

Bevezető fizika (Vill), 8. feladatsor

Egyenáram, egyenáramú áramkörök 2.

2014. november 11., 13:17

A mai órához szükséges **elméleti anyag:**

Kirchhoff törvényei:

Minden csomópontban a befolyó és kifolyó áramok

előjeles összege zérus: $\sum_{\text{be}} I = \sum_{\text{ki}} I$

Minden hurokra $\sum U + \sum I_i R_i = 0$ (lásd 19.16. példa)

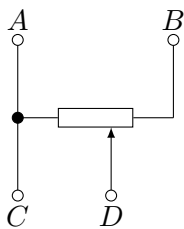
Kapocsfeszültség (ami a fogyasztóhoz kijut), elektromotoros erő (minden ami az feszültségforrásban van), belső ellenállás (feszültségforrás ellenállása)

$$U_k = \varepsilon - IR_b$$

Órai feladatok:

19.3. feladat: A zérus ohmtól 100Ω -ig változtatható ellenállású feszültségosztó A és B pontjai között 100 V a feszültség.

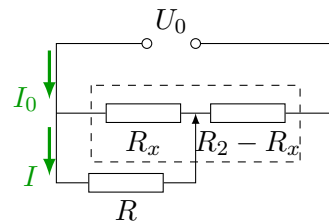
- Milyen határok között változtathatjuk a feszültséget a C és D pontok között?
- Mekkora a C és D pontok közötti feszültség, ha a csúszka az ellenállás közepén áll? (A potenciométer egyenletes keresztmetszetű huzalból készült.)



- A C pont a potenciál szempontjából megfelel az A -nak hiszen a vezeték ideális. A D -n pedig akkora a potenciál A -hoz képest, amekkora aránya az ellenállásnak van azon az oldalon. Az ellenállás 0 -tól 100Ω -ig változik, és összesen 100 V , feszültség osztódik el. Ez ohmonként 1 V , összességében C és D között 0 és 100 V között tetszőleges érték beállítható.
- Ha a csúszka közepén áll, akkor 50Ω van jobbra, így az előző gondolatmenet alapján $50 \Omega \cdot 1 \text{ V}/\Omega = 50 \text{ V}$ feszültséget mérhetünk.

19.8. feladat: A $U_0 = 200 \text{ V}$ -os feszültségforrásról potenciométer (feszültségosztó) alkalmazásával $U = 50 \text{ V}$ -os és $P = 100 \text{ W}$ -os teljesítményű fogyasztót akarunk üzemeltetni. Rendelkezésünkre áll egy $R_1 = 1000$ ohmos $I_1^{\text{max}} = 1 \text{ A}$ -rel terhelhető és egy $R_2 = 100$ ohmos, $I_2^{\text{max}} = 5 \text{ A}$ maximális terhelésű tolóellenállás. Melyiket használjuk, és hova állítsuk be a csúszkát?

A fogyasztónak szükséges áram: $I = \frac{P}{U} = \frac{100 \text{ W}}{50 \text{ V}} = 2 \text{ A}$, amely alapján az első tolóellenállás nem lehet, csak a második. A kapcsolási rajz:



A párhuzamos kapcsolás miatt R_x -re akkora feszültség jut, mint a fogyasztóra, míg $R_2 - R_x$ -re a maradék:

$$(I_0 - I)R_x = U$$

$$I_0(R_2 - R_x) = U_0 - U.$$

A főágban folyó áram így $I_0 = \frac{U_0 - U}{R_2 - R_x}$, amely beírható az első egyenletbe:

$$U = \left(\frac{U_0 - U}{R_2 - R_x} - I \right) R_x$$

$$U(R_2 - R_x) = (U_0 - U)R_x - IR_x(R_2 - R_x)$$

$$0 = IR_x^2 + R_x(U_0 - IR_2) - UR_2$$

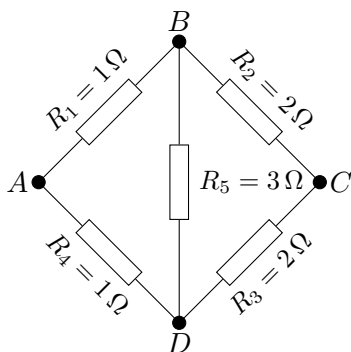
Íjuk be a megoldóképletbe:

$$\begin{aligned} R_{x1,2} &= \frac{(IR_2 - U_0) \pm \sqrt{(U_0 - IR_2)^2 + 4IUR_2}}{2UI} \\ &= \frac{(2 \text{ A} \cdot 100 \Omega - 200 \text{ V})}{2 \cdot 2 \text{ A}} \pm \\ &= \frac{\sqrt{(200 \text{ V} - 2 \text{ A} \cdot 100 \Omega)^2 + 4 \cdot 2 \text{ A} \cdot 50 \text{ V} \cdot 100 \Omega}}{2 \cdot 2 \text{ A}} \end{aligned}$$

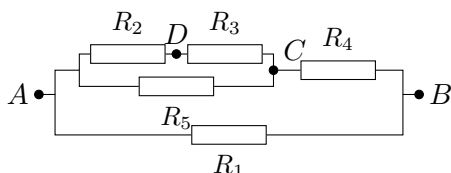
$$= \pm 50 \Omega,$$

azaz a csúszkát középre kell állítani.

19.10. feladat: Mekkora az eredő ellenállás az ábrán látható kapcsolás $A-B$, $B-C$, $C-D$, $D-A$ és $A-C$ pontjai között?



$A-B$: Az áramkört átrajzolhatjuk:



Melynek ellenállását azonnal számolhatjuk:

$$R_{23} = R_2 + R_3$$

$$R_{235} = \frac{1}{\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_5}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2+R_3} + \frac{1}{R_5}} = \frac{(R_2 + R_3) \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5}$$

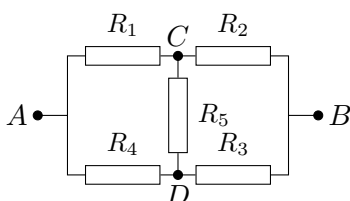
$$R_{2345} = R_{235} + R_4$$

$$= \frac{(R_2 + R_3) \cdot (R_4 + R_5) + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5}$$

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_{2345}} + \frac{1}{R_1}} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3 + R_5)}{(R_2 + R_3) \cdot (R_1 + R_4 + R_5) + (R_1 + R_4) \cdot R_5}$$

$B-C$: Az $A-B$ esethez teljesen hasonlóan lehet megoldani, úgy mint a $C-D$ és a $D-A$ eseteket is.

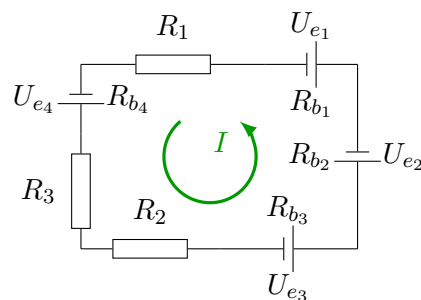
$A-C$: A kapcsolás átrajzolásával itt egy kicsit más kapcsolást kapunk:



Itt, mivel az R_1 és az R_2 aránya ugyanakkora, mint az R_4 és az R_3 aránya, így ugyanakkora feszültség fog esni az R_1 és az R_4 ellenállásokon, vagyis a C és a D pont között nem lesz soha feszültség. Ennek következménye, hogy az R_5 -ös ellenálláson nem folyik áram, vagyis annak ellenállását az eredő ellenállás számításakor nem kell figyelembe venni. A többi járuléka:

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

19.16. feladat: Mekkora az áramerősség az ábra szerint összekapcsolt áramkörben? ($R_1 = 20 \Omega$; $R_2 = 40 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$; $U_1 = U_2 = 10 \text{ V}$; $U_3 = 6 \text{ V}$; $U_4 = 20 \text{ V}$; $R_{b,1} = 0,2 \Omega$; $R_{b,2} = R_{b,3} = 0,1 \Omega$; $R_{b,4} = 0,01 \Omega$.)



Az áramkörben folyó áram kiszámításához felhasználjuk Kirchhoff II. törvényét. Ez azt mondja ki, hogy egy áramhurok mentén a feszültségek előjeles összege nullát kell adnia.

Vegyünk fel az áram irányát úgy, ahogy az ábrán szerepel. Ennek az irányában fogjuk körbejárni az áramhurokot. Ebben az esetben az ellenállásokon eső feszültség $U = IR$. A telepek feszültségét pedig a következő előjelekkel kell figyelembe venni. Ha a telepen úgy haladunk át, hogy a feszültség csökken, vagyis a pozitív kivezetéséről lépünk át a negatív kivezetésére, akkor annak a feszültségét pozitív előjellel kell figyelembe venni. Ezzel szemben, ha fordítva haladunk át egy telepen, vagyis úgy, hogy alacsonyabb feszültségű helyről lépünk magasabb feszültségűre, akkor annak a feszültségét negatív előjellel kell venni.

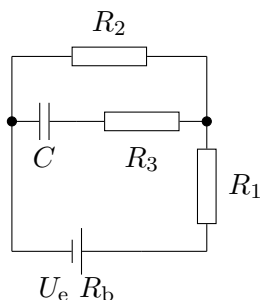
Ebben a konkrét esetben, ha a jobb alsó sarokban kezdjük a körbejárást:

$$0 = U_2 + IR_{b,2} + U_1 + IR_{b,1} + IR_1 - U_4 + IR_{b,4} + IR_3 + IR_2 - U_3 + IR_{b,3}$$

$$I = \frac{U_3 + U_4 - U_1 - U_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{b,1} + R_{b,2} + R_{b,3} + R_{b,4}}$$

$$I = \frac{6 \text{ V} + 20 \text{ V} - 10 \text{ V} - 10 \text{ V}}{20 \Omega + 40 \Omega + 10 \Omega + 0,2 \Omega + 2 \cdot 0,1 \Omega + 0,01 \Omega} = 0,085 \text{ A} .$$

19.18. feladat: Mekkora feszültségre töltődik fel az ábrán látható kapcsolásban a kondenzátor? ($U_e = 3,6 \text{ V}$; $R_b = 10 \Omega$; $R_1 = 40 \Omega$; $R_2 = 70 \Omega$; $R_3 = 30 \Omega$.)



A kondenzátor feltöltődése után azon már nem folyik áram, vagyis akkor az R_3 -as ellenállás is kiesik az áramkörből. Ekkor csak az R_1 , az R_2 és a telep belső ellenállása marad a körben, mind sorba kapcsolva, vagyis az eredő ellenállás

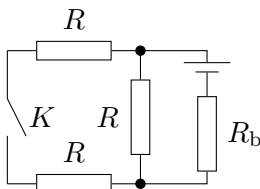
$$R_e = R_1 + R_2 + R_b = 40 \Omega + 70 \Omega + 10 \Omega = 120 \Omega ,$$

és a körben folyó áram

$$I = \frac{U_e}{R_e} = \frac{3,6 \text{ V}}{120 \Omega} = 0,03 \text{ A} .$$

Ekkor az R_2 -n eső feszültség $U_2 = R_2 I_2 = 2,1 \text{ V}$. Mivel a kondenzátor és az R_3 -as ellenállás ezzel párhuzamosan van kötve, így azokon is ekkora feszültség esik. Azonban az R_3 -as ellenálláson nem folyik áram, így azon nem eshet feszültség, tehát a $2,1 \text{ V}$ -nak mind a kondenzátoron kell esnie.

19.28. feladat: Az ábra szerinti kapcsolásban a K kapcsoló nyitott állásánál $I_{ny} = 0,1 \text{ A}$, zárt kapcsolóállás esetén pedig $I_z = 0,133 \text{ A}$ erősségű áram folyik az elemet tartalmazó ágban. Mekkora az elem elektromotoros ereje és belső ellenállása? ($R = 18 \Omega$.)



Ha a kapcsoló nyitott, akkor az áramkörben egy R és a belső ellenállás van sorba kapcsolva. Ekkor

$$I_{ny} = \frac{U}{R + R_b} .$$

Bekapcsolt kapcsolóállás esetén a belső ellenállással egy két ágból álló párhuzamos kör van sorba kapcsolva. A párhuzamos rész ellenállása:

$$R_{||} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R}} = \frac{2}{3} R ,$$

mellyel az eredő ellenállás, és az áram

$$R_e = R_{||} + R_b = \frac{2}{3} R + R_b .$$

$$I_z = \frac{U}{R_e} = \frac{U}{\frac{2}{3} R + R_b} .$$

A két egyenletből meg lehet határozni a keresett két mennyiséget. Behelyettesítve:

$$0,1 \text{ A} = \frac{U}{18 \Omega + R_b}$$

$$0,133 \text{ A} = \frac{U}{12 \Omega + R_b} ,$$

majd átrendezve

$$U = 1,8 \text{ V} + 0,1 \text{ A} \cdot R_b$$

$$U = 1,6 \text{ V} + 0,133 \text{ A} \cdot R_b ,$$

ahonnan

$$1,8 \text{ V} + 0,1 \text{ A} \cdot R_b = 1,6 \text{ V} + 0,133 \text{ A} \cdot R_b$$

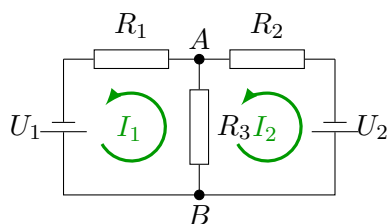
$$0,2 \text{ V} = 0,033 \text{ A} \cdot R_b$$

$$R_b = 6 \Omega ,$$

melyet visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$U = 1,8 \text{ V} + 0,1 \text{ A} \cdot 6 \Omega = 2,4 \text{ V} .$$

19.45. feladat: Az ábrán látható hálózatban az ellenállások értéke $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$ és $R_3 = 100 \Omega$. A telepek elektromotoros ereje $U_1 = 1,5 \text{ V}$; $U_2 = 1 \text{ V}$, és belső ellenállásuk elhanyagolható. Határozzuk meg az AB ágban folyó áram erősségét!



Írjuk fel a huroktörvényt a jobb és bal oldalra is:

$$R_1 I_1 - U_1 + (I_1 - I_2) R_3 = 0$$

$$U_2 + R_2 I_2 + (I_2 - I_1) R_3 = 0$$

majd rendezzük az áramokra:

$$I_1(R_1 + R_3) - I_2 R_3 - U_1 = 0$$

$$I_1(-R_3) + I_2(R_2 + R_3) + U_2 = 0.$$

Az elsőből $I_1 = \frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3}$, amely beírható a másodikba, amelyet így csak rendezni kell:

$$0 = -\frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3} R_3 + I_2(R_2 + R_3) + U_2$$

∴

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{U_1 R_3 - U_2(R_1 + R_3)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2} \\ &= \frac{1,5 \text{ V} \cdot 100 \Omega - 1 \text{ V} \cdot (50 \Omega + 100 \Omega)}{(50 \Omega + 100 \Omega)(80 \Omega + 100 \Omega) - (100 \Omega)^2} \\ &= 0 \text{ A}. \end{aligned}$$

Ha visszahelyettesítjük:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{1,5 \text{ V} + 0 \text{ A} \cdot 100 \Omega}{50 \Omega + 100 \Omega} \\ &= 0,01 \text{ A}. \end{aligned}$$

Az AB szakaszon folyó áram:

$$I_{AB} = I_2 - I_1 = -0,01 \text{ A}.$$

K3. feladat: Izzólámpát és egy réz-szulfát-oldattal töltött elektrolizáló edényt sorosan kapcsolunk a feszültségforrásra. A lámpa izzószálán $U = 200 \text{ V}$ a feszültség. A berendezés üzemeltetési ideje alatt az izzólámpa $W = 0,016 \text{ kWh}$ energiát fogyaszt. Mennyi vörösréz válik ki az elektrolizáló edényben? $q = 1 \text{ C}$ töltés $m = 0,33 \text{ mg}$ vörösréz választ le.

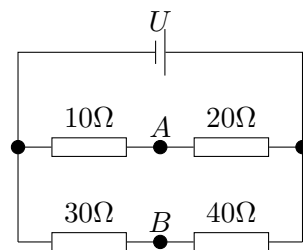
Az elektromos munka $W = UIt = UQ$. Ez alapján az átjutó töltés:

$$Q = \frac{W}{U} = \frac{(0,016 \cdot 3600 \cdot 1000) \text{ J}}{200 \text{ V}} = 288 \text{ C}.$$

Az ennek hatására kiváló réz tömege:

$$m_{\text{Cu}} = \frac{m}{q} Q = \frac{0,33 \text{ mg}}{1 \text{ C}} \cdot 288 \text{ C} = 95,04 \text{ mg}.$$

+1. feladat: Az ábrán látható kapcsolásban mekkora az A és B pont közötti feszültség nagysága? ($U = 220 \text{ V}$)



A felső soron ágban az eredő ellenállás $R_{12} = 30 \Omega$, míg az alsóban $R_{34} = 70 \Omega$. A teljes eredő:

$$R_e = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = 21 \Omega.$$

A főágban folyó $I = \frac{U}{R_e} = 10,476 \text{ A}$ áram az ellenállások arányában fordítottan oszlik el az ágakon, azaz:

$$I_{12} R_{34} = I_{34} R_{12}$$

A fenti egyenlet alapján

$$I_{12} = \frac{R_{34}}{R_{12}} I_{34}$$

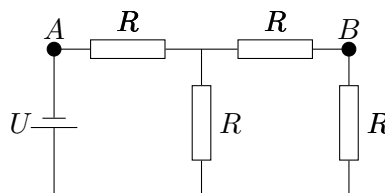
$$\left(\frac{R_{34}}{R_{12}} + 1 \right) I_{34} = I \quad \rightarrow \quad I_{34} = 3,14 \text{ A},$$

$$I_{12} = I - I_{34} = 7,3 \text{ A}.$$

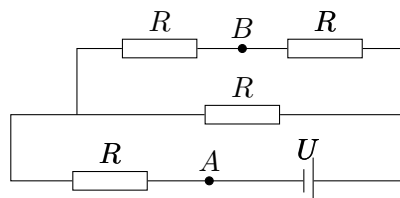
Az A pont potenciálja $U_A = R_1 I_{12} = 10 \Omega \cdot 7,3 \text{ A} = 73,3 \text{ V}$, a B ponté $U_B = R_3 I_{34} = 30 \Omega \cdot 3,14 \text{ A} = 94,2 \text{ V}$. A kettő különbsége:

$$U_{AB} = U_B - U_A = 20,9 \text{ V}.$$

+2. feladat: Az ábrán látható kapcsolásban mekkora az A és B pont közötti feszültség nagysága? ($U = 10 \text{ V}$)



Átrajzolva:



Az eredő ellenállás:

$$R_e = \frac{(R + R)R}{(R + R) + R} + R = \frac{5}{3}R.$$

Az áramerősség a főágban és így a lenti ellenálláson $I = \frac{U}{R_e}$, így az arra jutó feszültség $U_1 = IR = \frac{3}{5}U$. A párhuzamos tagra jut a maradék, és szimmetria miatt a B pont elé és mögé annak fele-fele. Azaz az AB feszültség a következő:

$$U_{AB} = U_1 + \frac{U - U_1}{2} = \frac{3}{5}U + \frac{U - \frac{3}{5}U}{2} = \frac{4}{5}U = 8 \text{ V}.$$

Otthoni gyakorlásra:

19.5, 19.12, 19.14, 19.24, 19.33

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.