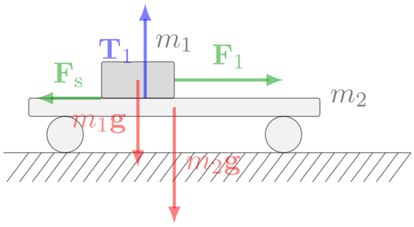
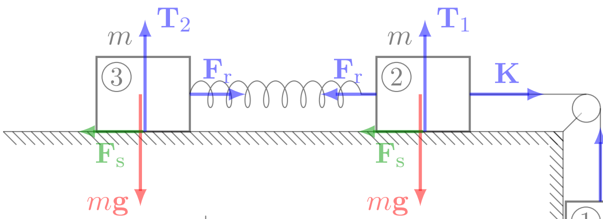
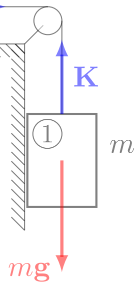
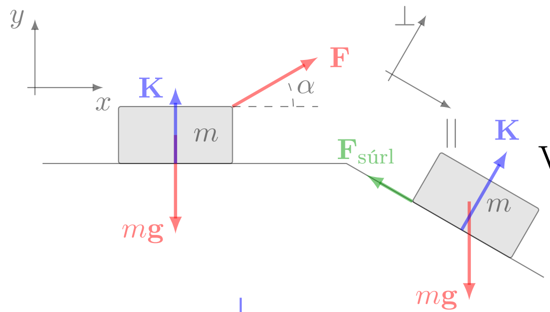




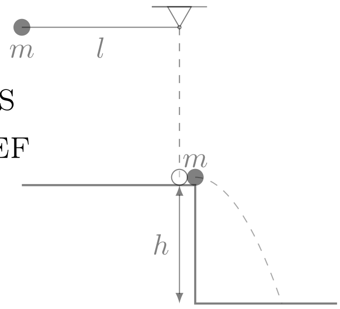


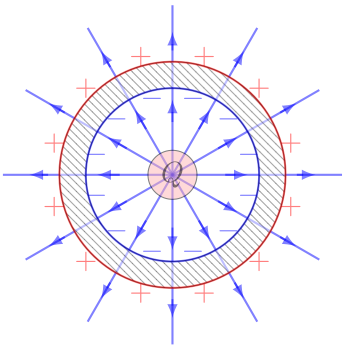
Bevezető fizika villamosmérnököknek

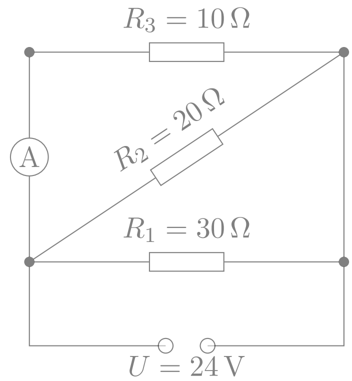
Kidolgozott példák gyűjteménye

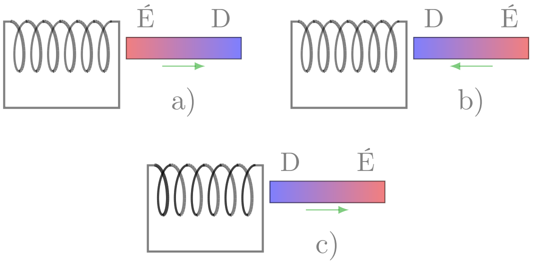


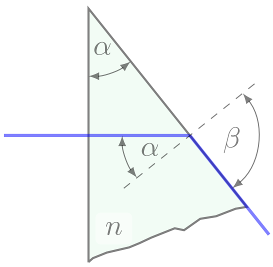
Nagyfalusi Balázs
Vida György József

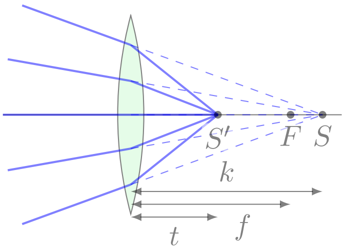












BME Fizikai Intézet
2015

Utolsó módosítás 2015. február 3. 12:52

Előszó

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen a frissen felvett mérnökhallgatók körében az utóbbi években megnövekedett az igény a középiskolai fizika összefoglalására, átismétlésére az egyetemi tanulmányok kezdetén. Így született meg a Bevezető fizika nevű tárgya, amelynek anyaga már állandósult az évek folyamán. A szerzők az idei őszi félév során úgy döntöttek, hogy az órákhoz készített jegyzeteiknek elkészítik az elektronikus változatát is a félév során. Ezek hétről hétre kikerültek a hallgatósághoz, azonban így a félév végén úgy döntöttünk, hogy egységes formába öntjük a részeket, és így született meg ez a mű.

Természetesen előfordulhatnak benne még hibák (sőt minden bizonnyal vannak még benne), és még egy-két helyen bővítésre szorul, de azért hasznos olvasmány lehet a tárgy hallgatói és persze minden érdeklődő számára.

Budapest, 2015. január — Nagyfalusi Balázs és Vida György József

Bevezető fizika (Vill), 1. feladatsor
Kinematika 1.

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- Alapfogalmak (út, sebesség, gyorsulás egyenes vonalú mozgásoknál)
- Az egyenes vonalú egyenletes mozgás
- Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás
- Mozgások függetlenségének elve
- szabadesés, hajítások a következő gyakorlat első felében!

Órai feladatok: (ha lehet hallgatók oldják meg a feladatokat táblánál)

I/1.6. feladat:
Két helyiség között a kocsik átlagsebessége az egyik irányban $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$, a másik irányban $v_2 = 60\,\mathrm{km/h}$. Mekkora az átlagsebesség egy teljes fordulót figyelembe véve?

Az átlagsebesség az teljes megtett út és az ehhez szükséges idő hányadosa. Legyen s a távolság a két település között. Ekkor a teljes megtett út $2s$. Az odaút és a visszaút időtartama:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} \qquad t_2 = \frac{s}{v_2} \,,$$

vagyis az átlagsebesség:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \,.$$

I/1.39. feladat:
Egy test sebessége most $v_2 = -20\,\mathrm{m/s}$, $\Delta t = 100$ másodperccel ezelőtt $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$ volt. Mennyi volt a test átlagos gyorsulása?

Az átlaggyorsulás az adott idő alatt történt sebességváltozás és az ehhez szükséges idő hányadosa:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{-20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{100\,\mathrm{s}} = -0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \,.$$

I/1.9. feladat:
Egy gépkocsi sebességét $v_1 = 54\,\mathrm{km/h}$-ról $v_2 = 90\,\mathrm{km/h}$-ra növelte állandó $a = 1{,}6\,\mathrm{m/s}^2$ gyorsulással. Mennyi ideig tartott ez, és mekkora utat tett meg a gépkocsi ezalatt?

Állandó gyorsulás esetén a sebesség megváltozása egyenlő a mindenkori gyorsulással, vagyis:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

$$= \frac{36\,\frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}}{1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 6{,}25\,\mathrm{s} \,.$$

Az ezalatt megtett utat a négyzetes úttörvénnyel számolhatjuk

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \,,$$

ahol a a kocsi gyorsulása, v_0 a kezdeti időpontban a sebessége, vagyis $54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, és x_0 annak kezdeti pozíciója. Ez utóbbi legyen nulla, hiszen onnan kezdjük el mérni a megtett utat a gyorsítás végéig:

$$x(t) = \frac{1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(6{,}25\,\mathrm{s})^2 + 54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 6{,}25\,\mathrm{s} = 125\,\mathrm{m} \,.$$

I/1.10. feladat:
$a = 2\,\mathrm{m/s}^2$ gyorsulással induló gépkocsi elérve a $v_\mathrm{v} = 6\,\mathrm{m/s}$ sebességet egyenletesen mozog tovább. Milyen messze jut az indulástól számított $T = 8$ másodperc alatt?

Először számoljuk ki, hogy mennyi időre van szüksége az autónak, hogy elérje a v_v sebességet. Mivel a gyorsulás egyenletes, így

$$a = \frac{v_\mathrm{v}}{t_1} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{v_\mathrm{v}}{a} = \frac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 3\,\mathrm{s} \,.$$

Ez alatt az autó

$$s_1 = \frac{a}{2}t_1^2 = \frac{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot (3\,\mathrm{s})^2 = 9\,\mathrm{m}$$

távolságot tesz meg.

A hátralévő $t_2 = 8\,\mathrm{s} - 3\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{s}$ idő alatt az autó egyenletes mozgást végez. Az ezalatt megtett út:

$$s_2 = v_\mathrm{v} \cdot t_2 = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 5\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{m}\ .$$

Vagyis a teljes megtett távolság $s = 39\,\mathrm{m}$.

I/1.21. feladat:
Egy gépkocsi $a = 2{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ állandó gyorsulással indul, majd egyenletesen halad tovább, és $t = 5$ másodperc alatt $s = 29{,}4$ méter messzire jut. Határozzuk meg a gyorsulás időtartamát!

Gyorsítson az autó t_1 ideig. Mivel az autó álló helyzetből indul, így az ezalatt megtett távolság:

$$s_1 = \frac{a}{2}t_1^2\ .$$

Ez idő alatt az autó $v_\mathrm{v} = a \cdot t_1$ sebességre tett szert. Az idő hátralevő részében ekkora sebességgel halad egyenletesen, és

$$s_2 = v_\mathrm{v} \cdot t_2 = a \cdot t_1 \cdot (t - t_1)$$

távot tesz meg. Összefoglalva

$$\begin{aligned}
s = s_1 + s_2 &= \frac{a}{2}t_1^2 + a \cdot t_1 \cdot (t - t_1)\\
&= -\frac{a}{2}t_1^2 + a \cdot t_1 \cdot t\\
0 &= \frac{a}{2}t_1^2 - at \cdot t_1 + s\\
0 &= 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_1^2 - 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t_1 + 29{,}4\,\mathrm{m}\\
(t_1)_{1,2} &= \frac{14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{\left(14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 4 \cdot 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 29{,}4\,\mathrm{m}}}{2 \cdot 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\\
&= \begin{cases} 7\,\mathrm{s} \\ 3\,\mathrm{s} \end{cases} .
\end{aligned}$$

A két megoldás közül csak a $t_1 = 3\,\mathrm{s}$ az értelmes, hiszen a teljes időtartam $5\,\mathrm{s}$.

I/1.19. feladat:
Az esőcseppek függőleges irányban esnek $v_\text{eső} = 6\,\mathrm{m/s}$ sebességgel. Az esőcseppek nyomai a vonatablakon a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró csíkok. Milyen gyorsan megy a vonat?

A vonatablakon lévő csíkok az esőcseppek látszólagos sebességvektorával egy irányba mutatnak. Az esőcseppek függőleges sebességvektora, illetve a vonat vízszintes sebességvektora egy derékszögű háromszöget határoz meg, ahol a háromszög átfogójának hossza megegyezik a cseppek látszólagos, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró sebességvektorának hosszával. A háromszögben a megfelelő szögfüggvényt felírva:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}\,\alpha &= \frac{v_\text{eső}}{v_\text{vonat}}\\
v_\text{vonat} &= \frac{v_\text{eső}}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{tg}\,30°} = 10{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .
\end{aligned}$$

I/1.33. feladat:
A folyó szélessége $d = 200\,\mathrm{m}$, sebessége $v_\mathrm{f} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$. Hol köt ki a túlsó parton az átkelő csónak, ha a vízhez viszonyított sebességének nagysága $v_\mathrm{cs} = 3\,\mathrm{m/s}$, iránya a víz folyásának irányára merőleges?

A csónak $t = \frac{d}{v_\mathrm{cs}} = \frac{200\,\mathrm{m}}{3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{200}{3}\,\mathrm{s}$ alatt ér át a másik partra. Eközben a folyó $d = v_\mathrm{f} \cdot t = 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{200}{3}\,\mathrm{s} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{200}{3}\,\mathrm{s} = 66{,}7\,\mathrm{m}$ viszi le a csónakot a folyásirányba. Tehát a csónak ennyivel lejjebb fog kikötni a túloldalon.

I/1.37. feladat:
$v_\mathrm{v} = 72\,\mathrm{km/h}$ sebességgel haladó vonaton egy utas a vonat mozgásával ellentétes irányban elindul a vonathoz viszonyított $a_\mathrm{e} = 0{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással. Három másodperc alatt mekkora a pályatesthez viszonyított elmozdulása?

A pályatesthez viszonyítva az ember egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A négyzetes úttörvényt használva:

$$\begin{aligned}
s &= -\frac{a_\mathrm{e}}{2}t^2 + v_\mathrm{v}t = -\frac{0{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot (3\,\mathrm{s})^2 + 72 \cdot \frac{1000}{3600}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3\,\mathrm{s}\\
&= 56{,}4\,\mathrm{m}\ .
\end{aligned}$$

I/1.15. feladat:
Határozzuk meg a $v_0 = 120\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel $\alpha = 30°$-os szögben kilőtt test helyzetét a kilövés után 3 másodperccel!

A test vízszintes irányban egyenletes mozgást végez:

$$x(t) = v_{0x}t + x_0\ ,$$

ahol v_{0x} a kezdősebesség vízszintes komponense: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$. Az x_0 a $t = 0$ pillanatban a test helye. Helyezzük a koordináta-rendszerünket oda, ahonnan elhajítjuk a testet, így $x(t = 0) = 0$, vagyis $x_0 = 0$.

Függőleges irányban a test egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Az y tengely felfelé mutat, így a gyorsulás negatív:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0 \ ,$$

ahol v_{0y} a függőleges kezdősebesség: $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$, illetve az előzőekhez hasonlóan y_0 itt is nulla.

A mozgást leíró két egyenlet tehát:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t \ . \end{aligned}$$

A $t = 3\,\mathrm{s}$-ban:

$$\begin{aligned} x(3\,\mathrm{s}) &= 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 30° \cdot 3\,\mathrm{s} = 311{,}77\,\mathrm{m} \\ y(3\,\mathrm{s}) &= -\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(3\,\mathrm{s})^2 + 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 30° \cdot 3\,\mathrm{s} \\ &= 135\,\mathrm{m} \ . \end{aligned}$$

I/1.14. feladat:
$h = 200$ méter magasságban $v_0 = 360\,\mathrm{km/h}$ sebességgel haladó repülőgépről a cél előtt milyen távolságban kellene kioldani a segélycsomagot ahhoz, hogy a célba csapódjék, ha nem lenne légellenállás? Mekkora lenne a segélycsomag sebessége a becsapódás pillanatában?

Függőlegesen a csomag egyenletes gyorsulással mozog, vagyis a magassága az idő függvényében:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h \ .$$

T idő alatt ez a magasság nullára csökken:

$$0 = -\frac{g}{2}T^2 + h \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6{,}32\,\mathrm{s}.$$

A csomag vízszintes kezdősebessége megegyezik a repülő sebességével, és ez a csomag mozgása során nem is változik. Emiatt, ha T idő alatt ér földet a csomag, akkor az vízszintesen $s = v_0 \cdot T$ távolságot tesz meg. Ez alapján

$$0 = -\frac{g}{2}\frac{s^2}{v_0^2} + h \qquad \Rightarrow \qquad s = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}} = 632{,}45\,\mathrm{m} \ .$$

A függőlegesen szerzett sebessége: $v_y = -gT = -63{,}2\,\mathrm{m/s}$, vízszintesen pedig maradt $v_x = v_0$. Az eredő sebesség nagysága:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 118{,}32\,\mathrm{m/s}.$$

Otthoni gyakorlásra: DRS példatár 1. kötet 1.20, 1.22, 1.23, 1.30, 1.31, 1.41, B1, F1

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (vill), 2. feladatsor
Kinematika 2. és Dinamika 1.

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- Röviden beszéljük meg az otthoni felkészülés során felmerült kérdéseket.
- szabadesés, hajítások (kb. 10 perc)
- Az erő, az erők összegezése; Newton törvényei; testek egyensúlya; tömeg, nehézségi erő, súly, súlytalanság. súrlódás

Példák órai gyakorlásra:

II/1.13. feladat:
A talaj fölött $h_0 = 30$ méter magasságból $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel kavicsot dobunk függőlegesen fölfelé. Mekkora a kavics sebessége, elmozdulása és a megtett út $t_1 = 1\,\mathrm{s}, t_2 = 3\,\mathrm{s}; t_3 = 5\,\mathrm{s}$ múlva.

A kavics útja a következő. Először felfelé megy, eléri a maximális magasságot, majd elindul lefelé és eléri a talajt. Ez két nevezetes időpontot jelent, egyet a csúcson (t_{fel}), és az út végén ($t_{\mathrm{össz}}$). t_{fel} meghatározható a kezdeti sebességtől, és a lassulásból:

$$t_{\mathrm{fel}} = \frac{v_0}{g} = \frac{20\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 2\,\mathrm{s}.$$

Ez alapján az első időpontban még emelkedett. A sebessége $v_1 = v_0 - gt = 20\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m/s}$. A megtett út

$$\begin{aligned} s_1 =& v_0 t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} - \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(1\,\mathrm{s})^2 \\ =& 15\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

és végig azonos irányban haladt, így az elmozdulás megegyezik az úttal. A maximális magasság:

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{fel}} =& v_0 t_{\mathrm{fel}} - \frac{g}{2} t_1^2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 2\,\mathrm{s} - \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(2\,\mathrm{s})^2 \\ =& 20\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

tehát összesen $H = h_0 + s_{\mathrm{fel}} = 50\,\mathrm{m}$ magasra jutott, ahonnan a leeséshez szükséges idő meghatározható a $H = \frac{g}{2} t_{\mathrm{le}}^2$ összefüggésből:

$$t_{\mathrm{le}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{10}\,\mathrm{s} > 3\,\mathrm{s},$$

azaz az ötödik másodpercben még repülni fog. Tehát 2 másodpercig emelkedett, így t_2-ig még 1-et zuhant. A megtett út:

$$s_{22} = \frac{g}{s}(t_2 - t_{\mathrm{fel}})^2 = \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s})^2 = 5\,\mathrm{m},$$

összesen $s_2 = s_{\mathrm{fel}} + s_{22} = 25\,\mathrm{m}$. Az elmozdulás $r_2 = s_{\mathrm{fel}} - s_{22} = 15\,\mathrm{m}$. A sebessége ekkor $v_2 = -g(t_2 - t_{\mathrm{fel}}) = -10\,\mathrm{m/s}$, ahol figyelembe vettük, hogy a pozitív irány függőlegesen felfelé választottuk.

t_3 időpillanatig $t_3 - t_{\mathrm{fel}}$-t zuhan. A keresett értékek:

$$s_{32} = \frac{g}{s}(t_3 - t_{\mathrm{fel}})^2 = \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s})^2 = 45\,\mathrm{m},$$

összesen $s_3 = s_{\mathrm{fel}} + s_{32} = 65\,\mathrm{m}$. Az elmozdulás $r_2 = s_{\mathrm{fel}} - s_{32} = -25\,\mathrm{m}$. A sebessége ekkor $v_3 = -g(t_3 - t_{\mathrm{fel}}) = -30\,\mathrm{m/s}$.

II/A1. feladat:
Egy követ függőlegesen felfelé, egy másik követ függőlegesen lefelé hajítunk $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ sebességgel, ugyanabban a pillanatban, Mennyi idő múlva lesznek egymástól $x = 60$ méter távolságban?

Írjuk fel a két megtett utat a kívülről nézve:

$$x_{\mathrm{fel}} = v_0 t - \frac{g}{2} t^2,$$

$$x_{\mathrm{le}} = v_0 t + \frac{g}{2} t^2.$$

Összegük (amely pont a távolságnak felel meg): $x = x_{\mathrm{fel}} + x_{\mathrm{le}} = 2 v_0 t$, így az eltelt idő:

$$t = \frac{x}{2 v_0} = 2{,}5\,\mathrm{s}.$$

II/1.15. feladat:
Határozzuk meg a $v_0 = 120\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel $\alpha = 30°$-os szögben kilőtt test helyzetét a kilövés után 3 másodperccel!

A test vízszintes irányban egyenletes mozgást végez:

$$x(t) = v_{0x}t + x_0\ ,$$

ahol v_{0x} a kezdősebesség vízszintes komponense: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$. Az x_0 a $t = 0$ pillanatban a test helye. Helyezzük a koordináta-rendszerünket oda, ahonnan elhajítjuk a testet, így $x(t = 0) = 0$, vagyis $x_0 = 0$.

Függőleges irányban a test egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Az y tengely felfelé mutat, így a gyorsulás negatív:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0\ ,$$

ahol v_{0y} a függőleges kezdősebesség: $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$, illetve az előzőekhez hasonlóan y_0 itt is nulla.

A mozgást leíró két egyenlet tehát:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t\ . \end{aligned}$$

A $t = 3\,\mathrm{s}$-ban:

$$\begin{aligned} x(3\,\mathrm{s}) &= 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 30° \cdot 3\,\mathrm{s} = 311{,}77\,\mathrm{m} \\ y(3\,\mathrm{s}) &= -\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(3\,\mathrm{s})^2 + 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 30° \cdot 3\,\mathrm{s} \\ &= 135\,\mathrm{m}\ . \end{aligned}$$

II/1.14. feladat:
$h = 200$ méter magasságban $v_0 = 360\,\mathrm{km/h}$ sebességgel haladó repülőgépről a cél előtt milyen távolságban kellene kioldani a segélycsomagot ahhoz, hogy a célba csapódjék, ha nem lenne légellenállás? Mekkora lenne a segélycsomag sebessége a becsapódás pillanatában?

Függőlegesen a csomag egyenletes gyorsulással mozog, vagyis a magassága az idő függvényében:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h\ .$$

T idő alatt ez a magasság nullára csökken:

$$0 = -\frac{g}{2}T^2 + h \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6{,}32\,\mathrm{s}.$$

A csomag vízszintes kezdősebessége megegyezik a repülő sebességével, és ez a csomag mozgása során nem is változik. Emiatt, ha T idő alatt ér földet a csomag, akkor az vízszintesen $s = v_0 \cdot T$ távolságot tesz meg. Ez alapján

$$0 = -\frac{g}{2}\frac{s^2}{v_0^2} + h \qquad \Rightarrow \qquad s = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}} = 632{,}45\,\mathrm{m}\ .$$

A függőlegesen szerzett sebessége: $v_y = -gT = -63{,}2\,\mathrm{m/s}$, vízszintesen pedig maradt $v_x = v_0$. Az eredő sebesség nagysága:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 118{,}32\,\mathrm{m/s}.$$

II/2.14. feladat:
Milyen erő hat az eldobott kőre? Mekkora a gyorsulása?

Nehézségi erő, közegellenállás. $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

II/2.3. feladat:
A $v_0 = 9\,\mathrm{m/s}$ sebességgel elütött korong a jégen $s = 36\,\mathrm{m}$ út megtétele után áll meg. Mekkora a súrlódási együttható a korong és a jég között?

A korong egyenletesen lassult, átlagsebessége $v_{\text{átl}} = \frac{v_0}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$. Ez alapján a megállásig eltelt idő

$$t = \frac{s}{v_{\text{átl}}} = \frac{36\,\mathrm{m}}{4{,}5\,\mathrm{m/s}} = 8\,\mathrm{s}.$$

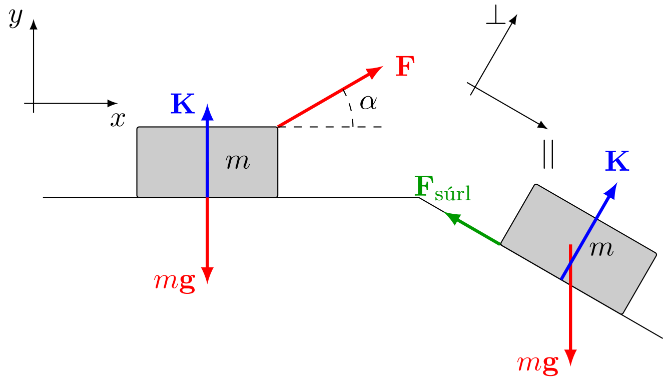
A gyorsulása

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0\,\mathrm{m/s} - 9\,\mathrm{m/s}}{8\,\mathrm{s}} = -\frac{9}{8}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Newton szerint $ma = -F_{\text{súrl}} = -\mu F_{\text{nyomó}} = -\mu mg$, azaz

$$\mu = -\frac{a}{g} = \frac{9/8}{10} = 0{,}1125.$$

II/2.4. feladat:
Milyen erők hatnak egy vízszintes lapon és egy lejtőn nyugvó testre? (Készítsen ábrát!)
$m = 10\,\mathrm{kg}$ tömegű testet a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró $F = 20\,\mathrm{N}$ erővel húzunk. Mekkora a test gyorsulása, ha a csúszási súrlódási tényező értéke $\mu = 0{,}1$?



A Newton-törvények, figyelembe véve, hogy függőlegesen nem mozdulunk el:

$$x: \qquad ma = F\cos\alpha - F_{\text{súrl}}$$
$$y: \qquad 0 = F\sin\alpha - mg + K$$

A második alapján a kényszererő nagysága:

$$K = mg - F\sin\alpha = 10\,\text{kg}\cdot 10\,\text{m/s}^2 - 20\,\text{N}\cdot\sin 30^\circ = 90\,\text{N},$$

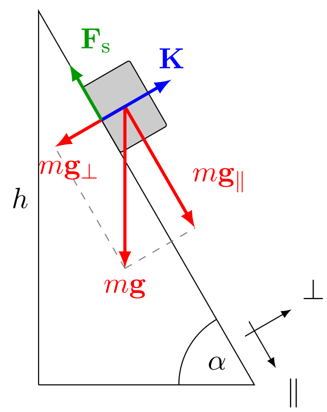
amelyet már behelyettesíthetünk az elsőbe, hiszen $F_{\text{súrl}} = \mu K$, és a gyorsulásra azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{1}{m}\left(F\cdot\cos\alpha - \mu K\right) = \frac{1}{10\,\text{kg}}\left(20\,\text{N}\cdot\cos 30^\circ - 0{,}1\cdot 90\,\text{N}\right) = 0{,}832\,\text{m/s}^2.$$

II/2.12. feladat:
$h = 10\,\text{m}$ magas, $\alpha = 60^\circ$-os lejtő tetejéről csúszik le egy test. Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt ér le a lejtő aljára, ha

a) a lejtő súrlódásmentes,

b) a lejtő és a test közötti súrlódási együttható $\mu = 0{,}5$?



a) Írjuk fel a Newton-törvényt a lejtőről lecsúszó testre, a lejtővel párhuzamos és arra merőleges irányban:

$$\begin{aligned} \parallel \qquad & ma_\parallel = mg_\parallel = mg\sin\alpha \\ \perp \qquad & ma_\perp = K - mg_\perp = K - mg\cos\alpha\,, \end{aligned}$$

Mivel a test a lejtőn csúszik, így arra merőlegesen nincsen elmozdulás, azaz $a_\perp = 0$. Az előző egyenletből adódik, hogy test gyorsulása a lejtő mentén $a_\parallel = g\cdot\sin\alpha$.

A lejtő hossza $s = \frac{h}{\sin\alpha}$, így a lecsúszás ideje:

$$\begin{aligned} s &= \frac{a}{2}T^2 \\ \frac{h}{\sin\alpha} &= \frac{a\sin\alpha}{2}T^2 \\ T &= \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\text{m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\sin^2 60^\circ}} = 1{,}63\,\text{s}\,, \end{aligned}$$

illetve a test sebessége a lejtő alján:

$$v_{\text{vég}} = a\cdot T = g\sin\alpha\cdot T = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 60^\circ\cdot 1{,}63\,\text{s} = 14{,}14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

b) Ha van súrlódás a lejtőn, akkor a Newton-egyenletek kiegészülnek:

$$\begin{aligned} \parallel \qquad & ma_\parallel = mg_\parallel - F_\text{s} = mg\sin\alpha - \mu K \\ \perp \qquad & ma_\perp = K - mg_\perp = K - mg\cos\alpha\,, \end{aligned}$$

ahol a második egyenletből kifejezhető K,

$$0 = K - mg\cos\alpha \qquad\Rightarrow\qquad K = mg\cos\alpha\,,$$

majd az elsőbe helyettesíthető:

$$a_\parallel = g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\,.$$

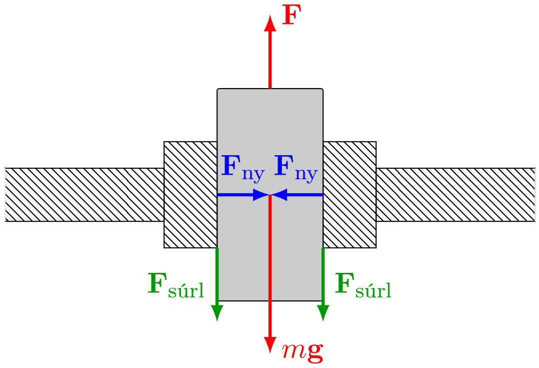
A lecsúszás ideje:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\cdot\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\text{m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\big(\sin 60^\circ - 0{,}5\cdot\cos 60^\circ\big)\cdot\sin 60^\circ}} = 1{,}94\,\text{s}\,,$$

illetve a test sebessége a lejtő alján:

$$\begin{aligned} v_{\text{vég}} &= a_\parallel\cdot T = g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\cdot T \\ &= 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\big(\sin 60^\circ - 0{,}5\cdot\cos 60^\circ\big)\cdot 1{,}94\,\text{s} \\ &= 11{,}93\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,. \end{aligned}$$

II/2.11. feladat:
$m\mathbf{g} = 50\,\mathrm{N}$ súlyú tégla alakú testet satuba fogunk. A satupofák $F_{\mathrm{ny}} = 150\,\mathrm{N}$ nagyságú vízszintes erővel nyomják a testet. Az érintkező felületek között $\mu = 0{,}5$ a súrlódási tényező. Mekkora erővel lehet a testet felfelé kihúzni?



A tapadási súrlódás maximális értéke $F_{\mathrm{tap}}^{\max} = \mu F_{\mathrm{ny}} = 0{,}5 \cdot 150\,\mathrm{N} = 75\,\mathrm{N}$. Két satuval ez $150\,\mathrm{N}$ erőt jelent. Ezen felül még ott van a tégla súlya, tehát a három erő összegét kell az F erőnek ellensúlyoznia. Így a kapott eredmény az, hogy

$$F \geq 2F_{\mathrm{tap}}^{\max} + mg = 200\,\mathrm{N}$$

Otthoni gyakorlásra:

II/1.19. feladat:
Az esőcseppek függőleges irányban esnek $v_{\text{eső}} = 6\,\mathrm{m/s}$ sebességgel. Az esőcseppek nyomai a vonatablakon a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró csíkok. Milyen gyorsan megy a vonat?

II/1.28. feladat:
$20\,\mathrm{m}$ magas ház tetejéről $12\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel ferdén felfelé elhajítunk egy testet. A vízszintessel bezárt szög $30°$. Mennyi idő múlva és a háztól mekkora távolságban ér földet, ha a közegellenállástól eltekintünk? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)

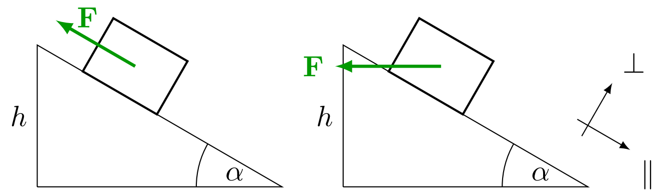
II/1.50. feladat:
A gravitációs gyorsulás értéke a Holdon a földi érték egyhatod része.
A; Hányszor magasabbra,
B; hányszor messzebbre száll az azonos kezdősebességgel ferdén elhajított kő a Holdon, mint a Földön?
C; Mennyi ideig repül a Holdon a földi repülési időhöz képest?

II/2.23. feladat:
Egy $\alpha = 30°$ hajlásszögű lejtőre fel akarunk húzni egy $F_{\text{súly}} = 400N$ súlyú testet. Mekkora erőt kell alkalmazni,

a) ha a lejtővel párhuzamos irányba húzzuk?

b) ha vízszintes irányba húzzuk?

A súrlódás elhanyagolható.



II/?. feladat:
Egy testet $5\,\mathrm{N}$ állandó erővel tudunk egyenletesen felfelé húzni egy $\alpha = 30°$ hajlásszögű lejtőn. Ugyanezen a lejtőn lefelé szabadon csúszva a test $5\,\mathrm{m/s}$ sebességről $5\,\mathrm{m}$ hosszú úton áll meg. Mekkora a test tömege? Mekkora a súrlódási tényező?

II/2.7. feladat:
Mekkora az emelődaru kötelében fellépő húzóerő egy $100\,\mathrm{kg}$ tömegű gépalkatrész süllyesztésekor, illetőleg emelésekor, ha a gyorsulás nagysága minden esetben $2\,\mathrm{m/s^2}$. A kötél és a végén levő horogszerkezet súlya elhanyagolható.

II/2.6. feladat:
Egy test kelet felé mozog és nyugat felé gyorsul. Lehetséges ez? Milyen irányú az erő?

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (vill), 3. feladatsor
Dinamika 2. és Statika

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- impulzus, impulzusmegmaradás
- egyensúly és feltétele
- forgatónyomaték

Példák órai gyakorlásra:

III/2.15. feladat:
$F = 50\,\mathrm{N}$ nagyságú erő hat egy testre $t = 10\,\mathrm{s}$-ig. A test erő irányú sebessége közben $v = 5\,\mathrm{m/s}$-mal növekszik. Mekkora a test tömege? A feladatot az impulzustétel segítségével oldjuk meg.

Az impulzustétel: $\mathbf{F}t = \mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Az erő és sebesség egy egyenesbe esik, így a vektor jelzés elhagyása, és átrendezés után a test tömege:

$$m = \frac{Ft}{v} = \frac{50\,\mathrm{N} \cdot 10\,\mathrm{s}}{5\,\mathrm{m/s}} = 100\,\mathrm{kg}.$$

III/3.9. feladat:
Állóvízben két csónak halad egymás felé. A vízhez viszonyított sebessége mindkét csónaknak ugyanakkora, $|v| = 0{,}6\,\mathrm{m/s}$. Amikor egymás mellé érnek, az egyikről a másikra $m = 60\,\mathrm{kg}$ tömegű testet tesznek át. Ezután a másik csónak az eredeti irányában $|v_2'| = 0{,}4\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad tovább. Mekkora ennek a második csónaknak a tömege? (A víz ellenállását elhanyagoljuk.)

Legyen az első iránya pozitív, a másodiké negatív, és legyen az átadás olyan, hogy közben nem változik meg az az első csomag sebessége (pl. oldalra adja át csomagot). Azaz

$$\begin{aligned} m_1 v - m_2 v &= (m_1 - m)v - (m_2 + m)v_2' \\ -m_2 v &= -mv - m_2 v_2' + m v_2' \\ m(v + v_2') &= m_2(v - v_2') \end{aligned}$$

A kifejezett tömeg:

$$\begin{aligned} m_2 = m\frac{v + v_2'}{v - v_2'} = 60\,\mathrm{kg}\frac{0{,}6\,\mathrm{m/s} + 0{,}4\,\mathrm{m/s}}{0{,}6\,\mathrm{m/s} - 0{,}4\,\mathrm{m/s}} = \\ = 300\,\mathrm{kg}. \end{aligned}$$

III/3.14. feladat:
A $m_1 = 120\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_1| = 40\,\mathrm{cm/s}$ sebességű és a $m_2 = 80\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_2| = 100\,\mathrm{cm/s}$ sebességű két test egymással szembe mozog egy egyenes mentén. Teljesen rugalmatlan ütközés után mekkora és milyen irányú sebességgel mozognak tovább?

Jelöljük ki a pozitív irányt úgy, hogy az első test mozgásával megegyező legyen. Az ütközés előtt az összimpulzus:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

utána:

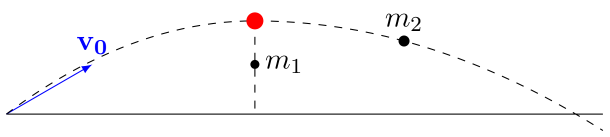
$$p' = (m_1 + m_2)v',$$

és persze tudjuk, hogy a kettőnek meg kell egyeznie. Ezért a sebesség:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{0{,}12\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}4\,\mathrm{m/s} + 0{,}08\,\mathrm{kg} \cdot (-1\,\mathrm{m/s})}{0{,}12\,\mathrm{kg} + 0{,}8\,\mathrm{kg}} = \\ &= -0{,}16\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

A sebesség előjele alapján a második test sebességének irányában mozognak együttesen.

III/3.31. feladat:
A $m = 10\,\mathrm{kg}$ tömegű lövedék a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró irányban $v_0 = 240\,\mathrm{m/s}$ sebességgel hagyja el az ágyú torkolatát. Pályájának legmagasabb pontján a lövedék két részre robban szét. Az egyik, egy $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$-os darab, éppen a robbanás helye alatt, függőlegesen zuhan a földre. A másik, $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$-os darab sebességének iránya robbanás közben nem változik meg. Hol csapódna be ez a másik darab, ha nem lenne légellenállás? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



A kiinduló sebesség komponensei: $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$, $v_{0y} = v_0 \cos\alpha$. A kezdeti y irányú sebességgel a legmagasabb pontig t_1 idő alatt juthatunk el, amely kiszámolható a gyorsulásból:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}.$$

A robbanásra felírhatjuk az impulzusmegmaradást. Előtte volt egy $p_x = mv_{0x}$ impulzusú testünk, míg utána csak a 2-es mozgott vízszintesen, azaz $p'_x = m_1 \cdot 0 + m_2 v'_x$. A megmaradás miatt:

$$mv_{0x} = m_2 v'_x$$
$$v'_x = \frac{mv_{0x}}{m_2} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{m_2}.$$

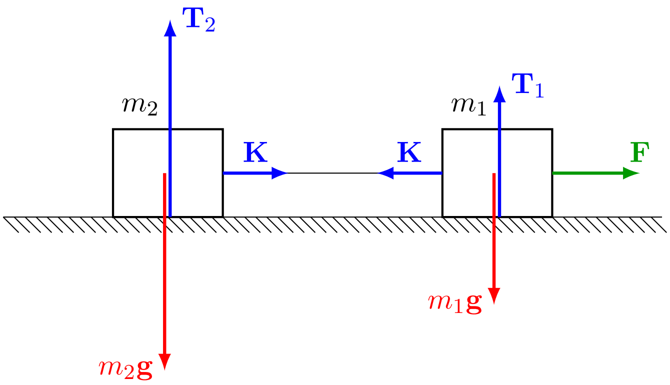
A robbanás után a test 0 y irányú sebességgel indul lefelé, és a leékezéshez szükséges idő ugyanakkora, mint lentről a tetejéig (gyorsulás, távolság, kezdősebesség megegyezik, ezért az idő is!), azaz $t_{\mathrm{le}} = t_1$. A megtett út vízszintesen összefoglalva:

$$s = v'_x t_{\mathrm{le}} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{m_2}\frac{v_0\cos\alpha}{g} = \frac{mv_0^2 \sin 2\alpha}{2m_2 g} =$$
$$= \frac{10\,\mathrm{kg}\cdot(240\,\mathrm{m/s})^2\cdot\sin(2\cdot 30°)}{2\cdot 6\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} =$$
$$= 2400\sqrt{3}\,\mathrm{m/s} = 4156{,}9\,\mathrm{m/s}.$$

III/3.1. feladat:
Ha az erő és az ellenerő egyenlő nagyságú és ellenkező irányú erők, miért nem „semmisítik meg” egymást?

Mert nem ugyanarra hatnak.

III/3.2. feladat:
Vízszintes irányú, $F = 8\,\mathrm{N}$ nagyságú erővel hatunk az $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ tömegű testre, amely egy fonállal az $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ tömegű testhez van kötve az ábrán látható elrendezésben. Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a fonál tömegétől és a súrlódástól eltekintünk?



Itt is először felírjuk az egyes testekre a Newton-törvényt függőleges és vízszintes irányban:

$$\begin{aligned} 1,x: &\quad m_1 a_{1x} = F - K \\ 1,y: &\quad m_1 a_{1y} = T_1 - m_1 g \\ 2,x: &\quad m_2 a_{2x} = K \\ 2,y: &\quad m_2 a_{2y} = T_2 - m_2 g\,. \end{aligned}$$

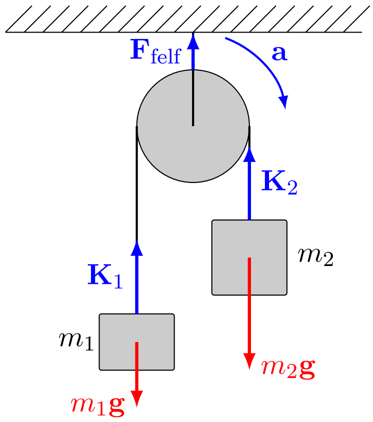
Mivel függőleges elmozdulás nincs, így $a_{1y} = a_{2y} = 0$. A két testet összekötő kötél nyújthatatlan, így a két test gyorsulása minden pillanatban ugyanakkora: $a_{1x} = a_{2x} = a$. Ezt egyszerűen meghatározhatjuk, ha összeadjuk a két x irányú egyenletet:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{8\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg} + 3\,\mathrm{kg}} = 1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Ezt felhasználva a kötelet feszítő erő 2,x egyenlet alapján:

$$K = m_2 a = 3\,\mathrm{kg}\cdot 1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4{,}8\,\mathrm{N}\,.$$

III/3.3. feladat:
Állócsigán átvetett fonál végein m_1 illetve m_2 tömegű test van. Mekkora gyorsulással mozog az egyik, illetve a másik test, és mekkora erő hat a mennyezetre, ahová a csigát felfüggesztették? A fonál és a csiga tömege elhanyagolható, a fonál nem nyúlik meg, a tengely nem súrlódik, a közegellenállás és a levegőben a felhajtó erő elhanyagolható.



Írjuk fel a testekre a kötél mentén, illetve a csigára függőleges irányban a Newton-törvényt:

$$\begin{aligned} 1: &\quad m_1 a = K_1 - m_1 g \\ 2: &\quad m_2 a = m_2 g - K_2 \\ \text{cs}: &\quad 0 = F_{\text{felf}} - K_1 - K_2 \,. \end{aligned}$$

Mivel a kötél és a csiga ideális, ezért a két kötélerő nagysága megegyezik, $K_1 = K_2 = K$. Az első két egyenletből adódik:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \,.$$

Ha az m_2 test a nehezebb, akkor arra fog mozogni a rendszer, ha pedig a másik, akkor visszafelé. A kötélerő:

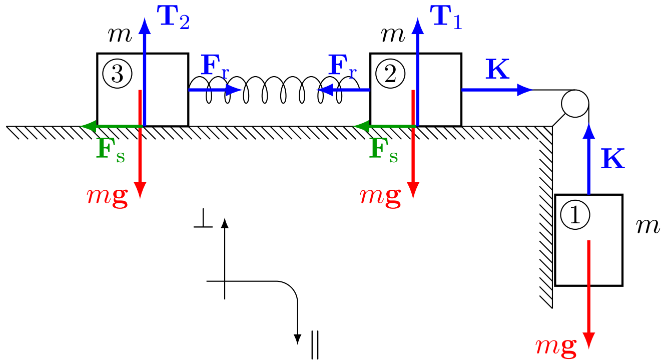
$$K = m_1 \cdot (a + g) = m_1 \cdot \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + 1 \right) g = \frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g \,,$$

vagyis a csiga a felfüggesztést

$$F_{\text{felf}} = 2K = \frac{4 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g$$

erővel húzza.

III/3.12. feladat:
Mennyivel nyúlik meg az ábra szerinti elrendezésben a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? A csiga, a rugó és a fonál tömegét ne vegyük figyelembe. Legyen $m = 1\,\text{kg}$, a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$, a rugóállandó $D = 4\,\text{N/cm}$.



Itt is felírjuk a Newton-törvényeket, figyelembe véve azt, hogy a rendszer csak az asztal felülete mentén mozog.

$$\begin{aligned} 1, \parallel: &\quad ma = mg - K \\ 1, \perp: &\quad 0 = 0 \\ 2, \parallel: &\quad ma = K - F_\text{r} - F_{\text{s},1} \\ 2, \perp: &\quad 0 = T_1 - mg \\ 3, \parallel: &\quad ma = F_\text{r} - F_{\text{s},2} \\ 3, \perp: &\quad 0 = T_2 - mg \,, \end{aligned}$$

ahol $F_{\text{s},1} = \mu T_1$ és $F_{\text{s},2} = \mu T_2$. A merőleges egyenletekből a T tartóerőket meghatározva, majd behelyettesítve a párhuzamos irányokra felírt egyenletekbe:

$$\begin{aligned} 1, \parallel: &\quad ma = mg - K \\ 2, \parallel: &\quad ma = K - F_\text{r} - \mu mg \\ 3, \parallel: &\quad ma = F_\text{r} - \mu mg \,. \end{aligned}$$

A három egyenlet összegéből:

$$a = \frac{1 - 2\mu}{3} g \,,$$

melyet visszahelyettesítve az utolsóba:

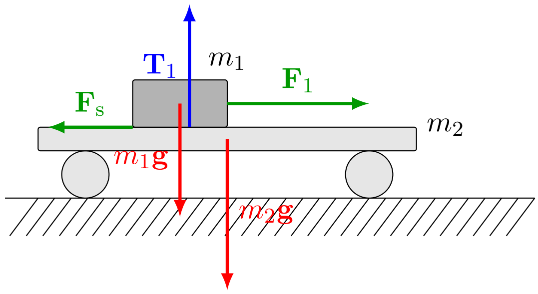
$$m \cdot \frac{1 - 2\mu}{3} g = F_\text{r} - \mu mg$$

$$F_\text{r} = \frac{1 + \mu}{3} \cdot mg \,.$$

Vagyis a rugó megnyúlása:

$$\Delta l = \frac{F_\text{r}}{D} = \frac{1 + \mu}{3} \frac{mg}{D} = \frac{1 + 0{,}2}{3} \frac{1\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 0{,}01\,\text{m} \,.$$

III/3.29. feladat:
A $m_2 = 2\,\text{kg}$ tömegű kiskocsi vízszintes síkon súrlódás nélkül mozoghat. A kocsira $m_1 = 0{,}5\,\text{kg}$ tömegű hasábot helyeztünk, és a hasábot $F_1 = 1\,\text{N}$ vízszintes irányú erővel húzzuk. Mekkora a hasáb, illetve a kocsi gyorsulása, ha közöttük a tapadási súrlódási együttható $\mu_{\text{tap}} = 0{,}25$, csúszó súrlódási együttható pedig $\mu_{\text{cs}} = 0{,}01$? Mekkora a gyorsulás $F_1' = 10\,\text{N}$-os húzóerő esetén? ($g \approx 10\,\text{m/s}^2$)



Számoljuk ki a maximális tapadási erőt. Ebből kiderül, hogy a kocsi és a test összetapadva marad, vagy egymáshoz képest elmozdul. Tehát:

$$F_{\text{tap}} = \mu_{\text{tap}} T_1 = \mu_{\text{tap}} m_1 g = 0{,}25 \cdot 0{,}5\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 = \\ = 1{,}25\,\text{N},$$

azaz az első esetben $F_1 < F_{\text{tap}}$, így egyben maradnak.

A talajon nincsen súrlódás, így csak az F_1 gyorsító erő számít: $F_1 = (m_1 + m_2)a$, amelyből:

$$a = \frac{F_1}{m_1 + m_2} = \frac{1\,\text{N}}{0{,}5\,\text{kg} + 2\,\text{kg}} = 0{,}4\,\text{m/s}^2.$$

A második esetben $F_1' > F_{\text{tap}}$, azaz külön mozognak. A test mozgásegyenlete: $F_1' - F_s = m_1 a_1'$, azaz:

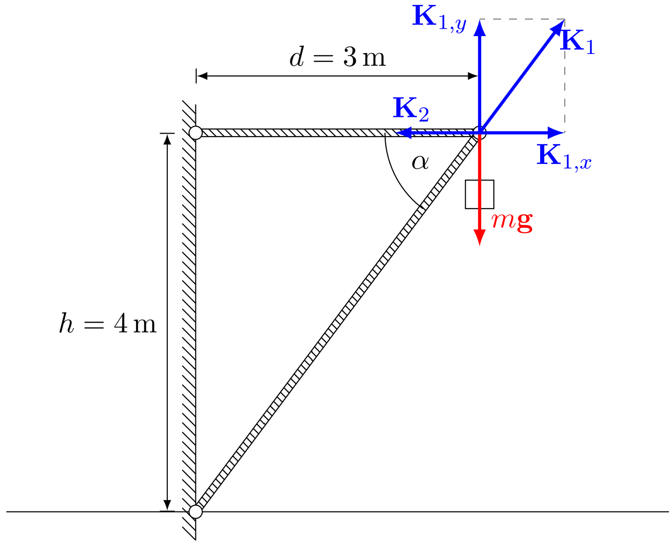
$$a_1' = \frac{F_1' - F_s}{m_1} = \frac{F_1' - \mu_{\text{cs}} m_1 g}{m_1} = \\ = \frac{10\,\text{N} - 0{,}01 \cdot 0{,}5\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2}{0{,}5\,\text{kg}} = \\ = 19{,}9\,\text{m/s}^2.$$

A kocsira $-F_s = m_2 a_2'$, amelyből:

$$a_2' = \frac{-F_s}{m_2} = \frac{-\mu_{\text{cs}} m_1 g}{m_2} = \\ = \frac{-0{,}01 \cdot 0{,}5\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2}{2\,\text{kg}} = \\ = -0{,}025\,\text{m/s}^2,$$

A kocsi lassan elindul hátrafelé.

III/5.9. feladat:
Az ábrán látható tartón $G = 800\,\text{N}$ súlyú teher függ. Mekkora erők hatnak a rudakban?



A rudak csuklókkal vannak a falhoz és egymáshoz erősítve. Azok mentén tetszőleges irányú és nagyságú erők hathatnak. A stabilitás miatt azonban a rudakban itt csak azok tengelyével párhuzamos erők hathatnak. Tegyük ugyanis fel, hogy a felső rúd nem vízszintes erővel hat a test felfüggesztési pontjára. Ha így lenne, akkor a felfüggesztési pont a rúdra szintén nem vízszintes irányban hatna az ellenerejével. Ez az erő pedig azt okozná, hogy a fenti rúd elfordulna a falba rögzített csukló körül, vagyis nem lenne nyugalomban a rendszer. Hasonló gondolatmenettel be lehet látni, hogy az alsó rúd is csak a tengelye mentén fejthet ki erőt.

A felfüggesztési pontra felírva Newton II. törvényét:

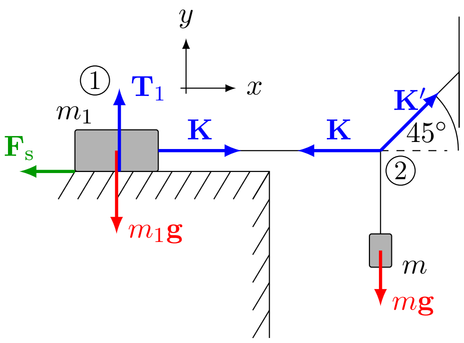
$$\begin{aligned} x: \quad & 0 = K_1 \cos\alpha - K_2 \\ y: \quad & 0 = K_1 \sin\alpha - G\,, \end{aligned}$$

ahonnan

$$K_1 = \frac{G}{\sin\alpha} = \frac{800\,\text{N}}{\frac{4\,\text{m}}{5\,\text{m}}} = 1000\,\text{N}$$

$$K_2 = K_1 \cdot \cos\alpha = 1000\,\text{N} \cdot \frac{3\,\text{m}}{5\,\text{m}} = 600\,\text{N}\,.$$

III/5.26. feladat:
Az m tömegű testet két fonál segítségével, az ábrán látható módon függesztünk fel. Az asztallapon fekvő test tömege $m_1 = 72\,\text{kg}$, az asztal és közötte a súrlódási együttható $\mu = 0{,}25$. Mekkora m tömeg esetén van egyensúly?



Az egyensúly feltétele a testre (1):

$$x: \quad K - F_s = 0,$$
$$y: \quad T_1 - m_1 g = 0,$$

illetve tudjuk, hogy $F_s = \mu T_1$. A rögzítési pontra (2):

$$x: \quad K'_x - K = K' \cos\alpha - K = 0,$$
$$y: \quad K'_y - mg = K' \sin\alpha - mg = 0.$$

Az elsőből kifejezhető $K = F_s = \mu m_1 g$, amely beírható a második párba. Így $K' \cos\alpha - \mu m_1 g = 0$, azaz

$$K' = \frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha},$$

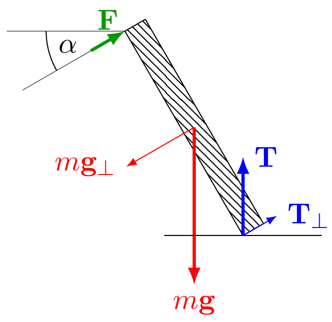
és az y-ra vonatkozó egyenlet:

$$\frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha} \sin\alpha - mg = 0.$$

Ebből a keresett tömeg:

$$m = \mu m_1 \mathrm{tg}\alpha = 0{,}25 \cdot 72\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{tg}45° = 18\,\mathrm{kg}.$$

III/5.20. feladat:
Egy munkás $mg = 400\,\mathrm{N}$ súlyú, homogén tömegeloszlású deszkát egyik végénél fogva a vízszinteshez képest $\alpha = 30°$-os szögben tart. A deszka másik vége a földön fekszik. Mekkora erő szükséges ehhez, ha az általa kifejtett erő iránya merőleges a deszka egyenesére?



A forgás tengelye az a pont, ahol a földre ér a deszka csúcsa. Ha a deszka l hosszú, akkor a súlya $l/2$-nél hat, az emberi erő pedig l-nél. A forgatást jelentő merőleges komponens nagysága $mg_\perp = mg \sin\alpha$. Ez alapján a forgatónyomatékunk a deszkára:

$$\sum M = T_\perp \cdot 0 - mg_\perp \cdot \frac{l}{2} + F \cdot l,$$

ahol figyelembe vettük, ahogy az ellenkező irányú erők ellentétes forgatónyomatékot jelentenek. Az egyensúly feltétele, hogy $\sum M = 0$, azaz:

$$0 = T_\perp \cdot 0 - mg_\perp \cdot \frac{l}{2} + F \cdot l$$
$$0 = -mg_\perp \frac{1}{2} + F$$
$$F = \frac{mg_\perp}{2} = \frac{mg \sin\alpha}{2} = \frac{400 \sin 30°}{2} = 100\,\mathrm{N????}$$

DRS–>173 N??

Otthoni gyakorlásra:
3.10, 3.16, 3.5, 3.11, 3.13, 5.17, 5.36

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (vill), 4. feladatsor
Munka, energia, teljesítmény

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- munka $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs\cos\alpha$ skalárszorzat (számít az irány!). $[W] = 1\,\mathrm{J}$
- szakaszokra bontás, határesetben integrálás ($W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{s}$), azaz a görbe alatti terület!
- nehézségi erőtér → helyzeti energia: $E_\mathrm{h} = mgh$, ami negatív is lehet (pl. talajszint alatt)
- kinetikus/mozgási energia: $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$
- rugó: $E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}Dx^2$ (x a megnyúlás, D a rugóállandó)
- munkatétel $\Delta E_\mathrm{k} = W$
- teljesítmény ($P = \frac{W}{t}$), hatásfok ($\eta = \frac{\text{hasznos}}{\text{összes}}$), $1\,\mathrm{kWh} = 3600\,\mathrm{kJ}$

Órai feladatok:

IV/4.7. feladat:
$\alpha = 30°$-os lejtőn valaki egy $m = 20$ kilogrammos bőröndöt tol fel vízszintes irányú erővel $h = 2$ méter magasra. A mozgási súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$. A bőrönd mozgása egyenletes. Mennyi munkát végez:

a) az ember,

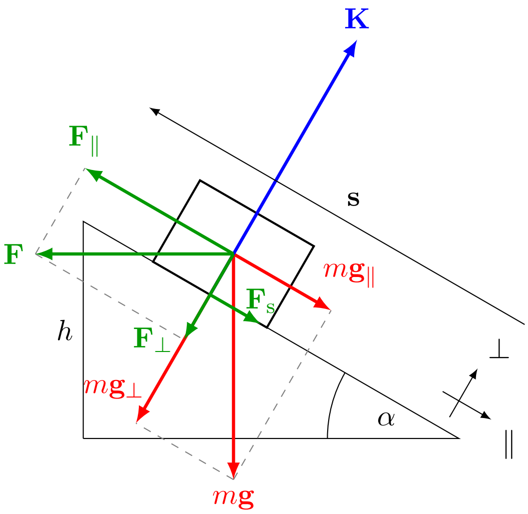
b) a súrlódási erő,

c) a bőröndre ható nehézségi erő,

d) a lejtő nyomóereje,

e) a bőröndre ható erők eredője?

($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



Mivel állandó erők hatnak, így a munkát ki lehet számítani az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként. A feladat megoldásához először határozzuk meg, hogy mekkora F erőre van szükség. A Newton-egyenleteket felírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \perp: \quad & 0 = K - mg\cos\alpha - F \cdot \sin\alpha \\ \parallel: \quad & 0 = F \cdot \cos\alpha - mg\sin\alpha - F_\mathrm{s}\ , \end{aligned}$$

ahol $F_s = \mu \cdot K$, és K az első egyenletből kifejezhető:

$$K = mg\cos\alpha + F\sin\alpha\ ,$$

melyet a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} 0 &= F \cdot \cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu \cdot \big(mg\cos\alpha + F\sin\alpha\big) \\ F &= \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot mg\ . \end{aligned}$$

Szükségünk lesz még a többi erő nagyságára is:

$$\begin{aligned} K &= mg\cos\alpha + F\sin\alpha \\ &= mg\cos\alpha + \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot mg\sin\alpha \\ &= \frac{\cos^2\alpha - \mu\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha + \mu\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot mg \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot mg\,,$$

$$F_s = \mu K = \frac{1}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot \mu mg\,.$$

a) Az ember által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_{\text{ember}} &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos\alpha \\ &= \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot mg \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha \\ &= \frac{\sin 30^\circ + 0{,}2\cdot\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0{,}2\cdot\sin 30^\circ} \cdot \\ &\qquad \cdot 20\,\text{kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{2\,\text{m}}{\sin 30^\circ} \cdot \cos 30^\circ \\ &= 608{,}87\,\text{J}\,. \end{aligned}$$

b) A súrlódási erő által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_s &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = -F_s \cdot s \\ &= -\frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \\ &= -\frac{0{,}2\cdot 20\,\text{kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 30^\circ - 0{,}2\cdot\sin 30^\circ} \cdot \frac{2\,\text{m}}{\sin 30^\circ} \\ &= -208{,}87\,\text{J}\,. \end{aligned}$$

c) A nehézségi erő munkája

$$\begin{aligned} W_{mg} &= m\mathbf{g}\cdot\mathbf{s} = -mg_{\parallel}\cdot s = -mg\sin\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha} \\ &= -20\,\text{kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 2\,\text{m} = -400\,\text{J}\,. \end{aligned}$$

d) A lejtő nyomóereje nem végez munkát, hiszen az merőleges az $\mathbf{s}$ elmozdulásra.

e) A bőröndre ható erők eredője nulla, hiszen a bőrönd összgyorsulása nulla. Ennek munkája természetesen nulla.

Vegyük észre, hogy ezt a korábbi eredményekből is megkapjuk, hiszen ha összeadjuk az összes erő munkáját, akkor is nullát kapunk.

IV/4.11. feladat:
Rugós erőmérőt $\Delta l = 10\,\text{cm}$-rel kihúztunk. Mekkora munkát végeztünk a megnyújtáskor, ha a mutató $F = 50\,\text{N}$ nagyságú erőt jelez?

Először számoljuk ki a rugó állandóját:

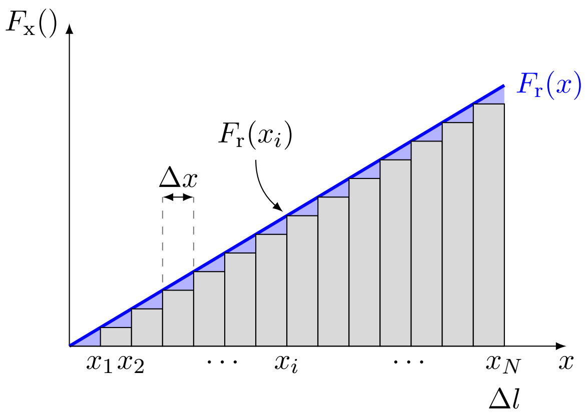
$$D = \frac{F}{\Delta l} = \frac{50\,\text{N}}{0{,}1\,\text{m}} = 500\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,.$$

Ennek a munkának a kiszámolásánál az a probléma, hogy az általunk kifejtett erő nem állandó, hiszen tudjuk, hogy a rugóerő $F_r(x) = D\cdot x$, ahol x a megnyúlás, és a mi erőnk ennek az ellenereje.

A munka kiszámolásához először tekintsünk azt a pillanatot, mikor éppen x_i-vel van megnyújtva a rugó. Próbáljuk ekkor a rugót még egy nagyon pici Δx hosszal még jobban megnyújtani. Ez olyan kis távolság, hogy ez alatt az erő gyakorlatilag nem változik, végig $F_r(x) = D\cdot x_i$. Ekkor a munkánk erre a kis Δx szakaszra:

$$\Delta W(x_i) = F_r(x)\cdot\Delta x = D\cdot x_i\cdot\Delta x\,.$$

A teljes megnyújtásra számolt munkát úgy kapjuk, hogy a Δl távolságot felosztjuk sok ilyen pici Δx szakaszra, kiszámoljuk a munkát az egyes szakaszokra, majd összeadjuk őket. Vegyük észre, hogy az így számított összeg, éppen az $F_r(x)$ függvény alatti terület téglalapösszege.



Ha egyre finomítjuk a felosztást, akkor az $F_r(x)$ függvény alatti területet kapjuk a $x \in [0,\Delta l]$ tartományon. A téglalapösszeg pedig egy integrálásba megy át:

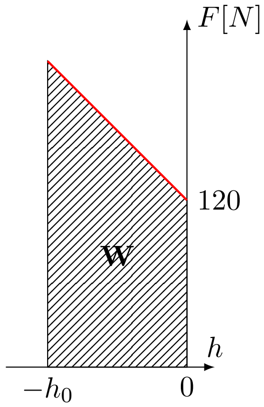
$$\begin{aligned} W &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta W(x_i) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} D\cdot x_i\cdot\Delta x \\ &= \int_0^{\Delta l}\mathrm{d}W(x) = \int_0^{\Delta l} D\cdot x\cdot\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}Dx^2\right]_0^{\Delta l} \\ &= \left(\frac{1}{2}D\cdot(\Delta l)^2\right) - \left(\frac{1}{2}D\cdot 0^2\right) = \frac{1}{2}D\cdot(\Delta l)^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 500\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0{,}1\,\text{m})^2 = 2{,}5\,\text{J}\,. \end{aligned}$$

IV/4.29. feladat:
$h_0 = 10$ méter mély kútból, méterenként $F_{\text{lánc}} = 10\,\text{N}$ súlyú lánccal vizet húzunk fel. A vödör súlya vízzel együtt $F_{\text{vödör}} = 120\,\text{N}$. Mekkora munka árán tudunk egy vödör vizet felhúzni?

Miközben húzzuk fel a vödröt a lánc kikerül a kútból és egyre kisebb lesz a súly, amit húzunk. Formalizálva a húzóerő a mélység függvényében:

$$F_\mathrm{h}(h) = F_\text{vödör} + hF_\text{lánc},$$

amelyet összegeznünk kell $h = 0$-tól h_0-ig. Az erő-magasság grafikon:



A területet feloszthatjuk egy négyzetre (a vödör felhúzásának munkája), és egy kis háromszögre (lánc húzása). A két munka külön a terület alapján:

$$W_1 = F_\text{vödör} \cdot h_0 = 1200\,\mathrm{J},$$
$$W_2 = \frac{(h_0 F_\text{lánc}) \cdot h_0}{2} = 500\,\mathrm{J}.$$

Összesen tehát $W = W_1 + W_2 = 1700\,\mathrm{J}$.

Megtehetjük azt is, hogy kihasználjuk, hogy az integrálszámítás értemében a munka:

$$W = \int_0^{h_0} F(h)\mathrm{d}h = \int_0^{h_0} (F_\text{vödör} + hF_\text{lánc})\,\mathrm{d}h =$$
$$= \left[F_\text{vödör} h + \frac{h^2}{2} F_\text{lánc}\right]_0^{h_0} = \dots = 1700\,\mathrm{J}.$$

IV/4.32. feladat:
Oldjuk meg a munkatétellel a következő feladatot: $v_0 = 500\,\mathrm{m/s}$ sebességű puskagolyó $s_\text{max} = 5\,\mathrm{cm}$ mélyen hatol be a fába. Mekkora volt a sebessége $s = 2\,\mathrm{cm}$ mélységben? Tételezzük fel, hogy a fa fékező ereje állandó.

A munkatétel szerint $\Delta E_\text{kin} = W$, kifejtve $W = F_\text{fék} \cdot s_\text{max}$, míg $\Delta E_\text{kin} = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$. Így a fékezőerő:

$$F_\text{fék} = -\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{s_\text{max}}.$$

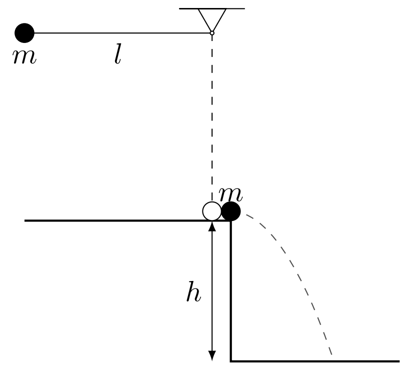
Ha csak 2 cm-t haladunk, akkor a mozgási energia megváltozása $\Delta E_\text{kin} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$, míg a munka $W = F_\text{fék} \cdot s$, azaz a munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_\text{fék} \cdot s = -\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{s_\text{max}} \cdot s$$

Amelyből fejezzük ki a sebességet:

$$v = \sqrt{\left(1 - \frac{s}{s_\text{max}}\right) v_0^2} = 387{,}3\,\mathrm{m/s}.$$

IV/4.39. feladat:
Az ábrán látható ingát 90°-kal kitérítjük és elengedjük. Az asztal szélén levő, vele egyenlő tömegű golyóval teljesen rugalmasan ütközik. Határozzuk meg, hogy az asztaltól milyen távol ér a padlóra a lelökött golyó!



A mozgás több részre bontható. Először az inga lelendül (1–2), majd megtörténik az ütközés (2–3), végül pedig a második test leesik (3–4). Ezeket a speciális állapotokat mind összeköti a munkatétel, melyet használhatunk.

1–2: Az ingatest lelendül. Válasszuk a helyzeti energia nullszintjét az asztal szintjének. Ekkor a testnek az (1) pontban van helyzeti energiája, ám nincs mozgási energiája, ezzel szemben a (2) helyzetben helyzeti energiája nincs, cserébe viszont mozgási energiája lett, hiszen v_2 sebességgel mozog. A testre a kötélerő hat, ami sosem végez munkát, illetve hat rá a nehézségi erő, annak a munkáját viszont helyzeti energiában vettük figyelembe.

Ez alapján a munkatörvény:

$$W = \Delta\big(E_\text{kin} + E_\text{pot}\big)$$
$$0 = \left(\frac{1}{2}mv_2^2\right) - (mgl)$$
$$v_2 = \sqrt{2gl}\ .$$

2–3: Itt történik meg az ütközés. Mivel az ütközés teljesen rugalmas, így az ütközés során az energia megmarad. Szintén mivel a külső erők munkája nulla, így az impulzusmegmaradást is lehet használni. A két törvény:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}mu_3^2$$

$$mv_2 + 0 = mv_3 + mu_3 \ ,$$

ahol az u-val jelölt tagok a kezdetben álló golyó jellemzői.

A két egyenlet egyszerűsítve:

$$v_2^2 = v_3^2 + u_3^2$$
$$v_2 = v_3 + u_3 \ ,$$

majd a második egyenlet négyzetre emelve:

$$v_2^2 = v_3^2 + u_3^2 + 2v_3v_3' \ ,$$

és ebből az első egyenletet kivonva:

$$0 = 2v_3u_3 \ ,$$

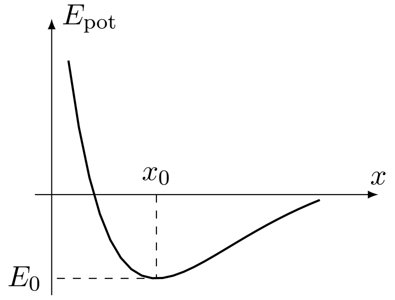
tehát vagy az első vagy a második test állni fog az ütközés után. Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletre pillantva láthatjuk, hogy ha az egyik sebesség nulla, akkor a teljes kezdeti sebességet a másik test kapja meg. Innen adódik, hogy a kezdetben mozgó golyónak kell megállnia, és a másiknak ugyanakkora sebességgel továbbhaladnia, hiszen a fordított eset nem lehetséges. Tehát $v_3 = 0$, $u_3 = v_2 = \sqrt{2gl}$.

3–4: A mozgás utolsó szakaszában egy vízszintes hajítás történik. A leesés ideje $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, mely alatt a test

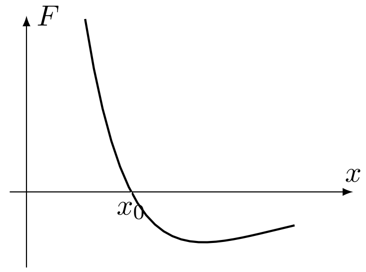
$$s = T \cdot u_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \sqrt{2gl} = 2\sqrt{lh}$$

utat tesz meg.

IV/8.46. feladat:
Egy részecske csupán az x tengely mentén mozoghat. Az ábrán a részecske potenciális energiájának a helytől való függése látható.
A; Ábrázoljuk grafikonon (hozzávetőlegesen) a részecskére ható erőt, mint a hely függvényét.
B; Feltéve, hogy a részecske valamilyen rezgő mozgást végez, legfeljebb mennyi lehet mozgási energiája?



Vannak olyan esetek, amikor a erő felírható a potenciális erő segítségével. Ilyen a kapcsolat az, hogy erő nem más, mint görbe meredekségének ellentettje. Nézzük az ábrát. Kezdetben az energia csökken, tehát a meredeksége negatív, vagyis az erő x_0-ig pozitív lesz. Ott az minimum van, a meredekség és az erő is 0. Ezt követően a függvény növekszik, tehát az erőnek negatívnak kell lennie. A kapott ábra:



A rezgő mozgás azt jelenti, hogy rögzített energia mellett különböző helyeken (x) is felvehet ugyanakkora potenciális energiát. Ez az x tengely alatti szakaszra érvényes. A minimális potenciális energia E_0, ha ennél egy kicsit több van akkor abban a magasságban elmetszve a függvényt megkapjuk a rezgés két végpontját. A végpontban a sebesség 0 (lásd egy rugó), így a kinetikus energia is. Azonban amikor a köztes szakaszra érünk a potenciális energia lecsökken, és a különbségből lesz a kinetikus energiája.

IV/4.24. feladat:
$mg = 100\,\mathrm{N}$ súlyú testet $F = 120\,\mathrm{N}$ nagyságú erővel emelünk. Mekkora a teljesítmény az indulás után $T = 2$ másodperccel? Mekkora az átlagteljesítmény az első 2 másodperc alatt?

A pillanatnyi teljesítmény $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. A testre ható erők eredője $F_\mathrm{e} = 120\,\mathrm{N} - 100\,\mathrm{N} = 20\,\mathrm{N}$, vagyis a test gyorsulása $a = \frac{20\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Kezdetben a test állt, T idő elteltével a test sebessége: $v(T) = a \cdot T = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\,\mathrm{s} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Mivel ez a sebesség felfelé mutat, így egy irányba esik az emelőerővel. A teljesítményünk tehát:

$$P(2\,\mathrm{s}) = 120\,\mathrm{N} \cdot 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 480\,\mathrm{W} \ .$$

Az átlagteljesítmény kiszámításához tudnunk kell, hogy hogyan változik a pillanatnyi teljesítmény az időben. Az időfüggés a sebességen keresztül történik:

$$P(t) = F \cdot v(t) = F \cdot a \cdot t \ .$$

Mivel a teljesítmény az idővel lineáris kapcsolatban áll, így az átlagteljesítmény számolható, mint a kezdeti és a végállapotban lévő pillanatnyi teljesítmény számtani közepe:

$$P_{\text{átl}} = \frac{P(2\,\text{s}) + P(0)}{2} = \frac{480\,\text{W} + 0}{2} = 240\,\text{W}\ .$$

Otthoni gyakorlásra:

IV/4.16. feladat:
Mekkora átlagos teljesítménnyel lehet egy 1000 kg tömegű személyautót 10 másodperc alatt, álló helyzetből 100 km/h sebességre gyorsítani?

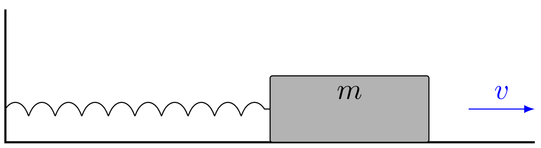
IV/4.30. feladat:
$v_0 = 5\,\text{m/s}$ kezdősebességgel függőlegesen lefelé hajítunk egy követ. Mennyi idő alatt négyszereződik meg a mozgási energiája?

IV/4.31. feladat:
Egy ládát állandó sebességgel húzunk vízszintes talajon. Mozgás közben $F_\text{s} = 250\,\text{N}$ a fellépő súrlódási erő. Milyen messzire húzhatjuk el a ládát $W_\text{mi} = 0{,}001\,\text{kWh}$ munka árán?

IV/4.23. feladat:
Egy ejtőernyős kiugrik egy 2000 m magasságban szálló repülőgépből. (A gép vízszintesen repül, sebessége 100 m/s.) Az ejtőernyős sebessége földet éréskor 5 m/s. Tömege az ernyővel együtt 100 kg. Mennyi munkát végzett a közegellenállás?

IV/4.9. feladat:
Mekkora munkavégzéssel jár egy $m = 4\,\text{kg}$ tömegű test felgyorsítása vízszintes talajon $v_\text{v} = 3\,\text{m/s}$ sebességre $s = 2$ méter úton, ha a talaj és a test közötti súrlódás együtthatója $\mu = 0{,}3$? ($g \approx 10\,\text{m/s}^2$)

IV/D6. feladat:
Az ábrán látható $m = 0{,}01\,\text{kg}$ tömegű testtel $\Delta l = 7{,}5\,\text{cm}$-rel összenyomtuk a $D = 4\,\text{N/m}$ rugóállandójú rugót, majd a testet elengedtük. A test és a vízszintes felület közti mozgási súrlódási együttható értéke $\mu = 0{,}25$. Mekkora utat tesz meg a test a megállásig?



A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (vill), 5. feladatsor
Körmozgás

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- egyenletes körmozgás
- periódusidő, frekvencia, szögsebesség, kerületi sebesség, centripetális gyorsulás és erő
- radiális és tangenciális irány
- kapcsolat az egyenes és körpályán történő mozgás között

Órai feladatok:

V/6.2. feladat:
Forgó kerék két ugyanazon sugáron levő pontjának sebessége $v_1 = 13\,\mathrm{m/s}$, illetve $v_2 = 7\,\mathrm{m/s}$. Mekkora a kerék szögsebessége, ha a két pont egymástól való távolsága $\Delta r = 30\,\mathrm{cm}$?

A kerületi sebességük különböző de szögsebességük azonos, azaz:

$$v_1 = r_1 \cdot \omega = (r_2 + \Delta r) \cdot \omega$$
$$v_2 = r_2 \cdot \omega$$

összevonva $v_1 = v_2 + \Delta r \cdot \omega$, amelyből a szögsebesség:

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{\Delta r} = \frac{13\,\mathrm{m/s} - 7\,\mathrm{m/s}}{0{,}3\,\mathrm{m}} = 20\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

V/6.5. feladat:
Mekkora a TU-144 utasszállító repülőgép centripetális gyorsulása, ha $v = 2400\,\mathrm{km/h}$ sebességgel $r = 80\,\mathrm{km}$ sugarú körívben halad fordulás közben? Ily módon mennyi időbe telik, amíg északi irányból kelet felé fordul? Mennyi utat tesz meg e fordulás közben?

A centripetális gyorsulás:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(2400\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}/3{,}6\,\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}\right)^2}{80000\,\mathrm{m}} = 5{,}\dot{5}\,\mathrm{m/s^2}.$$

A negyedkör alatt megtett út:

$$s = \frac{2r\pi}{4} = \frac{2 \cdot 80\,\mathrm{km} \cdot \pi}{4} = 125{,}6\,\mathrm{km},$$

az ehhez szükséges idő:

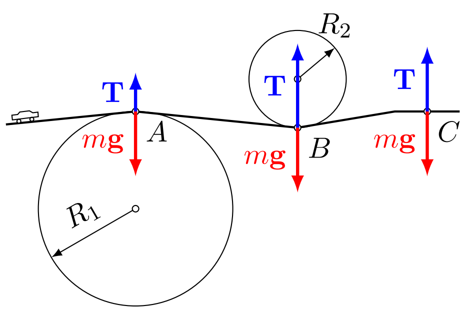
$$t = \frac{s}{v} = \frac{125{,}6\,\mathrm{km}}{2400\,\mathrm{km/h}} = 188{,}5\,\mathrm{s}.$$

V/6.7. feladat:
$m = 1000\,\mathrm{kg}$ tömegű gépkocsi dombvidéken halad, egyenletes $v_0 = 72\,\mathrm{km/h}$ sebességgel. Az A és B pontokban az út $R_1 = 100\,\mathrm{m}$ illetve $R_2 = 50\,\mathrm{m}$ sugarú körív, a C pontban vízszintes.

a) Határozzuk meg e három pontban az út által a gépkocsira kifejtett nyomóerő irányát és nagyságát.

b) Mennyi lehet a gépkocsi maximális sebessége az A pontban?

($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



a) A C pontban az autó egyenesen halad, függőlegesen nem végez mozgást, így az ilyen irányú gyorsulása nulla. A II. Newton-törvény alapján $T_C = mg = 10^4\,\mathrm{N}$.

A gépkocsi az A és a B pontban körpályán halad, miközben az aktuális kerületi sebessége v_0. A körpályán való haladás feltétele, hogy a kocsira ható erők eredője biztosítsa az autónak a centripetális gyorsulást. Az A pontban

$$F_{cp} = mg - T_A = m\frac{v_0^2}{R_1}$$
$$T_A = mg - m\frac{v_0^2}{R_1}$$
$$= 1000\,\mathrm{kg} \cdot \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - \frac{\left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{100\,\mathrm{m}}\right)$$
$$= 600\,\mathrm{N}.$$

ahol T_A az út és az autó között fellépő nyomóerő.

A B pontban a centripetális gyorsulás ellentétes irányba kell, hogy mutasson, így

$$F_{cp} = T_B - mg = m\frac{v_0^2}{R_2}$$
$$T_B = mg + m\frac{v_0^2}{R_2}$$
$$= 1000\,\mathrm{kg} \cdot \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \frac{\left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{50\,\mathrm{m}}\right)$$
$$= 18000\,\mathrm{N}.$$

b) Vegyük észre, hogy ha a T_A kifejezésében, a v_0 sebesség túl nagy, akkor a T_A akár negatív is lehetne. Ez azonban nem valós megoldás, hiszen a tartóerő csak nyomni tud, húzni nem. Ha ez az eset állna fenn, akkor az azt jelentené, hogy az A pontban az autó már nem ér hozzá az aszfalthoz, mivel az már korábban elemelkedett attól.

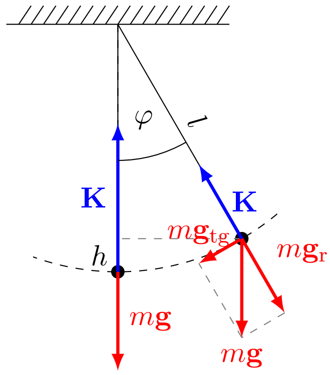
A határeset akkor következik be, amikor a tartóerő éppen nulla. Ekkor a nehézségi erő még éppen tudja biztosítani a körpályán való maradáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$mg = m\frac{v_{max}^2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{R_1 g} = 31{,}62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

V/6.10. feladat:
Az l hosszúságú fonálra függesztett m tömegű golyó ingaként leng. A legnagyobb kitérés $\varphi_{max} = 30°$. Mekkora erő hat a fonálban, amikor

a) az inga szélső helyzetben van;

b) a függőleges helyzeten halad át? Mennyi a gyorsulása az előbbi helyzetekben?



Az ingatest körmozgást végez, vagyis a rá ható erők eredőjének sugárirányú komponense az, ami a test centripetális gyorsulását adja:

$$ma_{cp} = m\frac{v^2}{l} = K - mg\cos\varphi\ .$$

a) A legszélső helyzetben a test sebessége nulla, vagyis az előző egyenlet alapján:

$$K = mg\cos 30°\ .$$

b) A pálya aló pontjában viszont

$$K = mg + m\frac{v^2}{l}\ .$$

A munkatételt felhasználva ezt a sebességet is ki tudjuk számítani. A testre csak a kötélerő és a nehézségi erő hat, melyek közül a kötélerő sosem végez munkát, hiszen az mindig merőleges a mozgás irányára. A nehézségi erő munkáját pedig a helyzeti energiával fogjuk figyelembe venni. Legyen az egyik állapot az inga maximális kitérése, a másik pedig az alsó helyzeten való áthaladás. Erre a két pontra felírva a munkatételt:

$$0 = W = \Delta E = E_2 - E_1$$
$$E_1 = E_2$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgl(1-\cos\varphi)$$
$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)}\ ,$$

ahonnan

$$K = mg\left[3 - 2\cos\varphi\right]\ .$$

V/6.12. feladat:
a) Milyen erő hat a Föld körül keringő űrhajóban „lebegő” űrhajósra?
b) Milyen erő hat a Föld felé szabadon eső testre?
c) Milyen erő hat a Föld felé zuhanó repülőgépben „lebegő” pilótára?

a, A Föld nehézségi vonzása
b, ugyanaz
c, ugyancsak a nehézségi vonzás.

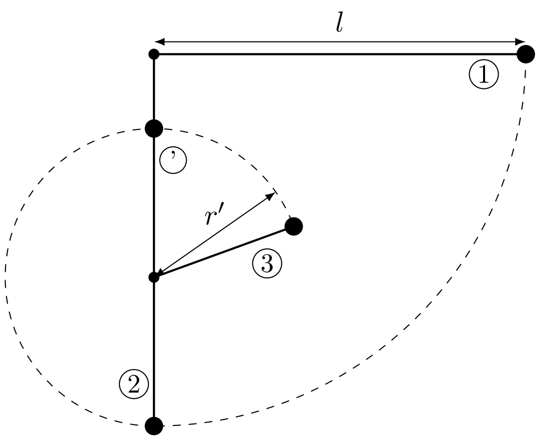
V/6.15. feladat:
Egy gépkocsi $v = 108\,\mathrm{km/h}$ sebességgel halad. Kerekeinek átmérője $d = 75\,\mathrm{cm}$. Mekkora a kerekek szögsebessége?

Az autó éppen akkora sebességgel halad, mint amekkora a kerekei egy pontjának kerületi sebessége.

Ez a legegyszerűbben onnan látható be, hogy tudjuk, hogy a kerék az aszfalton tapad, vagyis a kerék legalsó pontja a kocsi mozgása során mindig áll. Mivel az autó minden pontja előre felé halad v sebességgel, ezért a kerék külső pontjainak kerületi sebessége olyan kell hogy legyen, hogy a legalsó pont mindig álljon, vagyis a kerületi sebességnek is v-nek kell lennie. Így a szögsebesség:

$$\omega = \frac{v}{d/2} = \frac{108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{37{,}5\,\mathrm{cm}} = 80\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

V/6.30. feladat:
Egy fonálingát nyugalmi helyzetéhez képest 90°-kal kitérítünk, majd elengedünk. Amikor az inga átlendül a függőleges helyzeten, a fonál egy szögbe ütközik. A fonal hosszának hányadrészénél lehet a szög, ha azt akarjuk, hogy a fonál végére kötött test további pályája *teljes egészében* kör legyen?



A teljes kör megtételének feltétele, hogy elérjük a kis kör legfelső pontját és az inga átlendüljön rajta. Használjuk a munkatételt. A nehézségi erő munkája:

$$W = mg(l - 2r'),$$

míg a mozgási energia megváltozása:

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m\underbrace{v_1^2}_{0}\,.$$

Másrészt a körmozgás feltételéből a centripetális és nehézségi erő megegyezik ebben a pontban:

$$m\frac{v'^2}{r'} = mg,$$

amelyből $v' = \sqrt{gr'}$. Ezt behelyettesítve a munkatételbe:

$$mg(l - 2r') = \frac{1}{2}mgr'$$
$$r' = 0{,}4l.$$

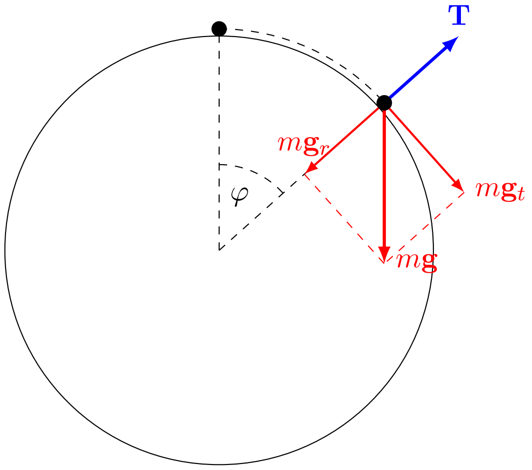
V/6.39. feladat:
Egy űrállomás $l = 30\,\mathrm{m}$ hosszú rúddal összekötött két kisebb űrkabinból áll. Milyen szögsebességgel kell az űrállomásnak a rúd középpontján átmenő képzelt tengely körül forognia, ha azt akarjuk, hogy az űrkabin lakói a Föld felszínén megszokott „súlyú" állapotban érezzék magukat? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)

Miközben az űrállomás forog, a kabinok, és így a bennük lévő testek körmozgást végeznek. A körmozgás során a testek gyorsulnak, ezt a gyorsulást pedig az alátámasztást adó tartóerők biztosítják a testeknek. Az űrkabinban lévő űrhajós azt érzékei, hogy a környezetéhez képest nyugalomban van, illetve az alátámasztás őt nyomja. Az ő szemszögéből ez csak úgy magyarázható, ha őrá hat egy „fiktív" tehetetlenségi erő (a centripetális erő), melyet ő érez, és ez az, ami őt az alátámasztáshoz nyomja. Ezt a centripetális erőt érezzük úgy, mintha az egy mesterséges nehézségi erő lenne.

Ez az erő egyenlő nagyságú az alátámasztás erejével, vagyis a centripetális erő nagyságával:

$$G_{\text{mesterséges}} = mg = m\frac{v^2}{l/2} = m\omega^2\frac{l}{2}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{30\,\mathrm{m}}} = 0{,}81\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

V/6.33. feladat:
Egy $r = 0{,}6$ méter sugarú gömb tetején egy kis golyót elengedünk. A gömb tetejétől számítva milyen magasságban hagyja el a golyó a gömböt? (A súrlódástól eltekintünk.)



A gömböt akkor hagyja el a golyó, amikor a felület tartóereje megszűnik. Írjuk fel az egyenleteket a radiális és tangenciális komponensekre:

$$\begin{aligned} r: \quad & m\frac{v^2}{r} = mg\cos\varphi - T \\ t: \quad & ma = mg\sin\varphi. \end{aligned}$$

A tetejéről való indulással felírhatjuk a munkatételt is:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg(r - r\cos\varphi)$$

azaz $v^2 = 2gr(1 - \cos\varphi)$, amit behelyettesíthetünk a sugárirányú egyenletbe:

$$m2g(1 - \cos\varphi) = mg\cos\varphi - T$$

és kifejezhetjük a felület tartóerejét:

$$T = mg(2 - 3\cos\varphi).$$

Ez zérus, ha $2 - 3\cos\varphi = 0$, vagyis ha $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. Azaz a gömb magasságához képest

$$\Delta h = r - r\cos\varphi = \frac{r}{3} = 0{,}2\,\mathrm{m}$$

magasságnál hagyja el a gömböt.

Otthoni gyakorlásra:
6.3, 6.4, 6.8, 6.9, 6.11, 6.14, 6.29, 6.15, 6.21, 6.26

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (vill), 6. feladatsor
Elektrosztatika

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- töltés (Q, $[Q] = 1\,\mathrm{C}$), tapasztalat (azonos taszít, ellentétes vonz), Coulomb-törvény

$$\mathbf{F} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

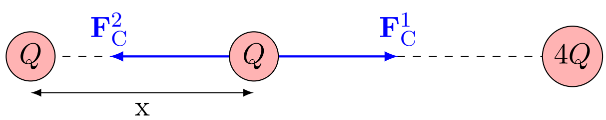
  vákuum permittivitása $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$, relatív permittivitás ε_r

- q próbatöltésre ható erő → elektromos tér ($\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$)
- erővonalkép, homogén erőtér
- munkavégzés $W = \mathbf{Fs} = q\mathbf{Es}$, feszültség/potenciálkülönbség ($U = \mathbf{Es}$, $[U] = 1\,\mathrm{V}$)
- kondenzátor $C = \frac{Q}{U}$, $[C] = 1\,\mathrm{F}$, síkkondenzátor $C = \varepsilon\frac{A}{l}$, energia, $U = \frac{1}{2}CU^2$
- sorosan/párhuzamosan kapcsolt kondenzátor eredő kapacitása

Órai feladatok:

VI/17.4. feladat:
Két pozitív, pontszerű töltés, Q és $4Q$, egymástól l távolságban van rögzítve. Hol kell elhelyezni egy pontszerű Q töltést, hogy egyensúlyban legyen?

A töltések megegyező előjelűek, tehát mindketten vonzani/taszítani fogják a próbatestet. Egyensúly akkor lehet, ha kioltják egymást, ami csak egy vonalba esés esetén valósulhat meg.



Az középsőre ható erők egyensúlyban:

$$\mathbf{F}_\mathrm{C}^1 + \mathbf{F}_\mathrm{C}^2 = 0$$
$$F_\mathrm{C}^1 - F_\mathrm{C}^2 = 0$$
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{x^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q^2}{(l-x)^2} = 0,$$

amelyből a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2 + \frac{2}{3}lx - \frac{1}{3}l^2 = 0.$$

A megoldóképlet szerint:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{2}{3}l \pm \sqrt{\frac{4}{9}l^2 + \frac{4}{3}l^2}}{2} = \ldots$$
$$= -\frac{l}{3}\left(1 \pm \sqrt{5}\right),$$

amelyek közül a fizikailag helyes megoldás az $x = 0{,}412l$.

VI/17.6. feladat:
Homogén elektrosztatikus tér pontjaiban a térerősség $E = 10^5\,\mathrm{V/m}$. Mekkora erő hat a térben levő $q = 2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ töltésű kicsi fémgolyóra? Mennyi a golyó gyorsulása, ha tömege $m = 5\,\mathrm{g}$?

A testre a Coulomb-erő hat, amely felírható a térerősséggel:

$$F = qE = 2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}.$$

Newton törvénye értelmében az erő alapján a gyorsulás:

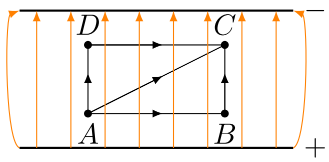
$$a = \frac{F}{m} = \frac{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}}{5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}} = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

VI/17.7. feladat:
Síkkondenzátor homogén elektromos terében a térerősség $E = 1000\,\mathrm{N/C}$. Az ábra szerinti elrendezés esetén, az AD és BC szakaszok 1 cm hosszúságúak.

a) Mennyi munkát végeznek az elektromos erők, ha $Q = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ pozitív töltés az A pontból a C pontba: az ABC; vagy az ADC; vagy közvetlenül az AC úton mozdul el?

b) Mennyivel kisebb a B; C; D; pontban a potenciál, mint az A pontban?

c) Mennyi a kondenzátor lemezei között a feszültség, ha a lemezek távolsága 3 cm?



A töltésre ható erő: $F = QE = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot 1000\,\mathrm{N/C} = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$, melynek iránya megegyezik az elektromos térerősség irányával, vagyis felfelé mutat. Az erő állandó: annak nagysága és iránya független a töltés helyétől.

Az AB és a DC egyenesek mentén végzett munka nulla, hiszen itt az elmozdulás és az erő egymásra merőleges, így a skalárszorzat nulla. Az AD és a BC egyenesek mentén pedig az elmozdulás párhuzamos az erő irányával, így a munka:

$$W_{AD} = W_{BC} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AD} = F \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{cm} = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}\,.$$

Az AC úton végzett munkát hasonlóan számolhatjuk:

$$W_{AC} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AC} = F \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha = F \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = W_{AD}\,.$$

A feszültség homogén térerősség esetében:

$$V = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = -\frac{W}{Q}\,,$$

vagyis az AB szakaszon nem esik feszültség, az AD és az AC szakaszokon pedig

$$V_{AC} = V_{AD} = -\frac{5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}}{5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}} = -10\,\mathrm{V}\,.$$

A kondenzátor lemezei közötti feszültség nagysága

$$V = 1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 3\,\mathrm{cm} = 30\,\mathrm{V}\,.$$

VI/17.8. feladat:
Mekkora sebességre gyorsul fel vákuumban, homogén elektrosztatikus térben, s úton az eredetileg nyugvó elektromos részecske? ($m = 10^{-6}\,\mathrm{g}$; $Q = 10^{-7}\,\mathrm{C}$, $E = 10^4\,\mathrm{V/m}$; $s = 10\,\mathrm{cm}$)

Használjuk a munkatételt! Az egyik oldalon külső gyorsító erőként ott van az elektromos tér, míg a másikon a mozgási energia változásából kijön a sebesség:

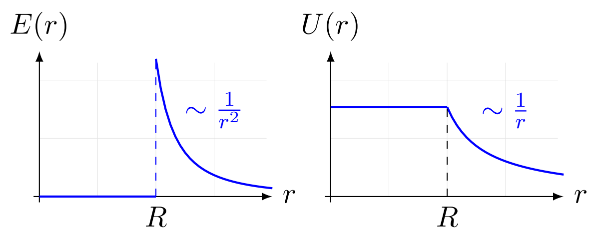
$$QEs = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2QEs}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}}{10^{-9}\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{2 \cdot 10^5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 447{,}21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

VI/17.10. feladat:
Mekkora a térerősség és a potenciál egy tömör, töltött fémgömb belsejében?

Mivel a gömb ideális vezető, így annak belsejében nem lehet térerősség. Ennek az az oka, hogy ha lenne, akkor a fém belsejében lévő többi töltésre azonnal hatna a Coulomb erő, és azok elmozdulnának, és azok egészen addig mozognának, míg olyan állapot áll be, hogy nem hat már rájuk erő.

A gömbön belül a potenciál pedig állandó. Ennek oka, hogy a gömb belsejében a térerősség nulla, abban sehol sem eshet feszültség, vagyis semelyik két pont között nincs potenciálkülönbség.



VI/17.11. feladat:
Fémből készült, töltetlen gömbhéj középpontjában $+Q$ pontszerű töltés helyezkedik el.

a) Hogyan helyezkednek el a megosztott töltések a gömbhéjon?

b) Rajzoljuk meg vázlatosan az erővonalakat a gömbön belül és kívül!

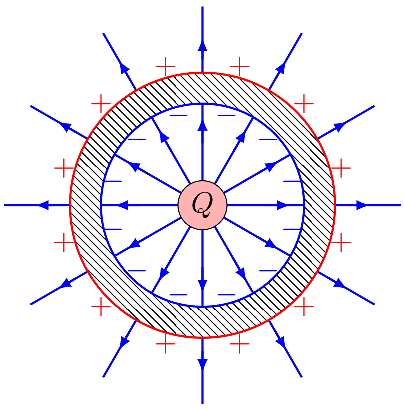
c) Hat-e erő a gömbön kívül levő töltésre?

d) A gömböt lefödve, hogyan változik meg a töltések eloszlása?

a) A gömbhéj külső és belső felületére töltések fognak felhalmozódni. A belső töltésfelhalmozódásnak az oka a gömb közepén található töltés megosztó hatása, a gömbhéj negatív töltései ahhoz közel, míg annak pozitív töltései attól távol szeretnének elhelyezkedni. Kérdés még, hogy a gömbhéj belsejében található-e szabad töltés. Mivel a gömbhéj ideális vezető, így annak belsejében nem lehet térerősség. Ennek az az oka, hogy ha lenne, akkor a fém belsejében lévő többi töltésre azonnal hatna a Coulomb erő, és azok elmozdulnának, és azok egészen addig mozognának, míg olyan állapot áll be, hogy nem hat már rájuk erő.

Ezek mellett még azt is tudjuk, hogy a töltések irány szerinti eloszlása egyenletes lesz, melynek oka, hogy a probléma gömbszimmetrikus.

b) Az erővonalat párhuzamosak az elektromos térerősség irányával, és az erővonalak sűrűsége arányos a térerősség nagyságával.



c) Igen.

d) A gömbhéj külső felületén az ott felhalmozódó pozitív töltések taszítják egymást. Ha földeljük azt a felületet, akkor ezek a töltések már el tudnak távolodni egymástól, így a felületen megszűnik a töltésfelhalmozódás: a felület semleges lesz.

VI/17.13. feladat:
Sorosan kapcsolunk egy $C_1 = 4\,\mu$F-os és egy $C_2 = 6\,\mu$F-os kondenzátort. Mekkora töltéstől töltődik fel a rendszer $U = 220\,$V-ra?

Sorosan kapcsolt kapacitások esetén az eredő nagysága:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}},$$

az eredő $C = 2{,}4\,\mu$F. A kondenzátorokra jutó töltés:

$$Q = CU = 2{,}4\,\mu\mathrm{F} \cdot 220\,\mathrm{V} = 5{,}28 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}.$$

VI/17.16. feladat:
Egy C kapacitású kondenzátorra Q töltést visznek, majd lekapcsolják a telepről. Hogyan változik a kondenzátor elektrosztatikus energiája, ha lemezeit távolítják egymástól?

A lekapcsolás után a kondenzátoron levő töltésnek meg kell maradnia. A kondenzátor energiája:

$$E_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},$$

amelybe behelyettesíthetjük a síkkondenzátorra vonatkozó ismeretünket $\left(C = \varepsilon\frac{A}{l}\right)$, és így:

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon A}l.$$

Ez alapján ha lemezeket távolítjuk (l nő), akkor az energia is növekedni fog.

VI/17.26. feladat:
Mekkora eredő kapacitást kapunk, ha $C_1 = 2\,\mu$F és $C_2 = 3\,\mu$F kapacitású kondenzátort
a) sorba, b) párhuzamosan kapcsolunk?

a, Sorba kapcsolás esetén:

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} + \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}}\right)^{-1} = 1{,}2\,\mu\mathrm{F}.$$

b, Ha párhuzamosan kapcsoljuk őket:

$$C = C_1 + C_2 = 2\,\mu\mathrm{F} + 3\,\mu\mathrm{F} = 5\,\mu\mathrm{F}.$$

Megj. Ez a példa előrevehető első kondenzátoros példának, aztán a levezetést hozzá el lehet közben mondani.

VI/17.27. feladat:
Két sorba kötött kondenzátorra, amelyek kapacitása $C_1 = 2\,\mu$F és $C_2 = 4\,\mu$F; $U = 120\,$V feszültséget kapcsolunk. Mekkora az egyes kondenzátorokra jutó feszültség?

A soros kapcsolás miatt mindkét kondenzátorra ugyanakkora töltés jut, azaz:

$$\begin{aligned} C_1U_1 &= C_2U_2 = C_2(U-U_1) \\ (C_1+C_2)\,U_1 &= C_2U \\ U_1 &= \frac{C_2}{C_1+C_2}U = \frac{4\,\mu\text{F}}{2\,\mu\text{F}+4\,\mu\text{F}}\cdot 120\,\text{V} \\ &= 80\,\text{V}. \end{aligned}$$

A másik kondenzátorra $U_2 = U - U_1 = 120\,\text{V} - 80\,\text{V} = 40\,\text{V}$ jut.

VI/17.30. feladat:
Ismeretlen kapacitású, $U_1 = 80\,\text{V}$-ra feltöltött kondenzátor sarkait összekapcsoljuk egy $U_2 = 16\,\text{V}$-ra feltöltött, $C_2 = 60\,\mu\text{F}$ kapacitású kondenzátor sarkaival. Határozzuk meg az ismeretlen kapacitást, ha az összekapcsolás után a kondenzátorok közös feszültsége $U_\text{k} = 20\,\text{V}$; és összekötéskor az
a) egyező pólusokat;
b) ellentétes pólusokat kapcsoltuk össze!

A második kondenzátorra $Q_2 = C_2U_2 = 16\,\text{V}\cdot 60\,\mu\text{F} = 960\,\mu\text{C}$ töltés jut.

a, Egyező pólusok összekapcsolása esetén a töltések összeadódnak és mindkét kapacitáson azonos feszültség alakul ki. Az összeállítás a párhuzamos kapcsolásra emlékeztet. Azaz igaz lesz, hogy:

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ Q &= Q_1 + Q_2, \end{aligned}$$

amely tovább fejtve:

$$\begin{aligned} U_\text{k}C &= C_1U_1 + C_2U_2 \\ U_\text{k}\,(C_1+C_2) &= C_1U_1 + C_2U_2 \\ C_1 &= \frac{U_\text{k}-U_2}{U_1-U_\text{k}}C_2 = \\ &= \frac{20\,\text{V}-16\,\text{V}}{80\,\text{V}-20\,\text{V}}\cdot 60\,\mu\text{F} = 4\,\mu\text{F}. \end{aligned}$$

A most fordítva kötjük össze őket, így a töltések kioltják egymást, azaz a fenti állítások közül módosul a harmadik:

$$Q = Q_1 - Q_2,$$

amely hasonlóan továbbvihető:

$$\begin{aligned} U_\text{k}C &= C_1U_1 - C_2U_2 \\ U_\text{k}\,(C_1+C_2) &= C_1U_1 - C_2U_2 \\ C_1 &= \frac{U_\text{k}+U_2}{U_1-U_\text{k}}C_2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{20\,\text{V}+16\,\text{V}}{80\,\text{V}-20\,\text{V}}\cdot 60\,\mu\text{F} = 36\,\mu\text{F}.$$

Otthoni gyakorlásra:
17.5, 17.12, 17.14, 17.22, 17.23, 17.24, 17.17, 17.18, K6

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

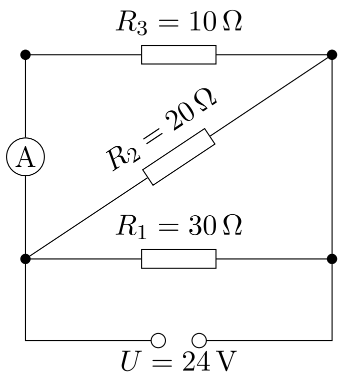
Bevezető fizika (vill), 7. feladatsor
Egyenáram, egyenáramú áramkörök 1.

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- Elektromos áram $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, mértékegység $\frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{A}$
- Elektromos ellenállás R, mértékegység $1\,\Omega$
- Ohm-törvénye: $R = \frac{U}{I}$
- Egyenáramú áramkörök, soros és párhuzam kapcsolások, Kirchhoff csomóponti törvénye
- munka, energia, teljesítmény ($P = U \cdot I$)

Órai feladatok:

VII/18.4. feladat:
Mekkora áramerősséget jelez a műszer az ábra szerinti kapcsolásban? (A műszer belső ellenállása elhanyagolható.)



Mivel mind a három ellenállás egymással párhuzamosan van kapcsolva, így mindegyiken ugyanakkora feszültség esik. Az ampermérőn az az áram folyik keresztül, mint ami az R_3-as ellenálláson, vagyis:

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{24\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} = 2{,}4\,\mathrm{A}\ .$$

VII/18.8. feladat:
Feszültségforrásra sorosan kötött ellenállások egyikét megváltoztatjuk, változnak-e a részfeszültségek?

Vegyünk két ellenállást, az egyik változzon ($R \to R'$) a másik legyen a maradék rendszer eredője (R_m) Az Ohm-törvény értelmében az áramerősség:

$$I = \frac{U}{R + R_\mathrm{m}}.$$

Csere után:

$$I' = \frac{U}{R' + R_\mathrm{m}}.$$

A két esetben a maradékra jutó feszültség:

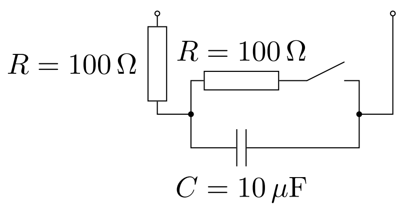
$$U_\mathrm{m} = \frac{U R_\mathrm{m}}{R + R_\mathrm{m}} \qquad U'_\mathrm{m} = \frac{U R_\mathrm{m}}{R' + R_\mathrm{m}},$$

amelyek láthatóan csak $R = R'$ esetben egyeznek meg.

VII/18.12. feladat:
Elhanyagolható belső ellenállású, $U = 100\,\mathrm{V}$ elektromotoros erejű telepet kapcsolunk az ábrán látható hálózatra.

a) Mekkora a kondenzátor energiája a kapcsoló zárt/nyitott állása mellett?

b) Mekkora a telep által állandóan leadott teljesítmény a kapcsoló zárt/nyitott állása mellett?



a) A kapcsoló nyitott állása mellett az áramkörben egy ellenállás és egy kondenzátor marad. Ha ezt egy állandó U feszültségű telepre kapcsoljuk, akkor az a kondenzátort fel fogja tölteni, majd ha a kondenzátor feltöltődött, akkor megszűnik az áram. Az állandósult állapotban nem folyik áram, vagyis az ellenálláson nem esik feszültség, így a kondenzátoron esik mind a 100 V. Ekkor a kondenzátor energiája:

$$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\,\mu\text{F} \cdot (100\,\text{V})^2 = 50\,\text{mJ}\ .$$

Mivel az állandósult állapotban nem folyik áram az áramkörben, így a telep által leadott teljesítmény nulla.

b) Ha a kapcsoló zárt, akkor a kondenzátorral párhuzamosan is van egy R ellenállás. Az állandósult állapotban itt sem folyhat áram a kondenzátoron. A kondenzátor feltöltődése után azonban itt még tud folyni áram az újonnan bekötött ellenálláson keresztül. Az ekkor folyó áram: $I = \frac{U}{2R} = \frac{100\,\text{V}}{200\,\Omega} = 0{,}5\,\text{A}$, hiszen az áramkörben két sorosan kapcsolt ellenállás van. A kondenzátor az egyik ellenállás két kivezetésére van kötve, így rajta ugyanakkora feszültség esik mint azon az egy ellenálláson: $U_\text{C} = U_\text{R} = IR = 0{,}5\,\text{A} \cdot 100\,\Omega = 50\,\text{V}$.

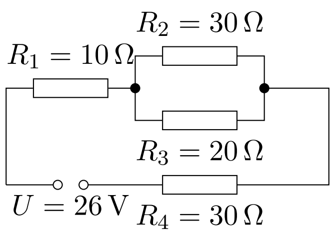
Ez alapján a kondenzátor energiája itt:

$$E = \frac{1}{2}CU_\text{C}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\,\mu\text{F} \cdot (50\,\text{V})^2 = 12{,}5\,\text{mJ}\ .$$

Az állandósult állapotban a telep által leadott teljesítmény:

$$P_\text{z} = UI = 100\,\text{V} \cdot 0{,}5\,\text{A} = 50\,\text{W}\ .$$

VII/18.27. feladat:
Mennyi az elektromos teljesítmény a 20 Ω-os ellenálláson?



Számoljuk ki az eredő ellenállást. Elsőként a 2-3 elem párhuzamosan:

$$R_{23} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{30\,\Omega} + \frac{1}{20\,\Omega}\right)^{-1} = 12\,\Omega.$$

Most már sorosan van 3 ellenállás, az eredő:

$$R_\text{e} = R_1 + R_{23} + R_4 = 10\,\Omega + 12\,\Omega + 30\,\Omega = 52\,\Omega.$$

A főágban az áram:

$$I = \frac{U}{R_\text{e}} = 0{,}5\,\text{A}.$$

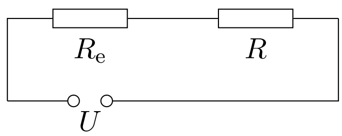
A részfeszültségek:

$$U_1 = R_1 I = 5\,\text{V} \qquad U_4 = R_4 I = 15\,\text{V},$$

azaz $U_{23} = U - U_1 - U_4 = 6\,\text{V}$, amely alapján a 3-as ágban folyó áram $I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = 0{,}3\,\text{A}$, a teljesítmény:

$$P_3 = U_{23} I_3 = 6\,\text{V} \cdot 0{,}3\,\text{A} = 1{,}8\,\text{W}.$$

VII/18.29. feladat:
Feszültségmérő méréshatára $U = 5\,\text{V}$, ellenállása $R = 800\,\Omega$. Mekkora előtét-ellenállást kell sorba kapcsolnunk vele, hogy $U' = 500\,\text{V}$-ig mérhessünk vele?



I_max értékét kell állandóan tartanunk, hiszen akkor jut a műszerre ugyanaz a részfeszültség (U):

$$I_\text{max} = \frac{U}{R},$$

az előtét betétele után az összfeszültség:

$$U' = (R_\text{e} + R)\, I_\text{max} = \frac{R_\text{e} + R}{R} U.$$

Ebből kifejezhető az előtét nagysága:

$$R_\text{e} = \frac{U' - U}{U} R = \frac{500\,\text{V} - 5\,\text{V}}{5\,\text{V}} \cdot 800\,\Omega = 79200\,\Omega$$

VII/18.30. feladat:
A $I = 2\,\text{A}$ méréshatárú, $R_\text{A} = 10^{-1}\,\Omega$ belső ellenállású áramerősség-mérővel párhuzamosan kapcsolt söntnek mekkora legyen az ellenállása, hogy $I' = 50\,\text{A}$-ig mérhessünk vele?

A párhuzamosan kapcsolt söntellenállás hatása az, hogy így nem az áramkörben folyó teljes áram fog átfolyni az ampermérőn, hanem annak csak egy része, a többi a söntellenálláson folyik át. Ekkor nagyobb áramokat mérhetünk, a méréshatár megnő addig, míg az így lecsökkent áram értéke is eléri az eredeti méréshatárt.

Az R_A ellenállású ampermérőnek és a vele párhuzamosan kapcsolt R_s söntellenállásnak az eredője:

$$R_\mathrm{e} = \frac{1}{\frac{1}{R_\mathrm{A}} + \frac{1}{R_\mathrm{s}}} ,$$

tehát ha I_0 áram folyik a teljes áramkörben (ekkorát szeretnénk mérni), akkor az árammérőre $U_\mathrm{A} = I_0 \cdot R_\mathrm{e}$ feszültség esik, vagyis a rajta átfolyó áram:

$$I_\mathrm{A} = \frac{U_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A}} = I_0 \cdot \frac{R_\mathrm{e}}{R_\mathrm{A}} = I_0 \cdot \frac{R_\mathrm{s}}{R_\mathrm{A} + R_\mathrm{s}} .$$

Itt az I_A maximális értéke az ampermérő tényleges méréshatára, így a sönt nagyságát ki tudjuk fejezni:

$$R_\mathrm{s} = R_\mathrm{A} \frac{I_\mathrm{A}}{I_0 - I_\mathrm{A}} = 10^{-3}\,\Omega \cdot \frac{2\,\mathrm{A}}{50\,\mathrm{A} - 2\,\mathrm{A}} = 4{,}16 \cdot 10^{-5}\,\Omega.$$

VII/18.32. feladat:
Mennyivel csökken a $U_\mathrm{a} = 12\,\mathrm{V}$-os akkumulátor elektromotoros energiája, ha a rákapcsolt $U_\mathrm{i} = 12\,\mathrm{V}$-os és $P_\mathrm{i} = 25\,\mathrm{W}$-os izzó $t = 10$ órán át világít?

A felhasznált energia:

$$E = Pt = 25\,\mathrm{W} \cdot (10 \cdot 3600)\,\mathrm{s} = 900000\,\mathrm{J}.$$

VII/18.36. feladat:
Egy $U_1 = 110\,\mathrm{V}$-os, $P_1 = 25\,\mathrm{W}$-os izzólámpa kevesebb áramot fogyaszt, mint $U_2 = 3{,}5\,\mathrm{V}$-os, $I_2 = 0{,}3\,\mathrm{A}$-t fogyasztó zseblámpaizzó. Miért ad mégis erősebb fényt?

A fényerő nem az áramerősséggel, hanem a teljesítménnyel arányos. A zseblámpaizzó teljesítménye:

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 = 3{,}5\,\mathrm{V} \cdot 0{,}3\,\mathrm{A} = 1{,}05\,\mathrm{W}.$$

Mivel $P_1 >> P_2$, a fényereje is nagyobb.

VII/18.39. feladat:
Mikor kapunk több fényt, ha két azonos izzólámpát ugyanakkora feszültségre párhuzamosan, vagy sorosan kapcsolunk?

Legyen az ellenállásuk R. Párhuzamosan kapcsolva az eredő ellenállás $R_\mathrm{p} = \frac{R}{2}$, az összteljesítmény:

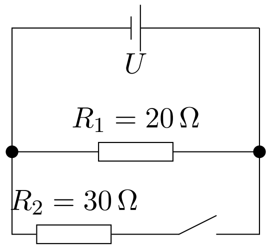
$$P_\mathrm{p} = 2UI_\mathrm{p} = 2\frac{U^2}{R_\mathrm{p}} = 4\frac{U^2}{R}.$$

Soros esetben az eredő ellenállás $R_\mathrm{s} = 2R$, az összteljesítmény:

$$P_\mathrm{s} = 2UI_\mathrm{s} = 2\frac{U^2}{R_\mathrm{s}} = \frac{U^2}{R}.$$

Azaz párhuzamosan kapcsolva a teljesítmény, és így a fényerő is négyszer akkora.

VII/+1. feladat:
Az ábrán látható elektromos hálózatban a kapcsoló nyitott állásánál $I_\mathrm{ny} = 0{,}4\,\mathrm{A}$ erősségű, a kapcsoló zárt állásánál $I_\mathrm{z} = 0{,}6\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik át az áramforráson. Mekkora az áramforrás belső ellenállása?



A nyitott esetben $R_\mathrm{e,ny} = R_\mathrm{b} + R_1$, azaz $I_\mathrm{ny} = \frac{U}{R_1 + R_\mathrm{b}}$, míg zárt esetben $R_\mathrm{e,z} = R_\mathrm{b} + \left(R_1^{-1} + R_2^{-1}\right)^{-1}$, azaz $I_\mathrm{z} = \frac{U}{R_\mathrm{b} + \left(R_1^{-1} + R_2^{-1}\right)^{-1}}$. Az elsőből kifejezhető U és beírható a másodikba:

$$I_\mathrm{z} = \frac{(R_1 + R_\mathrm{b})}{R_\mathrm{b} + \left(R_1^{-1} + R_2^{-1}\right)^{-1}} I_\mathrm{ny}.$$

Ebből kifejezhető a belső ellenállás:

$$R_\mathrm{b} = \frac{R_1 I_\mathrm{ny} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_\mathrm{z}}{I_\mathrm{z} - I_\mathrm{ny}} = \frac{20\,\Omega \cdot 0{,}4\,\mathrm{A} - \frac{20\,\Omega \cdot 30\,\Omega}{20\,\Omega + 30\,\Omega} \cdot 0{,}6\,\mathrm{A}}{0{,}6\,\mathrm{A} - 0{,}4\,\mathrm{A}} = 4\,\Omega.$$

VII/?. feladat:
Egy $R_1 = 20\,\Omega$-os ellenállást és egy $R_2 = 10\,\Omega$-os ellenállást kapcsolunk sorosan egy egyenáramú feszültségforrásra. Mekkora ellenállást kell párhuzamosan kapcsolni az $R_1 = 20\,\Omega$-os ellenállással, hogy az $R_2 = 10\,\Omega$-os ellenállásra eső teljesítmény megduplázódjon?

A betétel előtt az eredő ellenállás $R_\mathrm{e} = R_1 + R_2$, a főágban az áram $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$, tehát a teljesítmény a 2. ellenálláson:

$$P_2 = \frac{U^2}{R_1 + R_2}.$$

A párhuzamosan tag betétele után az új eredő ellenállás:

$$R'_\mathrm{e} = \frac{R_1 \cdot R'}{R_1 + R'} + R_2,$$

az új teljesítmény:

$$P_2' = \frac{U^2}{\frac{R_1 \cdot R'}{R_1 + R'} + R_2}.$$

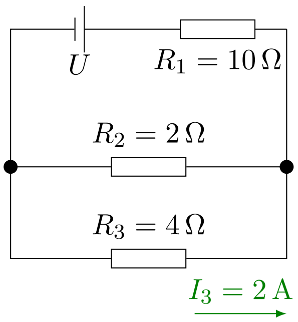
A kívánt cél az, hogy $P_2' = 2P_2$, azaz:

$$\frac{U^2}{\frac{R_1 \cdot R'}{R_1 + R'} + R_2} = 2\frac{U^2}{R_1 + R_2}.$$

Átrendezés után a keresett ellenállás:

$$\begin{aligned} R' &= \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \cdot R_1 = \frac{20\,\Omega - 10\,\Omega}{20\,\Omega + 10\,\Omega} \cdot 10\,\Omega \\ &= 6{,}6\,\Omega. \end{aligned}$$

VII/+2. feladat:
Az ábrán látható elektromos hálózatban a $4\,\Omega$-os ellenálláson $2\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik. Mekkora feszültség esik a $10\,\Omega$-os ellenálláson?



Sorban haladva: $U_3 = R_3 \cdot I_3$, a párhuzamosság miatt $U_2 = U_3$, így

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{R_3 \cdot I_3}{R_2},$$

majd

$$I_1 = I_2 + I_3 = I_3 \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right).$$

Végezetül a keresett feszültség:

$$\begin{aligned} U_1 = I_1 \cdot R_1 &= I_3 \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) R_1 \\ &= 2\,\mathrm{A} \left(1 + \frac{4\,\Omega}{2\,\Omega}\right) 10\,\Omega. \\ &= 60\,\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Otthoni gyakorlásra:
18.5, 18.6, 18.10, 18.25, 18.42, 18.43, 18.46, 18.51, 18.52

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (Vill), 8. feladatsor
Egyenáram, egyenáramú áramkörök 2.

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

Kirchhoff törvényei:
Minden csomópontban a befolyó és kifolyó áramok előjeles összege zérus: $\sum_{\mathrm{be}} I = \sum_{\mathrm{ki}} I$
Minden hurokra $\sum U + \sum I_i R_i = 0$ (lásd 19.16. példa)

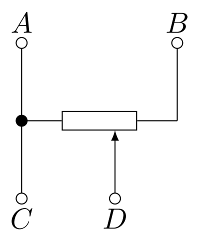
Kapocsfeszültség (ami a fogyasztóhoz kijut), elektromotoros erő (minden ami az feszültségforrásban van), belső ellenállás (feszültségforrás ellenállása) $U_k = \varepsilon - IR_b$

Órai feladatok:

VIII/19.3. feladat:
A zérus ohmtól $100\,\Omega$-ig változtatható ellenállású feszültségosztó A és B pontjai között $100\,\mathrm{V}$ a feszültség.

a) Milyen határok között változtathatjuk a feszültséget a C és D pontok között?

b) Mekkora a C és D pontok közötti feszültség, ha a csúszka az ellenállás közepén áll? (A potenciométer egyenletes keresztmetszetű huzalból készült.)

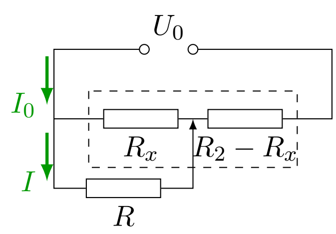


a) A C pont a potenciál szempontjából megfelel az A-nak hiszen a vezeték ideális. A D-n pedig akkora a potenciál A-hoz képest, amekkora aránya az ellenállásnak van azon az oldalon. Az ellenállás 0-tól $100\,\Omega$-ig változik, és összesen $100\,\mathrm{V}$, feszültség osztódik el. Ez ohmonként 1 volt, összességében C és D között 0 és $100\,\mathrm{V}$ között tetszőleges érték beállítható.

b) Ha a csúszka középen áll, akkor $50\,\Omega$ van jobbra, így az előző gondolatmenet alapján $50\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{V}/\Omega = 50\,\mathrm{V}$ feszültséget mérhetünk.

VIII/19.8. feladat:
A $U_0 = 200\,\mathrm{V}$-os feszültségforrásról potenciométer (feszültségosztó) alkalmazásával $U = 50\,\mathrm{V}$-os és $P = 100\,\mathrm{W}$-os teljesítményű fogyasztót akarunk üzemeltetni. Rendelkezésünkre áll egy $R_1 = 1000$ ohmos $I_1^{\max} = 1\,\mathrm{A}$-rel terhelhető és egy $R_2 = 100$ ohmos, $I_2^{\max} = 5\,\mathrm{A}$ maximális terhelésű tolóellenállás. Melyiket használjuk, és hova állítsuk be a csuszkát?

A fogyasztónak szükséges áram: $I = \frac{P}{U} = \frac{100\,\mathrm{W}}{50\,\mathrm{V}} = 2\,\mathrm{A}$, amely alapján az első tolóellenállás nem lehet, csak a második. A kapcsolási rajz:



A párhuzamos kapcsolás miatt R_x-re akkora feszültség jut, mint a fogyasztóra, míg $R_2 - R_x$-re a maradék:

$$(I_0 - I)R_x = U$$
$$I_0(R_2 - R_x) = U_0 - U.$$

A főágban folyó áram így $I_0 = \frac{U_0 - U}{R_2 - R_x}$, amely beírható az első egyenletbe:

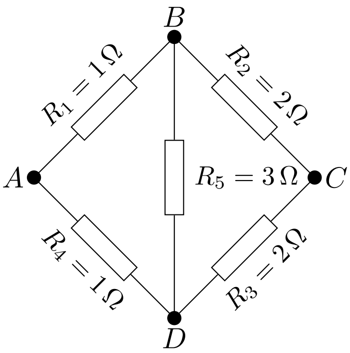
$$U = \left(\frac{U_0 - U}{R_2 - R_x} - I\right) R_x$$
$$U(R_2 - R_x) = (U_0 - U)R_x - IR_x(R_2 - R_x)$$
$$0 = IR_x^2 + R_x(U_0 - IR_2) - UR_2$$

Íjuk be a megoldóképletbe:

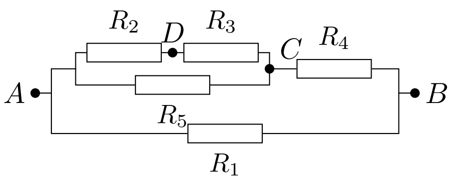
$$
\begin{aligned}
R_{x1,2} &= \frac{(IR_2 - U_0) \pm \sqrt{(U_0 - IR_2)^2 + 4IUR_2}}{2UI} \\
&= \frac{(2\,\mathrm{A} \cdot 100\,\Omega - 200\,\mathrm{V})}{2 \cdot 2\,\mathrm{A}} \pm \\
&\frac{\sqrt{(200\,\mathrm{V} - 2\,\mathrm{A} \cdot 100\,\Omega)^2 + 4 \cdot 2\,\mathrm{A} \cdot 50\,\mathrm{V} \cdot 100\,\Omega}}{2 \cdot 2\,\mathrm{A}} \\
&= \pm 50\,\Omega,
\end{aligned}
$$

azaz a csúszkát középre kell állítani.

VIII/19.10. feladat:
Mekkora az eredő ellenállás az ábrán látható kapcsolás A–B, B–C, C–D, D–A és A–C pontjai között?



A–B: Az áramkört átrajzolhatjuk:



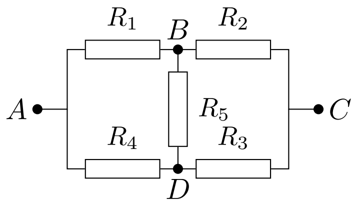
Melynek ellenállását azonnal számolhatjuk:

$$
\begin{aligned}
R_{23} &= R_2 + R_3 \\
R_{235} &= \frac{1}{\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_5}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2+R_3} + \frac{1}{R_5}} \\
&= \frac{(R_2 + R_3) \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5} \\
R_{2345} &= R_{235} + R_4 \\
&= \frac{(R_2 + R_3) \cdot (R_4 + R_5) + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{AB} &= \frac{1}{\frac{1}{R_{2345}} + \frac{1}{R_1}} \\
&= \frac{R_1(R_2 + R_3)(R_4 + R_5) + R_1 R_4 R_5}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4 + R_5) + (R_1 + R_4) \cdot R_5}
\end{aligned}
$$

B–C: Az A–B esethez teljesen hasonlóan lehet megoldani, úgy mint a C–D és a D–A eseteket is.

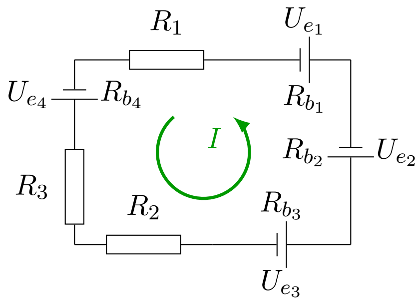
A–C: A kapcsolás átrajzolásával itt egy kicsit más kapcsolást kapunk:



Itt, mivel az R_1 és az R_2 aránya ugyanakkora, mint az R_4 és az R_3 aránya, így ugyanakkora feszültség fog esni az R_1 és az R_4 ellenállásokon, vagyis a C és a D pont között nem lesz soha feszültség. Ennek következménye, hogy az R_5-ös ellenálláson nem folyik áram, vagyis annak ellenállását az eredő ellenállás számításakor nem kell figyelembe venni. A többi járuléka:

$$
\begin{aligned}
R_{AB} &= \frac{1}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}} \\
&= \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_3}\,.
\end{aligned}
$$

VIII/19.16. feladat:
Mekkora az áramerősség az ábra szerint összekapcsolt áramkörben? ($R_1 = 20\,\Omega$; $R_2 = 40\,\Omega$; $R_3 = 10\,\Omega$; $U_1 = U_2 = 10\,\mathrm{V}$; $U_3 = 6\,\mathrm{V}$; $U_4 = 20\,\mathrm{V}$; $R_{\mathrm{b},1} = 0{,}2\,\Omega$; $R_{\mathrm{b},2} = R_{\mathrm{b},3} = 0{,}1\,\Omega$; $R_{\mathrm{b},4} = 0{,}01\,\Omega$.)



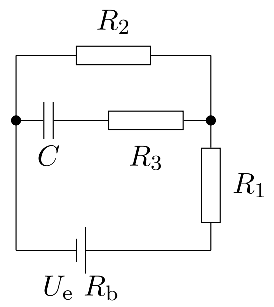
Az áramkörben folyó áram kiszámításához felhasználjuk Kirchhoff II. törvényét. Ez azt mondja ki, hogy egy áramhurok mentén a feszültségek előjeles összegének nullát kell adnia.

Vegyünk fel az áram irányát úgy, ahogy az ábrán szerepel. Ennek az irányában fogjuk körbejárni az áramhurkot. Ebben az eseten az ellenállásokon eső feszültség $U = IR$. A telepek feszültségét pedig a következő előjelekkel kell figyelembe venni. Ha a telepen úgy haladunk át, hogy a feszültség csökken, vagyis a pozitív kivezetéséről lépünk át a negatív kivezetésére, akkor annak a feszültségét pozitív előjellel kell figyelembe venni. Ezzel szemben, ha fordítva haladunk át egy telepen, vagyis úgy, hogy alacsonyabb feszültségű helyről lépünk magasabb feszültségűre, akkor annak a feszültségét negatív előjellel kell venni.

Ebben a konkrét esetben, ha a jobb alsó sarokban kezdjük a körbejárást:

$$\begin{aligned}0 &= U_2 + IR_{b,2} + U_1 + IR_{b,1} + IR_1 \\ &\quad - U_4 + IR_{b,4} + IR_3 + IR_2 - U_3 + IR_{b,3} \\ I &= \frac{U_3 + U_4 - U_1 - U_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{b,1} + R_{b,2} + R_{b,3} + R_{b,4}} \\ I &= \frac{6\,\mathrm{V} + 20\,\mathrm{V} - 10\,\mathrm{V} - 10\,\mathrm{V}}{20\,\Omega + 40\,\Omega + 10\,\Omega + 0{,}2\,\Omega + 2\cdot 0{,}1\,\Omega + 0{,}01\,\Omega} \\ &= 0{,}085\,\mathrm{A}\ .\end{aligned}$$

VIII/19.18. feladat:
Mekkora feszültségre töltődik fel az ábrán látható kapcsolásban a kondenzátor? ($U_e = 3{,}6\,\mathrm{V}$; $R_b = 10\,\Omega$; $R_1 = 40\,\Omega$; $R_2 = 70\,\Omega$; $R_3 = 30\,\Omega$.)



A kondenzátor feltöltődése után azon már nem folyik áram, vagyis akkor az R_3-as ellenállás is kiesik az áramkörből. Ekkor csak az R_1, az R_2 és a telep belső ellenállása marad a körben, mind sorba kapcsolva, vagyis az eredő ellenállás

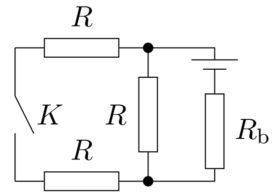
$$R_e = R_1 + R_2 + R_b = 40\,\Omega + 70\,\Omega + 10\,\Omega = 120\,\Omega\ ,$$

és a körben folyó áram

$$I = \frac{U_e}{R_e} = \frac{3{,}6\,\mathrm{V}}{120\,\Omega} = 0{,}03\,\mathrm{A}\ .$$

Ekkor az R_2-n eső feszültség $U_2 = R_2 I_2 = 2{,}1\,\mathrm{V}$. Mivel a kondenzátor és az R_3-as ellenállás ezzel párhuzamosan van kötve, így azokon is ekkora feszültség esik. Azonban az R_3-as ellenálláson nem folyik áram, így azon nem eshet feszültség, tehát a 2,1 V-nak mind a kondenzátoron kell esnie.

VIII/19.28. feladat:
Az ábra szerinti kapcsolásban a K kapcsoló nyitott állásánál $I_{ny} = 0{,}1\,\mathrm{A}$, zárt kapcsolóállás esetén pedig $I_z = 0{,}133\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik az elemet tartalmazó ágban. Mekkora az elem elektromotoros ereje és belső ellenállása? ($R = 18\,\Omega$.)



Ha a kapcsoló nyitott, akkor az áramkörben egy R és a belső ellenállás van sorba kapcsolva. Ekkor

$$I_{ny} = \frac{U}{R + R_b}\ .$$

Bekapcsolt kapcsolóállás esetén a belső ellenállással egy két ágból álló párhuzamos kör van sorba kapcsolva. A párhuzamos rész ellenállása:

$$R_{\|} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R}} = \frac{2}{3}R\ ,$$

mellyel az eredő ellenállás, és az áram

$$\begin{aligned}R_e &= R_{\|} + R_b = \frac{2}{3}R + R_b\ . \\ I_z &= \frac{U}{R_e} = \frac{U}{\frac{2}{3}R + R_b}\ .\end{aligned}$$

A két egyenletből meg lehet határozni a keresett két mennyiséget. Behelyettesítve:

$$\begin{aligned}0{,}1\,\mathrm{A} &= \frac{U}{18\,\Omega + R_b} \\ 0{,}133\,\mathrm{A} &= \frac{U}{12\,\Omega + R_b}\ ,\end{aligned}$$

majd átrendezve

$$\begin{aligned}U &= 1{,}8\,\mathrm{V} + 0{,}1\,\mathrm{A}\cdot R_b \\ U &= 1{,}6\,\mathrm{V} + 0{,}133\,\mathrm{A}\cdot R_b\ ,\end{aligned}$$

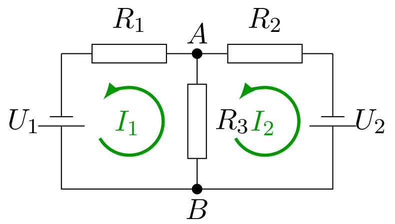
ahonnan

$$\begin{aligned}1{,}8\,\mathrm{V} + 0{,}1\,\mathrm{A}\cdot R_b &= 1{,}6\,\mathrm{V} + 0{,}133\,\mathrm{A}\cdot R_b \\ 0{,}2\,\mathrm{V} &= 0{,}033\,\mathrm{A}\cdot R_b \\ R_b &= 6\,\Omega\ ,\end{aligned}$$

melyet visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$U = 1{,}8\,\mathrm{V} + 0{,}1\,\mathrm{A}\cdot 6\,\Omega = 2{,}4\,\mathrm{V}\ .$$

VIII/19.45. feladat:
Az ábrán látható hálózatban az ellenállások értéke $R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 80\,\Omega$ és $R_3 = 100\,\Omega$. A telepek elektromotoros ereje $U_1 = 1{,}5\,\text{V}$; $U_2 = 1\,\text{V}$, és belső ellenállásuk elhanyagolható. Határozzuk meg az AB ágban folyó áram erősségét!



Írjuk fel a huroktörvényt a jobb és bal oldalra is:

$$R_1 I_1 - U_1 + (I_1 - I_2)R_3 = 0$$
$$U_2 + R_2 I_2 + (I_2 - I_1)R_3 = 0$$

majd rendezzük az áramokra:

$$I_1(R_1 + R_3) - I_2 R_3 - U_1 = 0$$
$$I_1(-R_3) + I_2(R_2 + R_3) + U_2 = 0.$$

Az elsőből $I_1 = \frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3}$, amely beírható a másodikba, amelyet így csak rendezni kell:

$$0 = -\frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3} R_3 + I_2(R_2 + R_3) + U_2$$
$$\vdots$$
$$I_2 = \frac{U_1 R_3 - U_2(R_1 + R_3)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2}$$
$$= \frac{1{,}5\,\text{V} \cdot 100\,\Omega - 1\,\text{V} \cdot (50\,\Omega + 100\,\Omega)}{(50\,\Omega + 100\,\Omega)(80\,\Omega + 100\,\Omega) - (100\,\Omega)^2}$$
$$= 0\,\text{A}.$$

Ha visszahelyettesítjük:

$$I_1 = \frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{1{,}5\,\text{V} + 0\,\text{A} \cdot 100\,\Omega}{50\,\Omega + 100\,\Omega}$$
$$= 0{,}01\,\text{A}.$$

Az AB szakaszon folyó áram:

$$I_{AB} = I_2 - I_1 = -0{,}01\,\text{A}.$$

VIII/K3. feladat:
Izzólámpát és egy réz-szulfát-oldattal töltött elektrolizáló edényt sorosan kapcsolunk a feszültségforrásra. A lámpa izzószálán $U = 200\,\text{V}$ a feszültség. A berendezés üzemeltetési ideje alatt az izzólámpa $W = 0{,}016\,\text{kWh}$ energiát fogyaszt. Mennyi vörösréz válik ki az elektrolizáló edényben? $q = 1\,\text{C}$ töltés $m = 0{,}33\,\text{mg}$ vörösrezet választ le.

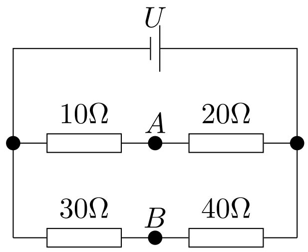
Az elektromos munka $W = UIt = UQ$. Ez alapján az átjutó töltés:

$$Q = \frac{W}{U} = \frac{(0{,}016 \cdot 3600 \cdot 1000)\,\text{J}}{200\,\text{V}} = 288\,\text{C}.$$

Az ennek hatására kiváló réz tömege:

$$m_{\text{Cu}} = \frac{m}{q} Q = \frac{0{,}33\,\text{mg}}{1\,\text{C}} \cdot 288\,\text{C} = 95{,}04\,\text{mg}.$$

VIII/+1. feladat:
Az ábrán látható kapcsolásban mekkora az A és B pont közötti feszültség nagysága? ($U = 220\,\text{V}$)



A felső soron ágban az eredő ellenállás $R_{12} = 30\,\Omega$, míg az alsóban $R_{34} = 70\,\Omega$. A teljes eredő:

$$R_\text{e} = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = 21\,\Omega.$$

A főágban folyó $I = \frac{U}{R_\text{e}} = 10{,}476\,\text{A}$ áram az ellenállások arányában fordítottan oszlik el az ágakon, azaz:

$$I_{12} R_{34} = I_{34} R_{12}$$

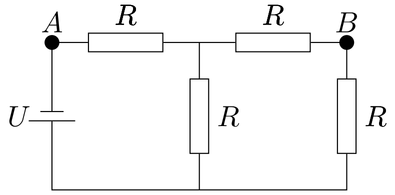
A fenti egyenlet alapján

$$I_{12} = \frac{R_{34}}{R_{12}} I_{34}$$
$$\left(\frac{R_{34}}{R_{12}} + 1\right) I_{34} = I \qquad \rightarrow \quad I_{34} = 3{,}14\,\text{A},$$
$$I_{12} = I - I_{34} = 7{,}3\,\text{A}.$$

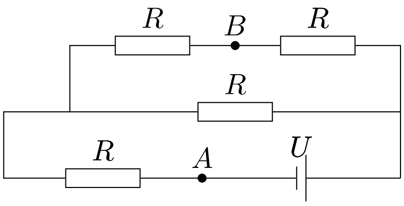
Az A pont potenciálja $U_A = R_1 I_{12} = 10\,\Omega \cdot 7{,}3\,\text{A} = 73{,}3\,\text{V}$, a B ponté $U_B = R_3 I_{34} = 30\,\Omega \cdot 3{,}14\,\text{A} = 94{,}2\,\Omega$. A kettő különbsége:

$$U_{AB} = U_B - U_A = 20{,}9\,\text{V}.$$

VIII/+2. feladat:
Az ábrán látható kapcsolásban mekkora az A és B pont közötti feszültség nagysága? ($U = 10\,\text{V}$)



Átrajzolva:



Az eredő ellenállás:

$$R_\mathrm{e} = \frac{(R+R)R}{(R+R)+R} + R = \frac{5}{3}R.$$

Az áramerősség a főágban és így a lenti ellenálláson $I = \frac{U}{R_\mathrm{e}}$, így az arra jutó feszültség $U_1 = IR = \frac{3}{5}U$. A párhuzamos tagra jut a maradék, és szimmetria miatt a B pont elé és mögé annak fele-fele. Azaz az AB feszültség a következő:

$$U_{AB} = U_1 + \frac{U - U_1}{2} = \frac{3}{5}U + \frac{U - \frac{3}{5}U}{2} = \frac{4}{5}U = 8\,\mathrm{V}.$$

Otthoni gyakorlásra:
19.5, 19.12, 19.14, 19.24, 19.33

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

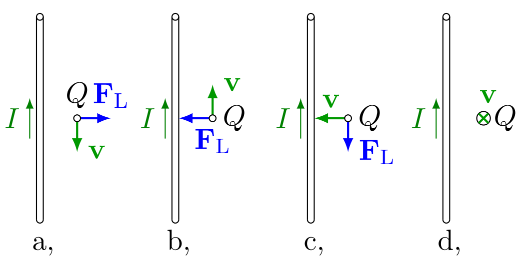
Bevezető fizika (vill), 9. feladatsor
Elektromágnesség

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- mágnes, pólusok
- mágneses indukcióvektor ($\mathbf{B}$, $[\mathbf{B}] = 1\,\mathrm{T}$)
- Lorentz-erő $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ vagy $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, jobbkézszabály
- forgatónyomaték $\mathbf{M} = I\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
- mágneses fluxus $\Phi_B = \int \mathbf{B} \mathrm{d}\mathbf{A}$
- tekercs/szolenoid tere bent $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$, ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ a vákuum permeabilitása (anyag jelenlétében μ_r)
- egyenes vezető tere $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$
- Ampère-féle gerjesztése törvény $\int \mathbf{B} \mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum I$
- indukció, Lenz-törvény $U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, tekercsre ...
- mágneses térerősség $\mathbf{H} \sim \frac{\mathbf{B}}{\mu}$

Órai feladatok:

IX/20.5. feladat:
Egyenes vezető mágneses terében pozitív, pontszerű töltés mozog. Határozzuk meg a töltésre ható erő (Lorentz-erő) irányát az ábrán látható négy esetben!



Először meg kell határoznunk, hogy az egyenes vezető körül milyen mágneses indukció alakul ki. Az egyenes vezető körül körkörös mágneses indukció jön létre, melynek irányát a jobbkézszabályt adja meg. Ha a jobb kezünk hüvelykujja mutat az áram irányába, akkor jobb kezünk többi ujja mutatja a kialakuló mágneses indukció irányát.

a) A töltés helyén a mágneses indukció befelé mutat, a sebesség lefelé, tehát a keresztszorzat alapján az erő jobbra.

b) A töltés helyén a mágneses indukció befelé mutat, a sebesség felfelé, tehát az erő balra.

c) A töltés helyén a mágneses indukció befelé mutat, a sebesség balra, tehát az erő lefelé.

d) A töltés helyén a mágneses indukció befelé mutat, a sebesség is befelé, így e két vektor párhuzamos, vagyis nem hat erő.

IX/20.9. feladat:
Mekkora forgatónyomaték hat a $A = 100\,\mathrm{cm}^2$ felületű vezetőkeretre, ha benne $I = 2\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik, és a $B = 2\,\mathrm{Vs/m}^2$ indukciójú homogén mágneses térben úgy helyezkedik el, hogy síkjának normálisa az indukcióvektorokkal $\alpha = 30°$-os szöget zár be?

A forgatónyomaték nagysága:

$$M = IBA \sin\alpha = 2\,\mathrm{A} \cdot 2\,\mathrm{T} \cdot 0{,}01\,\mathrm{m}^2 \cdot \sin 30° = 0{,}02\,\mathrm{Nm}.$$

IX/20.11. feladat:
Mekkora erővel hat a $B = 0{,}5\,\mathrm{Vs/m^2}$ indukciójú homogén mágneses tér az egyenes vezető $l = 1\,\mathrm{m}$ hosszú szakaszára, ha abban $I = 10\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik, és

a) a vezető merőleges az indukcióvonalakra;

b) a vezető párhuzamos az indukcióvektorral;

c) a vezető $\alpha = 30°$-os szöget zár be az indukció-vonalakkal?

a)

$$F = IlB\sin\alpha = 10\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{T}\cdot\sin 90° = 5\,\mathrm{N}$$

b)

$$F = IlB\sin\alpha = 10\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{T}\cdot\sin 0° = 0\,\mathrm{N}$$

c)

$$F = IlB\sin\alpha = 10\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{T}\cdot\sin 30° = 2{,}5\,\mathrm{N}$$

IX/20.17. feladat:
Egy kör alakú vezetőben I áram folyik. Változik-e a az áram által keltett mágneses tér, ha a vezető kört a síkjára merőleges tengely körül ω szögsebességgel forgatjuk?

Nem, a pozitív és negatív töltések ugyanúgy mozdulnak el, így az áram nem változik, és így $\mathbf{B}$ sem.

IX/20.19. feladat:
Toroid tekercs középkörének sugara $r = 10\,\mathrm{cm}$, a menetek száma $N = 1500$, a tekercsben folyó áramerősség $I = 1\,\mathrm{A}$ és a tekercs keresztmetszetének területe $A = 4\,\mathrm{cm}^2$. Mekkora a tekercs belsejében a mágneses indukció és az indukciófluxus, ha

a) a tekercs belsejét levegő tölti ki

b) a tekercs belsejét lágyvas tölti ki? ($\mu_r = 200$)

A gerjesztési törvény értelmében:

$$\int \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu\sum I,$$

és nézzünk egy olyan görbét, amely a toroid menetek közepén megy végig (középkör!). Ekkor a következőt kapjuk:

$$B 2\pi r = \mu N I$$

$$B = \frac{\mu N I}{2\pi r}$$

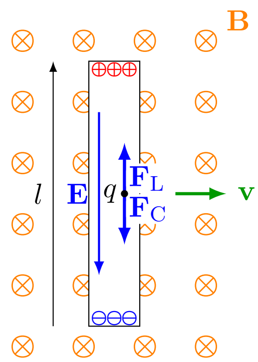
Ha csak levegő van benne:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 1500\cdot 1\,\mathrm{A}}{2\pi\cdot 0{,}1\,\mathrm{m}} = 0{,}003\,\mathrm{T}.$$
$$\Phi_B = BA = 0{,}003\,\mathrm{T}\cdot 0{,}0004\,\mathrm{m}^2 = 1{,}2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{Wb}\,.$$

Lágyvassal:

$$B = \frac{\mu_0\mu_r N I}{2\pi r} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 200\cdot 1500\cdot 1\,\mathrm{A}}{2\pi\cdot 0{,}1\,\mathrm{m}} = 0{,}6\,\mathrm{T}.$$
$$\Phi_B = BA = 0{,}6\,\mathrm{T}\cdot 0{,}0004\,\mathrm{m}^2 = 2{,}4\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}\,.$$

IX/20.20. feladat:
Homogén, $\mathbf{B}$ indukciójú mágneses térben az indukcióra merőleges, l hosszúságú vezetőszakasz mozog állandó, a hosszára és a mágneses indukcióra merőleges v sebességgel. Mekkora és milyen irányú elektromos térerősség lép fel a vezetőben? Mekkora a vezető két vége között a feszültség?



A vezető belsejében lévő töltések v sebességgel mozognak a sebességre merőleges B nagyságú mágneses térben, így azokra hat a Lorentz-erő. A pozitív és a negatív töltésekre az erő ellentétes irányba hat, így alakul ki a töltésszétválasztódás. Ez a szétválasztódás azonban nem lehet tetszőlegesen nagy, hiszen az azonos töltések taszítják egymást. Bizonyos mennyiségű töltés felhalmozódása után akkora térerősség jön létre a vezetőben, hogy az abban található töltésekre ható Coulomb-erő és a Lorentz-erő kiegyenlíti egymást, vagyis megszűnik a szétválasztódás.

Az állandósult állapotban:

$$0 = \mathbf{F}_\mathrm{C} + \mathbf{F}_\mathrm{L}$$
$$0 = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$
$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,.$$

Mivel a **B** indukció homogén, és a töltések sebessége is ugyanaz mindenhol (hiszen a vezetőt mozgatjuk), így a térerősség is homogén lesz a vezetőben. A feszültség a vezető két vége között, felhasználva, hogy **B** és **v** merőlegesek:

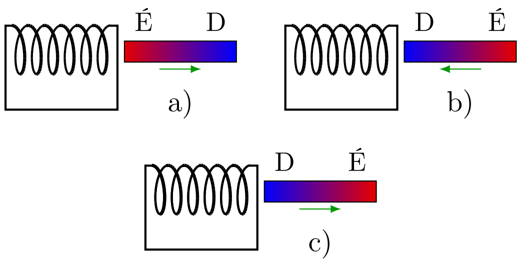
$$U = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} = vBl\ .$$

IX/20.22. feladat:
Milyen irányú áram indukálódik a tekercsben, ha a mágneses rúd

a) északi sarkát húzzuk ki a tekercsből;

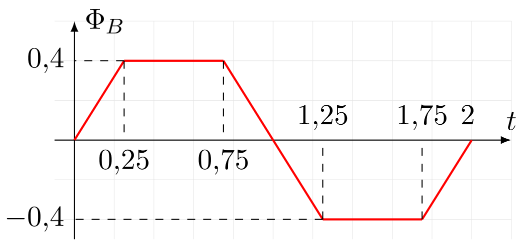
b) déli sarkát toljuk be a tekercsbe;

c) déli sarkát húzzuk ki a tekercsből?

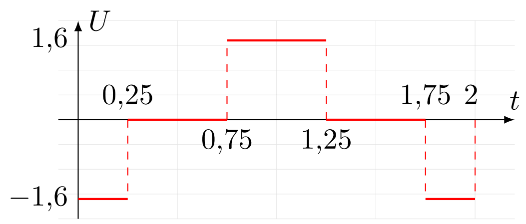


Ha a északi sarkot kihúzzuk, akkor Lenz-törvényének értelmében olyan áram fog indukálódni, amely a gyengülő fluxust próbálja ellensúlyozni. Még arra kell emlékeznünk, hogy az északi pólusból kifelé, a délibe befelé mennek a térerősség vonalak. Tehát az a) esetben az indukálódott térnek balra kell mutatnia, így az áramnak lent jobbra kell folynia. A b) esetben az erősödő jobbra irányított teret kell balra irányú térrel kompenzálni, amely ugyancsak lent jobbra folyó áramot jelent. Végezetül a c) eset az a) megfordítottja, tehát ott azzal ellentétesen folyik az áram, tehát az alsó ágban balra.

IX/20.23. feladat:
Változzék a fluxus egy vezetőkörben a diagramon látható módon. Ábrázoljuk az indukált feszültséget az idő függvényében!



Az indukció törvény értelmében az indukálódott feszültség, a fluxusváltozás függvény meredekségének mínusz egyszerese:



IX/20.25. feladat:
Mekkora az önindukciós együtthatója annak a tekercsnek, amelyben $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$ alatt egyenletesen bekövetkezett $I = 0{,}5\,\mathrm{A}$ áramerősség-változás $U = 0{,}12\,\mathrm{V}$ önindukciós feszültséget hoz létre?

Tekercsre az indukciós feszültség:

$$U = L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

amelyből az öninduktivitás:

$$L = U\frac{\Delta t}{\Delta I} = 0{,}12\,\mathrm{V}\frac{0{,}5\,\mathrm{s}}{0{,}5\,\mathrm{A}} = 0{,}12\,\mathrm{H}.$$

IX/20.44. feladat:
Az ábrán egy forgótekercses árammérő vázlatos rajza látható. Az állandó mágnes sarkainál elhelyezett saruk és a tekercs hengeres lágyvasmagja közötti légrésben előállított mágneses tér B indukciója állandó nagyságú és sugárirányú. Ha a tekercsben áram folyik, a mágneses tér forgatónyomatékot fejt ki a tekercsre, melynek hatására az elfordul addig, amíg a forgástengelyhez rögzített csavarrugó visszatérítő forgatónyomatéka az áram okozta nyomatékot kiegyensúlyozza. Mekkora a műszerrel mérhető áram legnagyobb értéke, ha a mutató teljes kitérése esetén a csavarrugó $M = 3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Nm}$ forgatónyomatékot fejt ki? (Az $N = 300$ menetű tekercs $a = 2\,\mathrm{cm}$ oldalú négyzet, és a mágneses tér indukciója a légrésben $B = 0{,}25\,\mathrm{T}$.)

A mágnese indukció és a forgatónyomaték közötti kapcsolat:

$$M = IBA\sin\alpha,$$

amelyből kifejezhető I, amely $\alpha = 90°$ esetben maximális:

$$I = \frac{M}{BA\sin\alpha} = \frac{3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Nm}}{0{,}25\,\mathrm{T} \cdot (0{,}02\,\mathrm{m})^2 \cdot 1}$$
$$= 0{,}001\,\mathrm{A}.$$

IX/?. feladat:
Két egymásba tolt tekercs mindegyikének hossza $l = 20\,\mathrm{cm}$. A tekercsek keresztmetszetének területe közel egyenlő, $A = 8\,\mathrm{cm}^2$. A belső tekercs menetszáma $N_1 = 300$, a külsőé $N_2 = 200$. A belső tekercsben bekapcsolás után $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$ alatt egyenletesen növeljük az áramot nulláról $I = 5\,\mathrm{A}$-ra.
a. Mekkora feszültség indukálódik a külső tekercsben?
b. Mekkora a kölcsönös indukciós együttható?

A belső (1) tekercs mágneses indukciója, és fluxusa:

$$B_1 = \frac{N_1 I \mu_0}{l} \qquad \Phi_{B_1} = B_1 A = \frac{N_1 I \mu_0 A}{l}$$

Az indukálódott feszültség:

$$U_2 = -N_2 \frac{\Delta(\Phi_B)}{\Delta t} = -N_2 \frac{\Phi_{B_1} - 0}{\Delta t} = -N_2 \frac{N_1 I \mu_0 A}{l \Delta t}$$
$$= -200 \frac{300 \cdot 5\,\mathrm{A} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 0{,}0008\,\mathrm{m}^2}{0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 0{,}1\,\mathrm{a}}$$
$$= 15\,\mathrm{mV}.$$

A kölcsönös indukciós együttható definíció szerint:

$$U = -M \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Most $\Delta I = I$, így kifejezhető a nekünk kellő rész a fenti számolás végéből:

$$M = \frac{N_1 N_2 \mu_0 A}{l} = \frac{300 \cdot 200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} 0{,}0008\,\mathrm{m}^2}{0{,}2\,\mathrm{m}}$$
$$= 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{H}.$$

Otthoni gyakorlásra:

IX/20.18. feladat:
Egy 6 cm hosszú, 300 menetű tekercsben 1 A erősségű áram folyik. Mekkora a mágneses térerősség és az indukció a tekercs belsejében?

IX/20.27. feladat:
A 0,1 m oldalhosszúságú, négyzet alakú vezetőhurok normálisa 30° -os szöget zár be az $1{,}5\,\mathrm{Vs/m^2}$ indukciójú mágneses tér indukcióvektorával. A hurokra ható forgatónyomaték 0,05 Nm. Mekkora a hurokban folyó áramerősség?

IX/20.38. feladat:
Egy áramkör 10 cm hosszú egyenes vezetőből álló része $0{,}5\,\mathrm{Vs/m^2}$ indukciójú homogén mágneses térben van úgy, hogy az áram iránya 30°-os szöget zár be a tér irányával. Mekkora erővel hat a mágneses tér erre az egyenes vezetőre, ha benne 10 A erősségű áram folyik?

IX/20.41. feladat:
Egy 20 cm hosszú, 1,5 cm átmérőjű, 300 menetes tekercsben 5 A erősségű áram folyik. Az áramkört hirtelen megszakítva az áram 0,01 s alatt nullára csökken. Mekkora feszültség indukálódik a tekercsben, ha az áram csökkenését egyenletesnek tekintjük?

IX/20.42. feladat:
Egy 500 menetű, $80\,\mathrm{cm}^2$ keresztmetszetű vezetőhurok percenként 300 fordulatot tesz a forgástengelyre merőleges $10^5/2\pi\,\mathrm{A/m}$ erősségű homogén mágneses erőtérben. Számítsuk ki a tekercsben indukált feszültséget, amikor a tekercs síkja
a. 0°;
b. 30°;
c. 60°;
d. 90°-os szöget zár be a térerősséggel!

IX/20.45. feladat:
Az ábra szerinti elrendezésben a homogén mágneses mezőben felfüggesztett vezetőben $I = 2\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik. A CD egyenes vezető súlya $G = 0{,}1\,\mathrm{N}$ és a mágneses mezőbe merülő része $l = 20\,\mathrm{cm}$ hosszú.
Hány fokkal lendülnek ki a függőlegestől az A és B pontokban rögzített felfüggesztőhuzalok, ha a mágneses tér indukciója $B = 0{,}25\,\mathrm{Vs/m^2}$?

IX/?. feladat:
Hosszú egyenes vezetőben I erősségű áram folyik. Az egyenes vezetőt rá merőleges síkban, szimmetrikusan egy N menetszámú R középkörsugarú toroid veszi körül. Mekkora a toroidban az áram, ha középköre mentén a mágneses térerősség zérus? ($I = 10\,\mathrm{A}$; $N = 100$)

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (vill), 10. feladatsor
Váltakozó áram

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

Változó áram, ha a U és I időben változik és *váltakozó*, ha valamilyen periódusra az időátlaguk 0, például:

$$U = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t) \qquad I = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi)$$

Teljesítmény/munka egyenérték alapján definiálható effektív érték. Például a fenti szinuszos áramra:

$$U_{\mathrm{eff}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \qquad I_{\mathrm{eff}} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}.$$

Ohm törvény igaz, de most új tagok is vannak:

R	ohmikus ellenállás,
$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$	kapacitív reaktancia,
$X_L = \omega L$	induktív reaktancia.

Impedancia

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Az áram és feszültség közötti fázis az ábra!!!! alapján:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad \text{teljesítménytényező,}$$

mert a teljesítmény:

$$P = U_{\mathrm{eff}} U_{\mathrm{eff}} \cos\varphi.$$

Transzformátor: két tekercs (N_1 és N_2 menet), kapcsolat a kölcsönös indukció, következmény:

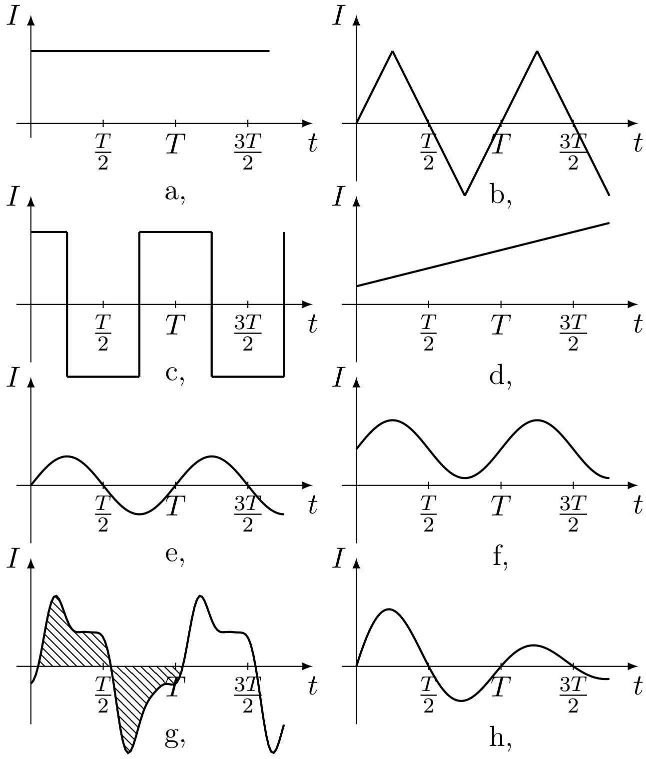
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Általában feltesszük, hogy veszteségmentes, azaz a teljesítmény a két oldalon ugyanaz, vagyis igaz, hogy:

$$U_1 I_1 = U_2 I_2.$$

Órai feladatok:

X/21.1. feladat:
A túloldali ábrán látható diagramok közül melyik ábrázol váltakozó áramot?



a, Nem, mert időben állandó.

b, Igen, időben változik, átlaga 0 T periódusra.

c, Igen, időben változik, átlaga 0 T periódusra.

d, Nem, mert időátlaga nem 0.

e, Igen, időben változik, átlaga 0 T periódusra.

f, Nem, mert időátlaga nem 0.

g, Igen, időben változik, átlaga 0 T periódusra.

h, Nem, mert időátlaga nem 0.

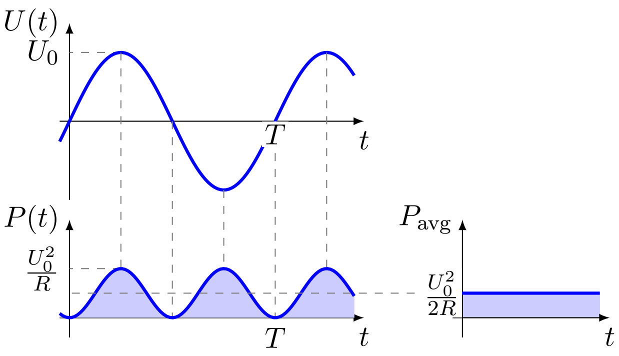
X/21.4. feladat:
Írjuk le, hogyan változik a dugaszoló aljzat (a „konnektor”) feszültsége a 230 V-os (effektív érték) váltakozó feszültségű hálózatban. Mekkora a feszültség egy periódusának időtartama?

A konnektorban $f = 50\,\mathrm{Hz}$-es frekvenciájú, $U_{\mathrm{eff}} = 230\,\mathrm{V}$ effektív értékű szinuszos feszültség van. Ennek a jelnek a periódusideje: $T = \frac{1}{f} = 0{,}02\,\mathrm{s}$[1].

A jel amplitúdójának számolásához ismernünk kell az effektív érték fogalmát. Ehhez meg kell vizsgálnunk azt, hogy mekkora teljesítményt ad le egy szinuszosan változó áramú forrás egy R ellenálláson. Legyen a feszültség amplitúdója U_0, vagyis $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$. A leadott teljesítmény:

$$P(t) = I(t) \cdot U(t) = \frac{U^2(t)}{R} = \frac{U_0^2}{R} \sin^2(\omega t)\,.$$

Láthatjuk, hogy az ellenálláson eső teljesítmény időről időre változik. Mivel ezeknek a váltakozó áramoknak gyors a jele, így ennek a teljesítménynek az átlagát látjuk.



Le lehet vezetni, hogy a $\sin^2(\omega t)$ átlaga egy periódusra $1/2$, vagyis egy U_0 amplitúdójú váltakozó áramú jel teljesítménye megfelel egy $U_0/\sqrt{2}$ állandó feszültségű jel teljesítményének.

A váltakozó feszültségét effektív értékén azt az állandó feszültségértéket értjük, melynek teljesítménye megegyezik a váltakozó jel effektív teljesítményével. Tehát a $230\,\mathrm{V}$ effektív értékű jel amplitúdója $U_0 = 230\,\mathrm{V} \cdot \sqrt{2} = 325{,}3\,\mathrm{V}$.

X/21.6. feladat:
Változhat-e a váltóáramú ellenállása egy
a. adott önindukciós együtthatójú tekercsnek,
b. adott kapacitású kondenzátornak?

Adott tekercs rögzített L-et jelent. A reaktancia értéke:

$$X_L = L\omega = L 2\pi f,$$

amely változhat, ha különböző frekvenciájú áramkörbe helyezzük be.

[1]Megjegyzés: A váltakozó feszültségű jeleknél meg szokás különböztetni a jel *frekvenciáját* és a jel *körfrekvenciáját*. A frekvencia a periódusidő reciproka $\left(f = \frac{1}{T}\right)$, míg a körfrekvencia a megszokott $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$ képlettel számítható.

Hasonlóan egy adott kondenzátor rögzített C, de mivel:

$$X_L = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C 2\pi f},$$

is frekvenciafüggő a kapacitív reaktancia is áramkörfüggő mennyiség.

X/21.7. feladat:
$U_{\mathrm{eff}} = 230\,\mathrm{V}$-os (effektív érték) hálózatról táplált berendezésen átfolyó áram erőssége $I_{\mathrm{eff}} = 2\,\mathrm{A}$; a felvett teljesítmény $P = 300\,\mathrm{W}$.
a. Mekkora az áram és feszültség fáziskülönbsége?
b. Mekkora a berendezés váltóáramú ellenállása (impedanciája)?
c. Mekkora a berendezés ohmikus ellenállása?

A teljesítményre vonatkozó összefüggésből a teljesítménytényező:

$$\cos\varphi = \frac{P}{U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}}} = \frac{300\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V} \cdot 2\,\mathrm{A}} = 0{,}65,$$

a fázisszög $\varphi = 49{,}23°$.

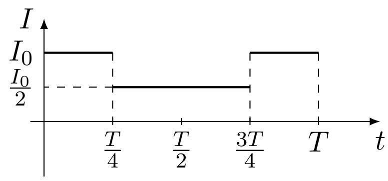
Az impedancia:

$$Z = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{2\,\mathrm{A}} = 115\,\Omega.$$

Az ohmikus ellenállás:

$$R = Z\cos\varphi = 115\,\Omega \cdot 0{,}65 = 75\,\Omega.$$

X/21.9. feladat:
R ellenálláson átfolyó áram erőssége az ábrán látható módon periodikusan változik. Határozzuk meg az áram effektív értékét!



Egy R ellenállásra a munkavégzés egy periódusra:

$$W = I_0^2 R \frac{T}{4} + \left(\frac{I_0}{2}\right)^2 R \frac{T}{2} + I_0^2 R \frac{T}{4} = \frac{5}{8} I_0^2 R T,$$

míg egy egyenáram munkavégzése:

$$W_{\mathrm{e}} = I_{\mathrm{eff}}^2 R T.$$

A kettő összevetéséből:

$$I_{\mathrm{eff}}^2 = \frac{5}{8} I_0$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{5}{8}} I_0 .$$

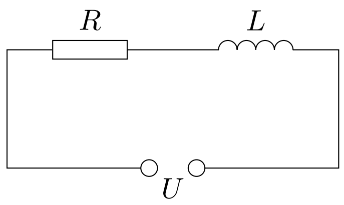
X/21.14. feladat:
Sorosan kapcsoltunk egy elhanyagolható ohmikus ellenállású, $L = 0{,}5\,\text{H}$ önindukciójú tekercset $R = 50\,\Omega$-os ohmikus ellenállással, majd rákapcsoljuk a $U_{\text{eff}} = 230\,\text{V}$-os (effektív érték) ($f = 50\,\text{Hz}$-es) váltakozó feszültségű hálózatra.

a) Mekkora a kör ellenállása (impedanciája)?

b) Mekkora áram folyik a körben?

c) Mekkora az ohmikus ellenállásra, illetve a tekercsre jutó feszültség?

d) Mekkora az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség?



a) A kör impedanciája:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$
$$= \sqrt{(50\,\Omega)^2 + (2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 0{,}5\,\Omega\text{s})^2} = 164{,}8\,\Omega .$$

b) Az áramkörben folyó áram effektív értéke:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{230\,\text{V}}{164{,}8\,\Omega} = 1{,}4\,\text{A} .$$

c) Az ellenállásra és a tekercsre jutó feszültség:

$$U_R = I_{\text{eff}} R = 1{,}4\,\text{A} \cdot 50\,\Omega = 69{,}8\,\text{V} ,$$
$$U_L = I_{\text{eff}} X_L = 1{,}4\,\text{A} \cdot 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 0{,}5\,\Omega\text{s} = 219{,}2\,\text{V} .$$

d) A fáziskülönbség:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L}{R} = \operatorname{arctg} \frac{2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 0{,}5\,\Omega\text{s}}{50\,\Omega} = 72{,}3^\circ .$$

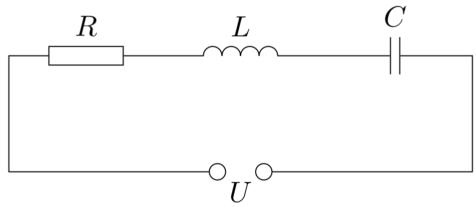
X/21.18. feladat:
$U_{\text{eff}} = 110\,\text{V}$ (effektív érték) feszültségű, $f = 50\,\text{Hz}$ frekvenciájú hálózatra sorba kapcsolunk egy $R = 50\,\Omega$-os ohmikus ellenállást, egy $C = 100\,\mu\text{F}$-os kondenzátort és egy $L = 0{,}5\,\text{H}$ önindukciójú, elhanyagolható ohmikus ellenállású tekercset.

a) Mekkora ez eredő ellenállás?

b) Mekkora a körben folyó áram effektív értéke?

c) Mekkora az egyes elemekre jutó feszültség effektív értéke?

d) Mekkora az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség?



a) A kör impedanciája:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\Omega\text{s}}} = 31{,}83\,\Omega ,$$
$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 0{,}5\,\Omega\text{s} = 157{,}1\,\Omega ,$$
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$= \sqrt{(50\,\Omega)^2 + (157{,}1\,\Omega - 31{,}83\,\Omega)^2}$$
$$= 134{,}86\,\Omega .$$

b) Az áramkörben folyó áram effektív értéke:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{110\,\text{V}}{134{,}86\,\Omega} = 0{,}82\,\text{A} .$$

c) Az egyes elemekre jutó feszültség:

$$U_R = I_{\text{eff}} R = 0{,}82\,\text{A} \cdot 50\,\Omega = 40{,}8\,\text{V} ,$$
$$U_C = I_{\text{eff}} X_C = 0{,}82\,\text{A} \cdot 31{,}83\,\Omega = 26{,}0\,\text{V} ,$$
$$U_L = I_{\text{eff}} X_L = 0{,}82\,\text{A} \cdot 157{,}1\,\Omega = 128{,}1\,\text{V} .$$

d) A fáziskülönbség:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}$$
$$= \operatorname{arctg} \frac{157{,}1\,\Omega - 31{,}83\,\Omega}{50\,\Omega} = 68{,}2^\circ .$$

X/21.22. feladat:
Veszteség nélküli transzformátor primer tekercsén $N_1 = 600$, szekunder tekercsén $N_2 = 1000$ menet van. A primer tekercset $U_1 = 230\,\mathrm{V}$-ra kötjük. Mekkora ellenállással terheltük a szekunder kört, ha a primer tekercsen $I_1 = 25\,\mathrm{mA}$ erősségű áram folyik?

A szekunder kör feszültsége:

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 = \frac{1000}{600} \cdot 230\,\mathrm{V} = 383{,}\dot{3}\,\mathrm{V}.$$

A szekunder kör árama:

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1 = \frac{600}{1000} \cdot 25\,\mathrm{mA} = 15\,\mathrm{mA}.$$

Az ellenállás:

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} \left(= \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \cdot \frac{U_1}{I_1} \right) = \frac{383{,}\dot{3}\,\mathrm{V}}{0{,}015\,\mathrm{A}} = 25560\,\Omega.$$

X/21.46. feladat:
Sorba kapcsolt veszteséges tekercset és veszteségmentes változtatható kapacitású kondenzátort $U_{\mathrm{eff}} = 230\,\mathrm{V}$ feszültségű (effektív érték), $f = 50\,\mathrm{Hz}$ frekvenciájú hálózatról táplálunk. A kondenzátor kapacitását változtatva a felvett legnagyobb áramerősség $I_C^{\max} = 150\,\mathrm{mA}$. Ekkor a tekercs kapcsain $U_L = 350\,\mathrm{V}$ (effektív érték) feszültséget mérhetünk. Mekkora a tekercs ellenállása és önindukciós együtthatója?

A veszteséget egy R ellenállás behelyezésével tudjuk figyelembe venni. A teljes impedancia így:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

amely akkor adja a maximális $I_{\mathrm{eff}} = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{Z}$ áramot, ha Z minimális, azaz $X_L = X_C$. Ilyenkor $Z = R$, tehát

$$R = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_C^{\max}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}} = 1533\,\Omega.$$

A tekercsre igaz, hogy:

$$Z_L = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$
$$\frac{U_L}{I_{\mathrm{eff}}} = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2},$$

amelyből:

$$L = \sqrt{\frac{\left(\frac{U_L}{I_{\mathrm{eff}}}\right)^2 - R^2}{(2\pi f)^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{350\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}}\right)^2 - (1533\,\Omega)^2}{(2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz})^2}}$$

$$= 5{,}6\,\mathrm{H}$$

X/C.6. feladat:
230 V kapocsfeszültségű hálózatra sorosan kapcsolunk egy ohmikus ellenállást, egy indukciós tekercset és egy kondenzátort. Ha a periódusszám 50 Hz, feszültség rezonanciát észlelünk. A körben ekkor 20 A áram folyik. Ha viszont a periódus 100 Hz, akkor az áram 11 A-re csökken. Mekkora az ohmikus ellenállás, a tekercs induktivitása, és a kondenzátor kapacitása?

Otthoni gyakorlásra:

X/21.23. feladat:
Szinuszosan váltakozó feszültség periódusideje 0,02 s; csúcsértéke 500 V.
a. Mekkora a frekvencia?
b. Mekkora a körfrekvencia?
c. Mekkora a pillanatnyi feszültség értéke 0,001 s-mal azután, hogy 0 volt?
d. Mekkora a pillanatnyi feszültség értéke 0,001 s-mal a csúcsérték felvétele után?

X/21.25. feladat:
Határozzuk meg az ábrán látható váltakozó feszültség effektív értékét!

X/21.26. feladat:
Az ábra szerint változó árammal mennyi idő alatt lehet feltölteni egy 8 amperóra töltési kapacitású akkumulátort?

X/21.31. feladat:
Valamely tekercs egyenáramú ellenállása 25 Ω. 230 V hálózati feszültség (50 Hz) esetén az átfolyó áram 8 A. Mekkora a tekercs önindukciós együtthatója?

X/21.33. feladat:
Egy soros RC körben 230 V-os, 50 Hz frekvenciájú váltakozó feszültség hatására 5 A az effektív áramerősség. A hatásos teljesítmény 500 W. Mekkora R és C értéke?

X/21.36. feladat:
230 V-os hálózati váltakozó feszültségre sorba kapcsolunk egy ohmos ellenállást, melynek nagysága 50 Ω, és egy kondenzátort, melynek ellenállása 50 Hz frekvenciánál 100 Ω.
a. Mekkora a kondenzátor kapacitása?
b. Mekkora a feszültség az egyes elemeken?
c. Mekkora a feszültség és az áram közötti fáziskülönbség?

X/21.15. feladat:
Hogyan mérhetjük meg feszültség- és árammérő műszerek segítségével egy kondenzátor kapacitását?

X/21.37. feladat:
Transzformátor primer körét 120 V hálózati feszültségre kapcsoljuk. Az 1000 menetű terheletlen szekunder tekercs sarkain 600 V a feszültség. Hány menetből áll a primer tekercs?

X/21.52. feladat:
Egy transzformátornak, amely a váltakozó feszültséget 100 V-ról 3300 V-ra növeli, gyűrű alakú zárt vasmagja van. A gyűrűt egy vezeték veszi körül, amelynek végei feszültségmérőhöz kapcsolódnak. A műszer 0,5 V-ot mutat. Hány menete van a transzformátor primer és szekunder tekercsének?

X/E.6. feladat:
Egy 50 ohmos ellenállást egy ismeretlen önindukciójú tekerccsel sorba kötve és a 230 V, 50 Hz periódusú hálózatra kapcsolva 2 A áramot mérünk. Ha még egy kondenzátort is sorba iktatunk, az áramerősség akkor is 2 A marad.
a. Mekkora a tekercs önindukciója és a kondenzátor kapacitása?
b. Mekkora teljesítményt vesz fel az áramkör kondenzátor nélkül, illetőleg kondenzátorral?

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.