mathrm{N}.$$

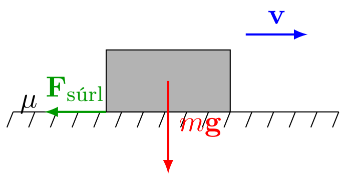
A zuhanás ideje:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}15\,\mathrm{m}}{3{,}33\,\mathrm{m/s^2}}} = 0{,}33\,\mathrm{s},$$

a sebesség:

$$v = at = 3{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 0{,}33\,\mathrm{s} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

5A-40. feladat: A vízszintes padlón 1,8 m/s sebességgel csúszó doboz 2 másodperc alatt megáll. Mekkora a doboz és a padló közötti csúszó súrlódási együttható?

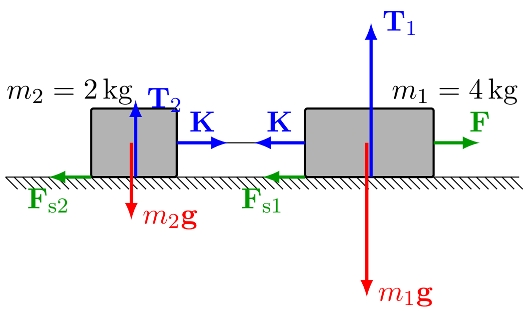


A doboz átlagos gyorsulás (lassulás!) $a = \frac{\Delta v}{t} = -0{,}9\,\mathrm{m/s^2}$. Newton II. törvénye alapján:

$$ma = -\mu F_{ny}{}^{1} = -\mu m g,$$

amely alapján a súrlódási együttható nagysága: $\mu = 0{,}09$.

5B-50. feladat: Két, vízszintes síkon fekvő testet az ábra szerint fonallal kötöttünk össze. A testek és a sík közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}5$.
a, Mekkora vízszintes irányú **F** erővel mozgathatjuk a testeket $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással?
b, Mekkora erő feszíti ezalatt az összekötő fonalat?



[1] A pozitív iránnyal szembe hat

Itt is először felírjuk az egyes testekre a Newton-törvényt függőleges és vízszintes irányban:

$$\begin{aligned}
1,x: &\quad m_1 a_{1x} = F - K - F_{s1}\\
1,y: &\quad m_1 a_{1y} = T_1 - m_1 g\\
2,x: &\quad m_2 a_{2x} = K - F_{s2}\\
2,y: &\quad m_2 a_{2y} = T_2 - m_2 g\,.
\end{aligned}$$

Mivel függőleges elmozdulás nincs, így $a_{1y} = a_{2y} = 0$. Így mindkét egyenletből megkapjuk a tartóerőt, amelyből kiszámolhatjuk a súrlódást:

$$\begin{aligned}
T_1 &= m_1 g & T_2 &= m_2 g\\
F_{s1} &= \mu T_1 = \mu m_1 g & F_{s2} &= \mu T_2 = \mu m_2 g
\end{aligned}$$

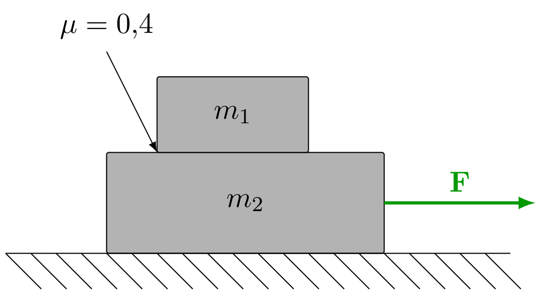
A két testet összekötő kötél nyújthatatlan, így a két test gyorsulása minden pillanatban ugyanakkora: $a_{1x} = a_{2x} = a$. Ezt egyszerűen meghatározhatjuk, ha összeadjuk A két x irányú egyenletet összeadásával kiejtsük a kötélerő, és megkapjuk F-et:

$$F = (m_1 + m_2)(a + \mu g)$$
$$= (4\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}) \cdot (2\,\mathrm{m/s^2} + 0{,}5 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}) = 42\,\mathrm{N}\,.$$

Ezt felhasználva a kötelet feszítő erő 2,x egyenlet alapján:

$$K = m_2 a + m_2 g = 2\,\mathrm{kg} \cdot \left(2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} + 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right) = 24\,\mathrm{N}\,.$$

5B-61. feladat: Az ábra szerinti elrendezésben a felső és az alsó hasáb között a tapadási súrlódási együttható 0,4 a vízszintes sík súrlódásmentes. Mekkora maximális **F** erővel húzhatjuk az alsó testet, ha azt akarjuk, hogy a felső test ne csússzon meg rajta?



A tapadási súrlódás maximuma $F_{\mathrm{tap}} = \mu m_1 g = 8\,\mathrm{N}$. A maximális gyorsulás értéke a teljes rendszerre F_1 húzóerő esetén:

$$a = \frac{F_1}{m_1 + m_2},$$

így a felső testre ható "részerő" $F_{\text{felso}} = m_1 a = \frac{F_1 m_1}{m_1+m_2}$. A keresett pontban ez pont egyensúlyt tart a maximális tapadással:

$$F_{\text{tap}} = \frac{m_1}{m_1+m_2} F_1,$$

azaz

$$F_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1} F_{\text{tap}} = 28\,\text{N}.$$

Az alsó testre ható erők eredője (húzóerő – felső súrlódás):

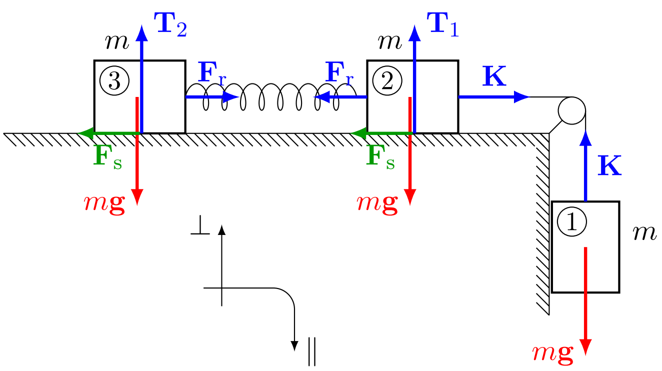
$$m_2 a_2 = F - \mu_{\text{cs}} m_1 g,$$

így a gyorsulás:

$$a_2 = \frac{F - \mu_{\text{cs}} m_1 g}{m_2} = 6{,}4\,\text{m/s}^2$$

A két test együtt mozog, ha még össze vannak tapadva. Tehát a maximális tapadási súrlódás nagyságával, 8 N-nal húzhatjuk a felső testet.

3.12. feladat: Mennyivel nyúlik meg az ábra szerinti elrendezésben a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? A csiga, a rugó és a fonál tömegét ne vegyük figyelembe. Legyen $m = 1\,\text{kg}$, a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$, a rugóállandó $D = 4\,\text{N/cm}$.



Itt is felírjuk a Newton-törvényeket, figyelembe véve azt, hogy a rendszer csak az asztal felülete mentén mozog.

$$\begin{aligned}
&1, \parallel: && ma = mg - K \\
&1, \perp: && 0 = 0 \\
&2, \parallel: && ma = K - F_{\text{r}} - F_{\text{s},1} \\
&2, \perp: && 0 = T_1 - mg \\
&3, \parallel: && ma = F_{\text{r}} - F_{\text{s},2} \\
&3, \perp: && 0 = T_2 - mg\ ,
\end{aligned}$$

ahol $F_{\text{s},1} = \mu T_1$ és $F_{\text{s},2} = \mu T_2$. A merőleges egyenletekből a T tartóerőket meghatározva, majd behelyettesítve a párhuzamos irányokra felírt egyenletekbe:

$$\begin{aligned}
&1, \parallel: && ma = mg - K \\
&2, \parallel: && ma = K - F_{\text{r}} - \mu mg \\
&3, \parallel: && ma = F_{\text{r}} - \mu mg\ .
\end{aligned}$$

A három egyenlet összegéből:

$$a = \frac{1-2\mu}{3} g\ ,$$

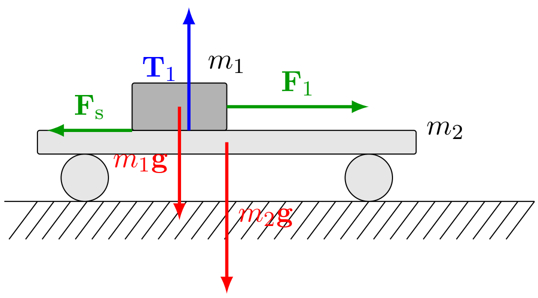
melyet visszahelyettesítve az utolsóba:

$$\begin{aligned}
m \cdot \frac{1-2\mu}{3} g &= F_{\text{r}} - \mu mg \\
F_{\text{r}} &= \frac{1+\mu}{3} \cdot mg\ .
\end{aligned}$$

Vagyis a rugó megnyúlása:

$$\Delta l = \frac{F_{\text{r}}}{D} = \frac{1+\mu}{3} \frac{mg}{D} = \frac{1+0{,}2}{3} \frac{1\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 0{,}01\,\text{m}\ .$$

3.29. feladat: A $m_2 = 2\,\text{kg}$ tömegű kiskocsi vízszintes síkon súrlódás nélkül mozoghat. A kocsira $m_1 = 0{,}5\,\text{kg}$ tömegű hasábot helyeztünk, és a hasábot $F_1 = 1\,\text{N}$ vízszintes irányú erővel húzzuk. Mekkora a hasáb, illetve a kocsi gyorsulása, ha közöttük a tapadási súrlódási együttható $\mu_{\text{tap}} = 0{,}25$, csúszó súrlódási együttható pedig $\mu_{\text{cs}} = 0{,}01$? Mekkora a gyorsulás $F_1' = 10\,\text{N}$-os húzóerő esetén? ($g \approx 10\,\text{m/s}^2$)



Számoljuk ki a maximális tapadási erőt. Ebből kiderül, hogy a kocsi és a test összetapadva marad, vagy egymáshoz képest elmozdul. Tehát:

$$\begin{aligned}
F_{\text{tap}} = \mu_{\text{tap}} T_1 = \mu_{\text{tap}} m_1 g = 0{,}25 \cdot 0{,}5\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 = \\
= 1{,}25\,\text{N},
\end{aligned}$$

azaz az első esetben $F_1 < F_{\text{tap}}$, így egyben maradnak.

A talajon nincsen súrlódás, így csak az F_1 gyorsító erő számít: $F_1 = (m_1+m_2)a$, amelyből:

$$a = \frac{F_1}{m_1+m_2} = \frac{1\,\text{N}}{0{,}5\,\text{kg} + 2\,\text{kg}} = 0{,}4\,\text{m/s}^2.$$

A második esetben $F_1' > F_{\mathrm{tap}}$, azaz külön mozognak.
A test mozgásegyenlete: $F_1' - F_s = m_1 a_1'$, azaz:

$$a_1' = \frac{F_1' - F_s}{m_1} = \frac{F_1' - \mu_{\mathrm{cs}} m_1 g}{m_1} = \\ = \frac{10\,\mathrm{N} - 0{,}01 \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}5\,\mathrm{kg}} = \\ = 19{,}9\,\mathrm{m/s^2}.$$

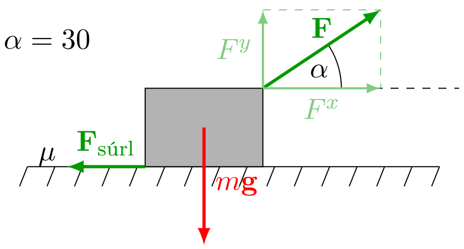
A kocsira $-F_s = m_2 a_2'$, amelyből:

$$a_2' = \frac{-F_s}{m_2} = \frac{-\mu_{\mathrm{cs}} m_1 g}{m_2} = \\ = \frac{-0{,}01 \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{2\,\mathrm{kg}} = \\ = -0{,}025\,\mathrm{m/s^2},$$

A kocsi lassan elindul hátrafelé.

2.2.1. Erőkomponensek számolása/Statika

5B-52. feladat: Egy 4 kg tömegű testet az ábrának megfelelően $F = 20$ N erővel húzunk. Mekkora a test gyorsulása, ha a test és a talaj közötti csúszó súrlódásai együttható 0,2?



y irányban ható erők (előjelet figyelembe véve):

$$F_2 = mg - F^y = mg - F\sin\alpha = 30\,\mathrm{N}.$$

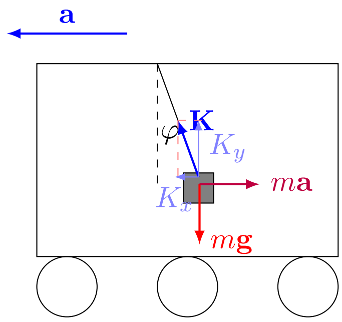
x irányban ható erők:

$$F_1 = F_x - F_{\text{súrl}} = F\cos\alpha - \mu F_2 = 11{,}32\,\mathrm{N},$$

így az x irányú gyorsulás

$$a_x = \frac{F_1}{m} = 2{,}83\,\mathrm{m/s^2}.$$

14B-9. feladat: Egy 1,5 kg-os súly egy 3,6 m/s^2-es gyorsulással mozgó vasúti vasúti mennyezetére zsinórral van felfüggesztve. A súly a kocsihoz viszonyítva nyugalomban van. Határozzuk meg (a) zsinór függőleges iránnyal bezárt szögét és (b) a zsinórban ébredő erő nagyságát! A feladatot a kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!



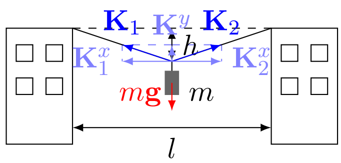
A gyorsulás és a g alapján megkapjuk a kitérülést:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{3{,}6}{9{,}81} = 20{,}15.$$

A kötélben ébredő erő:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \sqrt{(ma)^2 + (mg)^2} = 15{,}64\,\mathrm{N}$$

5A-26. feladat: Két diák 9 kg tömegű jelzőtáblát akaszt egymástól 30 m távolságban lévő épületek azonos magasságú pontjához rögzített kötél középpontjára. A cégtábla belógása a felfüggesztési pontokat összekötő vízszintes alá 30 cm. Mekkora erő feszíti a kötelet?



Szimmetria okokból a két kötélerő nagysága ugyanaz ($K_1 = K_2$), és a függőleges komponensük (y) kompenzálja a nehézségi erőt:

$$K_1^y + K_2^y = 2K^y = mg,$$

azaz $K^y = 45\,\mathrm{N}$. A házak távolsága és a behajlás alapján meghatározható a belógás szöge:

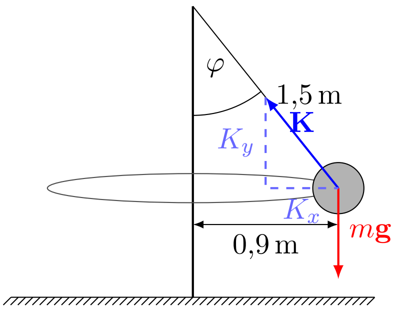
$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{0{,}3\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{m}} = 1{,}14,$$

amely alapján a tejes kötélerő:

$$\frac{K^y}{K} = \sin\varphi,$$

azaz $K = 2250{,}44\,\mathrm{N}$.

5A-30. feladat: Egy 1,5 m hosszú kötélre kötött 4,5 kg tömegű labda az ábrán látható módon kúpingaként 0,9 m sugarú, vízszintes síkú körpályán mozog.
a, Mekkora erő feszíti a kötelet? Rajzoljuk meg a labda vektorábráját, beleértve az erők alkalmas derékszögű összetevőkre bontását is!
b, Mennyi idő alatt tesz meg a labda egy teljes fordulatot?



Az y irányban az egyensúly feltétele, hogy $K_y = mg$, míg a körmozgás miatt azt is tudjuk, x irányban a kötélerő vízszintes komponense adja a centripetális gyorsulást: $K_x = F_{\text{cp}}$. Ez alapján $K_y = mg = 45\,\text{N}$. A geometria alapján a kitérés szöge:

$$\varphi = \arcsin\frac{0{,}9}{1{,}5} = 36{,}86^\circ$$

Így az x irányú erő:

$$K_x = K_y \text{tg}\varphi = 33{,}75\,\text{N}$$

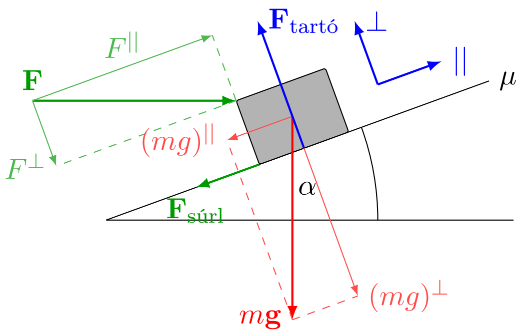
A centripetális erő $F_{\text{cp}} = m\frac{v^2}{R}$, amely alapján a sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{K_x R}{m}},$$

és egy kör útja a kerület azaz $s = 2\pi R$. Így egy fordulat ideje:

$$T = \frac{s}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{Rm}{K_x}} = 2{,}18\,\text{s}$$

6B-23. feladat: Az ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes, 27 N nagyságú erővel tolunk fel egy 20°-os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.
a, Mekkora a test gyorsulása?
b, Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!
c, Válaszoljunk a b, kérdésre a munkatétel alkalmazásával!



A lejtővel párhuzamosan:

$$\sum F_{||} = F^{||} - F_{\text{súrl}} - (mg)^{||} = ma_{||},$$

arra merőlegesen:

$$\sum F_{\perp} = F_{\text{tartó}} - F^{\perp} - (mg)^{\perp} = ma_{\perp} = 0,$$

mert abban az irányban nem mozog. A súrlódás nagysága:

$$F_{\text{súrl}} = \mu F_{\text{tartó}},$$

Az erőkomponensek:

$$F^{||} = F\cos\alpha \qquad F^{\perp} = F\sin\alpha$$
$$(mg)^{||} = mg\sin\alpha \qquad (mg)^{\perp} = mg\cos\alpha$$

Egyesítve mindezt:

$$a_{||} = \frac{F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu(F\sin\alpha + mg\cos\alpha)}{m},$$

amelynek értéke behelyettesítve $a_{||} = 6{,}84\,\text{m/s}^2$

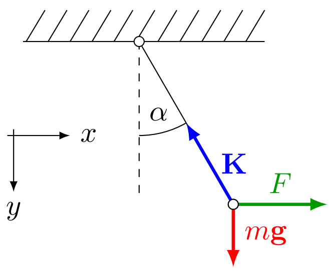
A megtett út: $s = \frac{a_{||}}{2}t^2$, amelyből a szükséges idő $t = 0{,}93\,\text{s}$, így a sebessége:

$$v = a_{||}t = 6{,}4\,\text{m/s}$$

Munkatétellel $F_{||}s = \frac{1}{2}mv^2$, amelyből

$$v = \sqrt{\frac{2F_{||}s}{m}} = 6{,}4\,\text{m/s}.$$

5.1. feladat: Fonálra függesztett $mg = 20\,\text{N}$ súlyú golyót vízszintes irányban oldalt húzunk. Mekkora erővel húzza a fonál a testet, ha az a függőlegessel $\alpha = 30^\circ$-os szöget zár be?



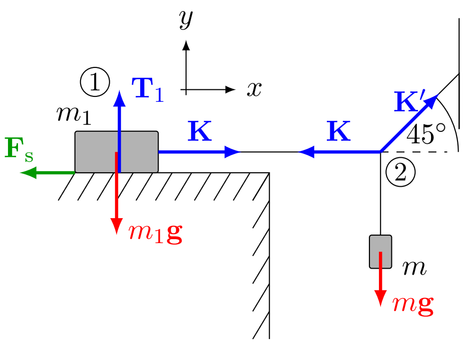
Az egyensúly feltétele:

$$x: \qquad F - K_x = F - K\sin\alpha = 0$$
$$y: \qquad mg - K_y = mg - K\cos\alpha = 0$$

A másodikból kifejezhető a kötélerő:

$$K = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{20\,\text{N}}{\cos 30^\circ} = 23{,}09\,\text{N}.$$

5.26. feladat: Az m tömegű testet két fonál segítségével, az ábrán látható módon függesztünk fel. Az asztallapon fekvő test tömege $m_1 = 72\,\mathrm{kg}$, az asztal és közötte a súrlódási együttható $\mu = 0{,}25$. Mekkora m tömeg esetén van egyensúly?



Az egyensúly feltétele a testre (1):

$$x: \quad K - F_s = 0,$$
$$y: \quad T_1 - m_1 g = 0,$$

illetve tudjuk, hogy $F_s = \mu T_1$. A rögzítési pontra (2):

$$x: \quad K'_x - K = K' \cos\alpha - K = 0,$$
$$y: \quad K'_y - mg = K' \sin\alpha - mg = 0.$$

Az elsőből kifejezhető $K = F_s = \mu m_1 g$, amely beírható a második párba. Így $K' \cos\alpha - \mu m_1 g = 0$, azaz

$$K' = \frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha},$$

és az y-ra vonatkozó egyenlet:

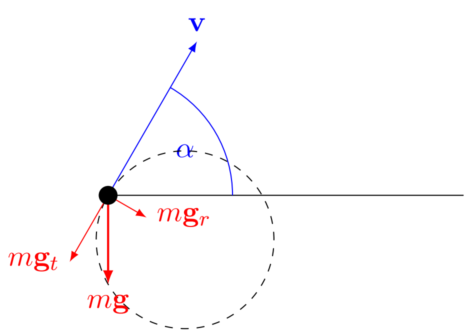
$$\frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha} \sin\alpha - mg = 0.$$

Ebből a keresett tömeg:

$$m = \mu m_1 \mathrm{tg}\alpha = 0{,}25 \cdot 72\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{tg}45^\circ = 18\,\mathrm{kg}.$$

2.3. Erők + körmozgás

3/2. feladat: Egy testet a vízszinteshez képest $\alpha = 60^\circ$-os szöggel $v = 5\,\mathrm{m/s}$ sebességgel eldobunk. Mekkora a pálya görbületi sugara az eldobás pillanatában?



A test lokálisan körpályán van, tehát rá ható erők összegének sugárirányú komponense megegyezik a centripetális erővel:

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha,$$

amelyből a keresett sugár:

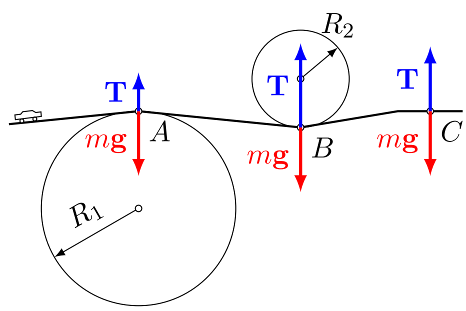
$$r = \frac{v^2}{g\cos\alpha} = \frac{(5\,\mathrm{m/s})^2}{10\,\mathrm{m/s^2}\cos 60^\circ} = 5\,\mathrm{m}.$$

6.7. feladat: $m = 1000\,\mathrm{kg}$ tömegű gépkocsi dombvidéken halad, egyenletes $v_0 = 72\,\mathrm{km/h}$ sebességgel. Az A és B pontokban az út $R_1 = 100\,\mathrm{m}$ illetve $R_2 = 50\,\mathrm{m}$ sugarú körív, a C pontban vízszintes.

a) Határozzuk meg e három pontban az út által a gépkocsira kifejtett nyomóerő irányát és nagyságát.

b) Mennyi lehet a gépkocsi maximális sebessége az A pontban?

($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



a) A C pontban az autó egyenesen halad, függőlegesen nem végez mozgást, így az ilyen irányú gyorsulása nulla. A II. Newton-törvény alapján $T_C = mg = 10^4\,\mathrm{N}$.

A gépkocsi az A és a B pontban körpályán halad, miközben az aktuális kerületi sebessége v_0. A körpályán való haladás feltétele, hogy a kocsira ható erők eredője biztosítsa az autónak a centripetális gyorsulást. Az A pontban

$$F_{cp} = mg - T_A = m\frac{v_0^2}{R_1}$$

$$T_A = mg - m\frac{v_0^2}{R_1}$$

$$= 1000\,\mathrm{kg} \cdot \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - \frac{\left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{100\,\mathrm{m}}\right)$$

$$= 600\,\mathrm{N}.$$

ahol T_A az út és az autó között fellépő nyomóerő.

A B pontban a centripetális gyorsulás ellentétes irányba kell, hogy mutasson, így

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{cp}} &= T_B - mg = m\frac{v_0^2}{R_2} \\ T_B &= mg + m\frac{v_0^2}{R_2} \\ &= 1000\,\mathrm{kg}\cdot\left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \frac{\left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{50\,\mathrm{m}}\right) \\ &= 18000\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

b) Vegyük észre, hogy ha a T_A kifejezésében, a v_0 sebesség túl nagy, akkor a T_A akár negatív is lehetne. Ez azonban nem valós megoldás, hiszen a tartóerő csak nyomni tud, húzni nem. Ha ez az eset állna fenn, akkor az azt jelentené, hogy az A pontban az autó már nem ér hozzá az aszfalthoz, mivel az már korábban elemelkedett attól.

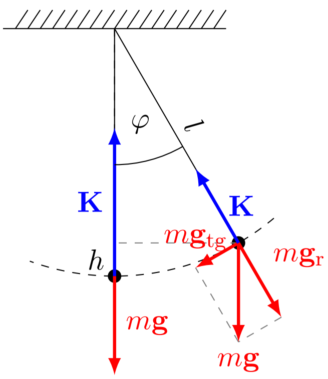
A határeset akkor következik be, amikor a tartóerő éppen nulla. Ekkor a nehézségi erő még éppen tudja biztosítani a körpályán való maradáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$mg = m\frac{v_{\max}^2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{R_1 g} = 31{,}62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

6.10. feladat: Az l hosszúságú fonálra függesztett m tömegű golyó ingaként leng. A legnagyobb kitérés $\varphi_{\max} = 30°$. Mekkora erő hat a fonálban, amikor

a) az inga szélső helyzetben van;

b) a függőleges helyzeten halad át? Mennyi a gyorsulása az előbbi helyzetekben?



Az ingatest körmozgást végez, vagyis a rá ható erők eredőjének sugárirányú komponense az, ami a test centripetális gyorsulását adja:

$$ma_{\mathrm{cp}} = m\frac{v^2}{l} = K - mg\cos\varphi\ .$$

a) A legszélső helyzetben a test sebessége nulla, vagyis az előző egyenlet alapján:

$$K = mg\cos 30°\ .$$

b) A pálya aló pontjában viszont

$$K = mg + m\frac{v^2}{l}\ .$$

A munkatételt felhasználva ezt a sebességet is ki tudjuk számítani. A testre csak a kötélerő és a nehézségi erő hat, melyek közül a kötélerő sosem végez munkát, hiszen az mindig merőleges a mozgás irányára. A nehézségi erő munkáját pedig a helyzeti energiával fogjuk figyelembe venni. Legyen az egyik állapot az inga maximális kitérése, a másik pedig az alsó helyzeten való áthaladás. Erre a két pontra felírva a munkatételt:

$$\begin{aligned} 0 = W = \Delta E &= E_2 - E_1 \\ E_1 &= E_2 \\ \frac{1}{2}mv^2 &= mgh = mgl(1-\cos\varphi) \\ v &= \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)}\ , \end{aligned}$$

ahonnan

$$K = mg\left[3 - 2\cos\varphi\right]\ .$$

6.39. feladat: Egy űrállomás $l = 30\,\mathrm{m}$ hosszú rúddal összekötött két kisebb űrkabinból áll. Milyen szögsebességgel kell az űrállomásnak a rúd középpontján átmenő képzelt tengely körül forognia, ha azt akarjuk, hogy az űrkabin lakói a Föld felszínén megszokott „súlyú" állapotban érezzék magukat? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s}^2$)

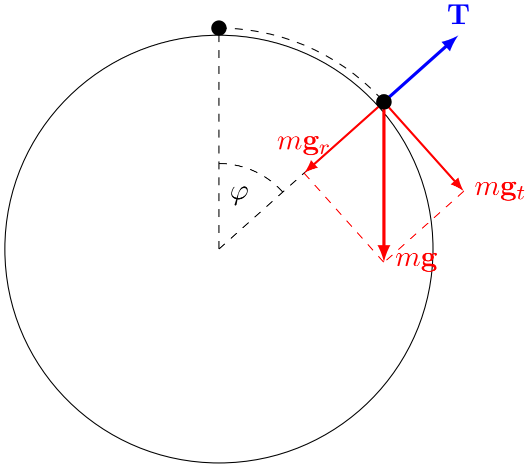
Miközben az űrállomás forog, a kabinok, és így a bennük lévő testek körmozgást végeznek. A körmozgás során a testek gyorsulnak, ezt a gyorsulást pedig az alátámasztást adó tartóerők biztosítják a testeknek. Az űrkabinban lévő űrhajós azt érzékei, hogy a környezetéhez képest nyugalomban van, illetve az alátámasztás őt nyomja. Az ő szemszögéből ez csak úgy magyarázható, ha őrá hat egy „fiktív" tehetetlenségi erő (a centripetális erő), melyet ő érez, és ez az, ami őt az alátámasztáshoz nyomja. Ezt a centripetális erőt érezzük úgy, mintha az egy mesterséges nehézségi erő lenne.

Ez az erő egyenlő nagyságú az alátámasztás erejével, vagyis a centripetális erő nagyságával:

$$G_{\text{mesterséges}} = mg = m\frac{v^2}{l/2} = m\omega^2\frac{l}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{30\,\mathrm{m}}} = 0{,}81\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

6.33. feladat: Egy $r = 0{,}6$ méter sugarú gömb tetején egy kis golyót elengedünk. A gömb tetejétől számítva milyen magasságban hagyja el a golyó a gömböt? (A súrlódástól eltekintünk.)



A gömböt akkor hagyja el a golyó, amikor a felület tartóereje megszűnik. Írjuk fel az egyenleteket a radiális és tangenciális komponensekre:

$$r: \quad m\frac{v^2}{r} = mg\cos\varphi - T$$
$$t: \quad ma = mg\sin\varphi.$$

A tetejéről való indulással felírhatjuk a munkatételt is:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg(r - r\cos\varphi)$$

azaz $v^2 = 2gr(1-\cos\varphi)$, amit behelyettesíthetünk a sugárirányú egyenletbe:

$$m2g(1-\cos\varphi) = mg\cos\varphi - T$$

és kifejezhetjük a felület tartóerejét:

$$T = mg(2 - 3\cos\varphi).$$

Ez zérus, ha $2 - 3\cos\varphi = 0$, vagyis ha $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. Azaz a gömb magasságához képest

$$\Delta h = r - r\cos\varphi = \frac{r}{3} = 0{,}2\,\mathrm{m}$$

magasságnál hagyja el a gömböt.

3. Munka, energia teljesítmény

6B-6. feladat: Egy ember 30 kg-os dobozt emelt a földről 1,5 m magasba, állandó sebességgel.
a, Mennyi munkát végzett az ember?
b, Mennyi munkát végzett a gravitációs erő?
c, Mennyi az ember és a gravitációs erő munkájának összege?

A doboz egyenletes sebességgel mozog, tehát gyorsulása nulla. Eszerint a rá ható erők eredője is az, tehát az ember által kifejtett erő nagysága megegyezik a nehézségi erőével.

Az ember által kifejtett erő iránya megegyezik az elmozdulás irányával, a közbezárt szög $\alpha = 0$. A munka:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ember}} &= \mathbf{F}_{\mathrm{ember}}\mathbf{s} = mgh\cos\alpha \\ &= 30\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot \cos 0^\circ = 450\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

A nehézségi erő esetén az irány ellentétes, a szög $\alpha' = 180^\circ$. A munka

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ember}} &= \mathbf{F}_{\mathrm{neh}}\mathbf{s} = mgh\cos\alpha' \\ &= 30\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot \cos 180^\circ = -450\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

A kettő összege:

$$W_{\mathrm{ember}} + W_{\mathrm{ember}} = 0\,\mathrm{J}$$

6B-10. feladat: Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az $F_r = -kx^3$ törvény szerint változik, ahol $k = 200\,\mathrm{N/m^3}$. Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

Az általunk kifejtett erő a rugó általi erő ellentettje, azaz $F = kx^3$. A munka:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F\mathrm{d}x = 0{,}4\,\mathrm{J}.$$

6A-25. feladat: Egy asszony 1300 J munka árán húz fel egy 12 kg-os vödröt a 10 m mély kútból. Mekkora mozgási energiával érkezik a vödör a felszínre?

$E_{\mathrm{m}} = 100\,\mathrm{J}$

A. feladat: 2 kg tömegű test 100 méterrel a Föld felszíne felett 30 m/s sebességgel közeledik a talajhoz. Földet éréskor sebessége 50 m/s. Mekkora a közegellenállás munkavégzése?

C. feladat: 40 kg tömegű test 5 m/s sebességét 100 N nagyságú állandó erő 150 m egyenes úton 20 m/s nagyságúra növeli. Mekkora szöget zár be az erő a sebességgel?

4. feladat: A Kis Herceg itt a Földön guggolásból 1 m magasra tud felugrani. Maximum mekkora lehet a Kis Herceg bolygójának a sugara, ha az a Föld anyagából van és ő le tud ugrani róla. (A Föld sugara kb. 6000 km)

$R_0 = 2{,}44\,\mathrm{km}$

F. feladat: Egy 800 N súlyú testet nyugalmi helyzetéből indítva állandó gyorsulással, kötéllel húzunk függőlegesen felfelé. A test ily módon 5 s alatt 50 m magasra jut. Mekkora munkát végzett az emelő erő?

4.7. feladat: $\alpha = 30°$-os lejtőn valaki egy $m = 20$ kilogrammos bőröndöt tol fel vízszintes irányú erővel $h = 2$ méter magasra. A mozgási súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$. A bőrönd mozgása egyenletes. Mennyi munkát végez:

a) az ember,

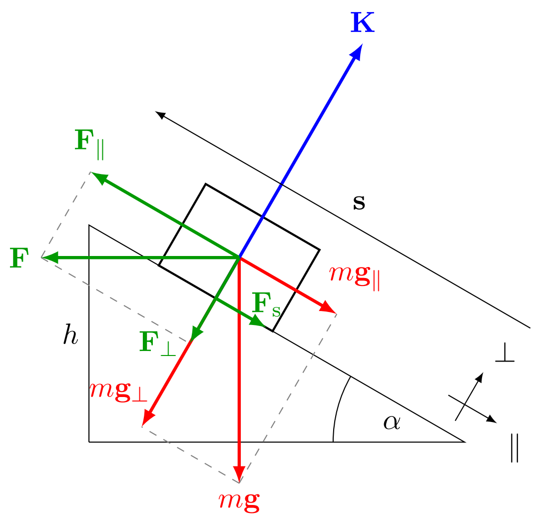
b) a súrlódási erő,

c) a bőröndre ható nehézségi erő,

d) a lejtő nyomóereje,

e) a bőröndre ható erők eredője?

($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



Mivel állandó erők hatnak, így a munkát ki lehet számítani az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként. A feladat megoldásához először határozzuk meg, hogy mekkora F erőre van szükség. A Newton-egyenleteket felírva azt kapjuk, hogy

$$\perp: \qquad 0 = K - mg\cos\alpha - F\cdot\sin\alpha$$
$$\parallel: \qquad 0 = F\cdot\cos\alpha - mg\sin\alpha - F_s\,,$$

ahol $F_s = \mu\cdot K$, és K az első egyenletből kifejezhető:

$$K = mg\cos\alpha + F\sin\alpha\,,$$

melyet a második egyenletbe helyettesítve:

$$0 = F\cdot\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu\cdot\big(mg\cos\alpha + F\sin\alpha\big)$$
$$F = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\,.$$

Szükségünk lesz még a többi erő nagyságára is:

$$\begin{aligned}K &= mg\cos\alpha + F\sin\alpha\\ &= mg\cos\alpha + \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\sin\alpha\\ &= \frac{\cos^2\alpha - \mu\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha + \mu\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\\ &= \frac{1}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\,,\end{aligned}$$
$$F_s = \mu K = \frac{1}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot \mu mg\,.$$

a) Az ember által végzett munka:

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{ember}} &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos\alpha\\ &= \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\cdot\frac{h}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha\\ &= \frac{\sin 30° + 0{,}2\cdot\cos 30°}{\cos 30° - 0{,}2\cdot\sin 30°}\cdot\\ &\qquad\cdot 20\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot\frac{2\,\mathrm{m}}{\sin 30°}\cdot\cos 30°\\ &= 608{,}87\,\mathrm{J}\,.\end{aligned}$$

b) A súrlódási erő által végzett munka:

$$\begin{aligned}W_s &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = -F_s\cdot s\\ &= -\frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot\frac{h}{\sin\alpha}\\ &= -\frac{0{,}2\cdot 20\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}}{\cos 30° - 0{,}2\cdot\sin 30°}\cdot\frac{2\,\mathrm{m}}{\sin 30°}\\ &= -208{,}87\,\mathrm{J}\,.\end{aligned}$$

c) A nehézségi erő munkája

$$\begin{aligned}W_{mg} &= m\mathbf{g}\cdot\mathbf{s} = -mg_{\parallel}\cdot s = -mg\sin\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha}\\ &= -20\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot 2\,\mathrm{m} = -400\,\mathrm{J}\,.\end{aligned}$$

d) A lejtő nyomóereje nem végez munkát, hiszen az merőleges az **s** elmozdulásra.

e) A bőröndre ható erők eredője nulla, hiszen a bőrönd összgyorsulása nulla. Ennek munkája természetesen nulla.

Vegyük észre, hogy ezt a korábbi eredményekből is megkapjuk, hiszen ha összeadjuk az összes erő munkáját, akkor is nullát kapunk.

3.1. Munkatétel

6A-12. feladat: Egy 15 g tömegű golyó a fegyver 72 cm hosszúságú csövében 780 m/s sebességre gyorsul fel. A munkatétel felhasználásával határozzuk meg a golyót gyorsító átlagos erőt!

A munka most $W = Fl$, az energiaváltozás

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 - \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{0},$$

a kettőt munkatétellel összekötve és átrendezve:

$$F = \frac{mv^2}{2l} = \frac{0{,}015\,\mathrm{kg}\cdot\left(780\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 0{,}72\,\mathrm{m}} 6337{,}5\,\mathrm{N}.$$

6B-15. feladat: Egy 5 g tömegű, 600 m/s sebességű golyó fatörzsbe csapódva 4 cm mélyen hatol a fába.
a, Energetikai megfontolások alapján határozzuk meg a golyót lassító átlagos súrlódási erőt!
b, Feltéve, hogy a súrlódási erő állandó, határozzuk meg, hogy mennyi idő telt el a golyónak a fába való behatolásába megállásig!

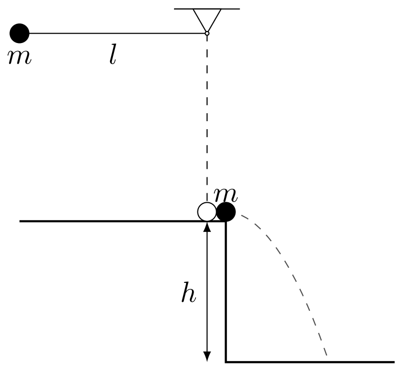
a, $F = 22500\,\mathrm{N}$
b, $t = 0{,}13\,\mathrm{ms}$

7B-23. feladat: Egy egyszerű inga egy 2 m hosszú fonálból és egy 3 kg tömegű ingatestből áll. Az ingatestet $v_0 = 2{,}4\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel elindítjuk midőn a fonal a függőlegessel 20°-os szöget zár be. Az inga ezután szabadon leng.
a, Határozzuk meg a maximális ϑ szöget, amelyet a fonál függőlegessel bezár, midőn az inga kitérése maximális.
b, Mekkora a fonál feszítő ereje, midőn az ingatest visszalendül az eredeti 20°-os helyzetébe?

Ábra!!!!!!!!!!!!!!!!!! a, $\vartheta = 37{,}27°$

D. feladat: 1,25 m magasból a 0,1 kg tömegű golyó a 0,1 s időtartamú kölcsönhatás után 80 cm magasra pattan vissza. ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$) Mekkora átlagos erőt fejtett ki a talaj a golyóra?

4.39. feladat: Az ábrán látható ingát 90°-kal kitérítjük és elengedjük. Az asztal szélén levő, vele egyenlő tömegű golyóval teljesen rugalmasan ütközik. Határozzuk meg, hogy az asztaltól milyen távol ér a padlóra a lelökött golyó!



A mozgás több részre bontható. Először az inga lelendül (1–2), majd megtörténik az ütközés (2–3), végül pedig a második test leesik (3–4). Ezeket a speciális állapotokat mind összeköti a munkatétel, melyet használhatunk.

1–2: Az ingatest lelendül. Válasszuk a helyzeti energia nullszintjét az asztal szintjének. Ekkor a testnek az (1) pontban van helyzeti energiája, ám nincs mozgási energiája, ezzel szemben a (2) helyzetben helyzeti energiája nincs, cserébe viszont mozgási energiája lett, hiszen v_2 sebességgel mozog. A testre a kötélerő hat, ami sosem végez munkát, illetve hat rá a nehézségi erő, annak a munkáját viszont helyzeti energiában vettük figyelembe.

Ez alapján a munkatörvény:

$$W = \Delta\left(E_\mathrm{kin} + E_\mathrm{pot}\right)$$
$$0 = \left(\frac{1}{2}mv_2^2\right) - (mgl)$$
$$v_2 = \sqrt{2gl}\,.$$

2–3: Itt történik meg az ütközés. Mivel az ütközés teljesen rugalmas, így az ütközés során az energia megmarad. Szintén mivel a külső erők munkája nulla, így az impulzusmegmaradást is lehet használni. A két törvény:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}mu_3^2$$

$$mv_2 + 0 = mv_3 + mu_3 \ ,$$

ahol az u-val jelölt tagok a kezdetben álló golyó jellemzői.

A két egyenlet egyszerűsítve:

$$v_2^2 = v_3^2 + u_3^2$$
$$v_2 = v_3 + u_3 \ ,$$

majd a második egyenlet négyzetre emelve:

$$v_2^2 = v_3^2 + u_3^2 + 2v_3v_3' \ ,$$

és ebből az első egyenletet kivonva:

$$0 = 2v_3u_3 \ ,$$

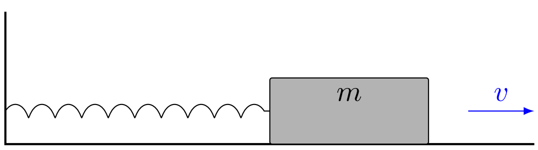
tehát vagy az első vagy a második test állni fog az ütközés után. Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletre pillantva láthatjuk, hogy ha az egyik sebesség nulla, akkor a teljes kezdeti sebességet a másik test kapja meg. Innen adódik, hogy a kezdetben mozgó golyónak kell megállnia, és a másiknak ugyanakkora sebességgel továbbhaladnia, hiszen a fordított eset nem lehetséges. Tehát $v_3 = 0$, $u_3 = v_2 = \sqrt{2gl}$.

3–4: A mozgás utolsó szakaszában egy vízszintes hajítás történik. A leesés ideje $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, mely alatt a test

$$s = T \cdot u_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \sqrt{2gl} = 2\sqrt{lh}$$

utat tesz meg.

D6. feladat: Az ábrán látható $m = 0{,}01\,\mathrm{kg}$ tömegű testtel $\Delta l = 7{,}5\,\mathrm{cm}$-rel összenyomtuk a $D = 4\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugót, majd a testet elengedtük. A test és a vízszintes felület közti mozgási súrlódási együttható értéke $\mu = 0{,}25$. Mekkora utat tesz meg a test a megállásig?



A megoldást a munkatétel alapján fogjuk megadni. Tekintsük a rugót és a testet egy rendszernek. Vegyük sorra a rendszer energiájának megváltozását és a rendszeren végzett munkákat. Kezdetben a test állt, illetve a rugó meg volt feszítve, a végállapotban pedig a rugó egyenes, illetve a test áll. A rendszeren csak a súrlódási erő végez munkát. Ez alapján a munkatétel:

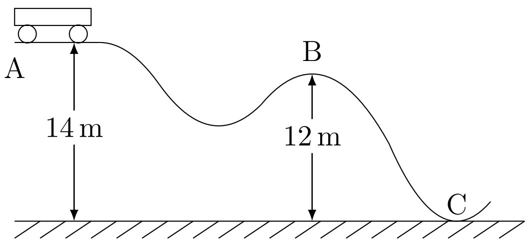
$$\Delta E_{\mathrm{kin}} + \Delta E_{\mathrm{rug}} = W_{\mathrm{s}}$$
$$(0-0) + \left(0 - \frac{1}{2}D \cdot (\Delta l)^2\right) = -\mu mgs$$
$$\frac{1}{2}D \cdot (\Delta l)^2 = \mu mgs \ ,$$

ahol felhasználtuk, hogy a Δl-lel összenyomott rugóban tárolt energia $E_{\mathrm{rug}} = \frac{1}{2}D(\Delta l)^2$. Innen

$$s = \frac{1}{2}D \cdot \frac{(\Delta l)^2}{\mu mg} = \frac{1}{2} \cdot 4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{(0{,}075\,\mathrm{m})^2}{0{,}25 \cdot 0{,}01\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$
$$= 0{,}45\,\mathrm{m} \ .$$

3.1.1. körmozgással

7A-6. feladat: A hullámvasúti kocsi sebessége, amikor a kocsi az A helyen van $3\,\mathrm{m/s}$.
a, Mekkora a kocsi sebessége a pálya B pontján ha a súrlódás elhanyagolhatóan kicsiny?
b, Mekkora az a minimális görbület a B pontban, amelynél még biztonsági öv használata nélkül sem repülnek ki az ülésről az utasok?



Kezdetben az energiája

$$E_0 = mgh_0 + 1/2mv_0^2 = 144{,}5m.$$

A B pontban a magasság miatt lesz neki

$$E_{Bh} = mgh_B = 120m$$

helyzeti energiája, tehát a maradék

$$E_{Bk} = E_0 - E_B = 24{,}5m$$

jut a kinetikus tagra. Ez alapján

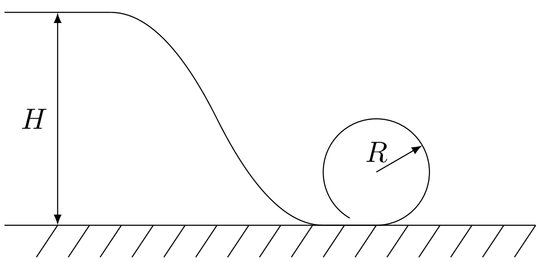
$$v_B = \sqrt{\frac{2E_{Bk}}{m}} = 7\,\mathrm{m/s}.$$

A B pontban a körpálya "repítene ki", és a nehézségi erő tartana bent. A határfeltétel a nehézségi és a centripetális erő egyensúlya:

$$mg = m\frac{v^2}{R},$$

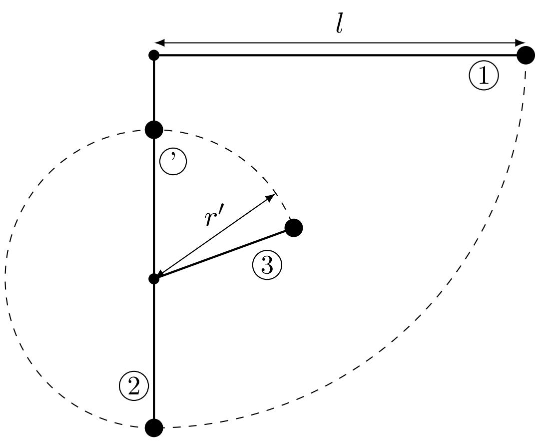
vagyis
$$R = \frac{v_B^2}{g} = 4{,}9\,\mathrm{m}.$$

7B-12. feladat: Egy vásári akrobata kerékpáros álló helyzetből indulva súrlódásmentes pályán gurul le, amely függőleges síkú hurokban végződik, amint ez az ábrán látható. Határozzuk meg azt a minimális H magasságot, amely szükséges ahhoz, hogy a kerékpár minden időpontban érintkezésben maradjon a pályával. A hurkot közelítő körpálya sugara R. (Útmutatás: a hurok legfelső pontja a kritikus helyzet)



A kezdeti energia $E_0 = mgH$, az energia a kör legtetején $E = mg2R + \frac{1}{2}mv^2$. A körpályán maradáshoz a centripetális erő ott a nehézségi erőből jön, azaz: $F_{\mathrm{cp}} = m\frac{v^2}{R} = mg$, így $v = \sqrt{gR}$. Az energia megmarad, így H-ra azt kapjuk, hogy:
$$H = 2R + \frac{1}{2}R = 2{,}5R.$$

6.30. feladat: Egy fonálingát nyugalmi helyzetéhez képest 90°-kal kitérítünk, majd elengedünk. Amikor az inga átlendül a függőleges helyzeten, a fonál egy szögbe ütközik. A fonal hosszának hányadrészénél lehet a szög, ha azt akarjuk, hogy a fonál végére kötött test további pályája *teljes egészében* kör legyen?



A teljes kör megtételének feltétele, hogy elérjük a kis kör legfelső pontját és az inga átlendüljön rajta. Használjuk a munkatételt. A nehézségi erő munkája:
$$W = mg(l - 2r'),$$
míg a mozgási energia megváltozása:
$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m\underbrace{v_1^2}_{0}.$$
Másrészt a körmozgás feltételéből a centripetális és nehézségi erő megegyezik ebben a pontban:
$$m\frac{v'^2}{r'} = mg,$$
amelyből $v' = \sqrt{gr'}$. Ezt behelyettesítve a munkatételbe:
$$mg(l - 2r') = \frac{1}{2}mgr'$$
$$r' = 0{,}4l.$$

3.2. Teljesítmény

6A-39. feladat: Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

$P = \mathbf{F}\mathbf{v} = 12000\,\mathrm{W}$

6B-40. feladat: Egy 1500 kg tömegű gépkocsi 10 másodperc alatt fékez le 100 km/h sebességről megállásig. Határozzuk meg
a, a fék által végzett munkát!
b, a fékek által kifejtett átlagos teljesítményt!

A munkatétel alapján
$$W = \Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v_1^2) = 578{,}7\,\mathrm{kJ}$$
Az átlagos teljesítmény:
$$\overline{P} = \frac{W}{t} = 57{,}87\,\mathrm{kW}$$
Megj. Pillanatnyi sebesség számolása: $P_{\mathrm{pill}} = \mathbf{F}\mathbf{v}$.

6C-76. feladat: A 15 m/s állandó sebességű, 1500 kg-os gépkocsi motorja a súrlódás és a légellenállás leküzdésére 15 kW teljesítménnyel dolgozik.
a, Mekkora az átlagos ellenállóerő (súrlódás és légellenállás együtt)?
b, Mekkora átlagos teljesítményt kellene leadnia a motornak ahhoz, hogy a gépkocsi ugyanezzel a sebességgel 8 %-os (8 m függőleges emelkedés 100 méterenként) emelkedőn mozogjon felfelé?

Az átlagos erő:

$$\overline{F} = \frac{P}{v} = 1000\,\mathrm{N}$$

Egy 8%-os lejtő $\alpha = \mathrm{arctg}\,0{,}08 = 4{,}57°$-os meredekségű. A kocsit lassítja a nehézségi erő párhuzamos komponense (lásd **6B-23**-as feladat ábra), így a motor által kifejtett erő:

$$F_{\mathrm{motor}} = \overline{F} + mg\sin\alpha,$$

így a teljes teljesítmény:

$$P_{\mathrm{motor}} = F_{\mathrm{motor}}v = 32{,}586\,\mathrm{W}.$$

E. feladat: 100 N súlyú testet 120 N nagyságú erővel emelünk. Mekkora az emelő erő átlagteljesítménye az első 2 másodpercben?

A testre ható erők eredője:

$$ma = F = F_{\mathrm{emel}} - mg = 120\,\mathrm{N} - 100\,\mathrm{N} = 20\,\mathrm{N}$$

A tömege $m = mg/g = 100\,\mathrm{N}/10\,\mathrm{m/s^2} = 10\,\mathrm{kg}$, így gyorsulása $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$.

A megtett út:

$$s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{2\,\mathrm{m/s^2}}{2}(2\,\mathrm{s})^2 = 4\,\mathrm{m},$$

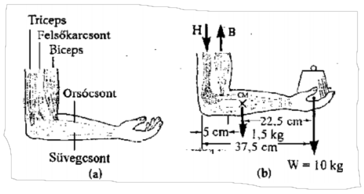
az erő munkája

$$W = F_{\mathrm{emel}}s\cos 0° = 120\,\mathrm{N}\cdot 4\,\mathrm{m} = 480\,\mathrm{J},$$

az átlagteljesítmény:

$$P = \frac{W}{t} = 240\,\mathrm{W}$$

10C-42. feladat: Az ábrán egy ember vízszintes alkarral 10 kg-os terhet tart. Az alkar 1,5 kg-os, tömegközéppontjának helyét az ábra mutatja. A bicepsz izom az alkart a könyöktől 5 cm-re függőlegesen felfelé húzza, míg a felkarcsont H erővel lefelé nyomja az ízületet.
a, Készítsünk vektorábrát az alkarról (egyszerűen vízszintes rúdként ábrázolva), tüntessük fel rajta az összes erővektort, mindegyiknek végét az erő támadáspontjába helyezve!
b, Határozzuk meg azt a B erőt, amelyet a bicepsz fejt ki az orsócsontra!
c, Amikor a kéz a terhet tartja, akkor a felsőkarcsont kompresszió (összenyomás) alatt van. Határozzuk meg azt a H erőt, amelyet a felsőkarcsont a könyökízületre gyakorol!



4.24. feladat: $mg = 100\,\mathrm{N}$ súlyú testet $F = 120\,\mathrm{N}$ nagyságú erővel emelünk. Mekkora a teljesítmény az indulás után $T = 2$ másodperccel? Mekkora az átlagteljesítmény az első 2 másodperc alatt?

A pillanatnyi teljesítmény $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. A testre ható erők eredője $F_e = 120\,\mathrm{N} - 100\,\mathrm{N} = 20\,\mathrm{N}$, vagyis a test gyorsulása $a = \frac{20\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$.

Kezdetben a test állt, T idő elteltével a test sebessége: $v(T) = a\cdot T = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot 2\,\mathrm{s} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Mivel ez a sebesség felfelé mutat, így egy irányba esik az emelőerővel. A teljesítményünk tehát:

$$P(2\,\mathrm{s}) = 120\,\mathrm{N}\cdot 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 480\,\mathrm{W}\ .$$

Az átlagteljesítmény kiszámításához tudnunk kell, hogy hogyan változik a pillanatnyi teljesítmény az időben. Az időfüggés a sebességen keresztül történik:

$$P(t) = F\cdot v(t) = F\cdot a\cdot t\ .$$

Mivel a teljesítmény az idővel lineáris kapcsolatban áll, így az átlagteljesítmény számolható, mint a kezdeti és a végállapotban lévő pillanatnyi teljesítmény számtani közepe:

$$P_{\mathrm{átl}} = \frac{P(2\,\mathrm{s}) + P(0)}{2} = \frac{480\,\mathrm{W} + 0}{2} = 240\,\mathrm{W}\ .$$