Bevezető fizika (vill), 6. feladatsor
Elektrosztatika

2014. október 29., 10:32

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- töltés (Q, $[Q] = 1\,\mathrm{C}$), tapasztalat (azonos taszít, ellentétes vonz), Coulomb-törvény

$$\mathbf{F} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

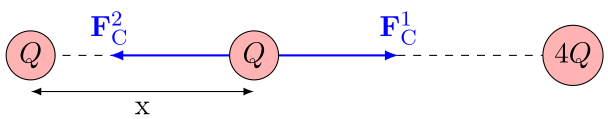
  vákuum permittivitása $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$, relatív permittivitás ε_r

- q próbatöltésre ható erő $\to$ elektromos tér ($\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$)
- erővonalkép, homogén erőtér
- munkavégzés $W = \mathbf{Fs} = q\mathbf{Es}$, feszültség/potenciálkülönbség ($U = \mathbf{Es}$, $[U] = 1\,\mathrm{V}$)
- kondenzátor $C = \frac{Q}{U}$, $[C] = 1\,\mathrm{F}$, síkkondenzátor $C = \varepsilon\frac{A}{l}$, energia, $U = \frac{1}{2}CU^2$
- sorosan/párhuzamosan kapcsolt kondenzátor eredő kapacitása

Órai feladatok:

17.4. feladat: Két pozitív, pontszerű töltés, Q és $4Q$, egymástól l távolságban van rögzítve. Hol kell elhelyezni egy pontszerű Q töltést, hogy egyensúlyban legyen?

A töltések megegyező előjelűek, tehát mindketten vonzani/taszítani fogják a próbatestet. Egyensúly akkor lehet, ha kioltják egymást, ami csak egy vonalba esés esetén valósulhat meg.



Az középsőre ható erők egyensúlyban:

$$\mathbf{F}_\mathrm{C}^1 + \mathbf{F}_\mathrm{C}^2 = 0$$

$$F_\mathrm{C}^1 - F_\mathrm{C}^2 = 0$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{x^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q^2}{(l-x)^2} = 0,$$

amelyből a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2 + \frac{2}{3}lx - \frac{1}{3}l^2 = 0.$$

A megoldóképlet szerint:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{2}{3}l \pm \sqrt{\frac{4}{9}l^2 + \frac{4}{3}l^2}}{2} = \ldots$$
$$= -\frac{l}{3}\left(1 \pm \sqrt{5}\right),$$

amelyek közül a fizikailag helyes megoldás az $x = 0{,}412l$.

17.6. feladat: Homogén elektrosztatikus tér pontjaiban a térerősség $E = 10^5\,\mathrm{V/m}$. Mekkora erő hat a térben levő $q = 2\cdot10^{-8}\,\mathrm{C}$ töltésű kicsi fémgolyóra? Mennyi a golyó gyorsulása, ha tömege $m = 5\,\mathrm{g}$?

A testre a Coulomb-erő hat, amely felírható a térerősséggel:

$$F = qE = 2\cdot10^{-8}\,\mathrm{C}\cdot10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 2\cdot10^{-3}\,\mathrm{N}.$$

Newton törvénye értelmében az erő alapján a gyorsulás:

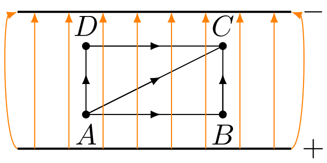
$$a = \frac{F}{m} = \frac{2\cdot10^{-3}\,\mathrm{N}}{5\cdot10^{-3}\,\mathrm{kg}} = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

17.7. feladat: Síkkondenzátor homogén elektromos terében a térerősség $E = 1000\,\mathrm{N/C}$. Az ábra szerinti elrendezés esetén, az AD és BC szakaszok 1 cm hosszúságúak.

a) Mennyi munkát végeznek az elektromos erők, ha $Q = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ pozitív töltés az A pontból a C pontba: az ABC; vagy az ADC; vagy közvetlenül az AC úton mozdul el?

b) Mennyivel kisebb a B; C; D; pontban a potenciál, mint az A pontban?

c) Mennyi a kondenzátor lemezei között a feszültség, ha a lemezek távolsága 3 cm?



A töltésre ható erő: $F = QE = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot 1000\,\mathrm{N/C} = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$, melynek iránya megegyezik az elektromos térerősség irányával, vagyis felfelé mutat. Az erő állandó: annak nagysága és iránya független a töltés helyétől.

Az AB és a DC egyenesek mentén végzett munka nulla, hiszen itt az elmozdulás és az erő egymásra merőleges, így a skalárszorzat nulla. Az AD és a BC egyenesek mentén pedig az elmozdulás párhuzamos az erő irányával, így a munka:

$$W_{AD} = W_{BC} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AD} = F \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{cm} = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}\,.$$

Az AC úton végzett munkát hasonlóan számolhatjuk:

$$W_{AC} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AC} = F \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha = F \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = W_{AD}\,.$$

A feszültség homogén térerősség esetében:

$$V = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = -\frac{W}{Q}\,,$$

vagyis az AB szakaszon nem esik feszültség, az AD és az AC szakaszokon pedig

$$V_{AC} = V_{AD} = -\frac{5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}}{5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}} = -10\,\mathrm{V}\,.$$

A kondenzátor lemezei közötti feszültség nagysága

$$V = 1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 3\,\mathrm{cm} = 30\,\mathrm{V}\,.$$

17.8. feladat: Mekkora sebességre gyorsul fel vákuumban, homogén elektrosztatikus térben, s úton az eredetileg nyugvó elektromos részecske? ($m = 10^{-6}\,\mathrm{g}$; $Q = 10^{-7}\,\mathrm{C}$, $E = 10^4\,\mathrm{V/m}$; $s = 10\,\mathrm{cm}$)

Használjuk a munkatételt! Az egyik oldalon külső gyorsító erőként ott van az elektromos tér, míg a másikon a mozgási energia változásából kijön a sebesség:

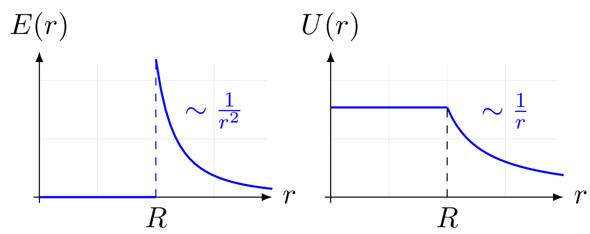
$$QEs = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2QEs}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}}{10^{-9}\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{2 \cdot 10^5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 447{,}21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

17.10. feladat: Mekkora a térerősség és a potenciál egy tömör, töltött fémgömb belsejében?

Mivel a gömb ideális vezető, így annak belsejében nem lehet térerősség. Ennek az az oka, hogy ha lenne, akkor a fém belsejében lévő többi töltésre azonnal hatna a Coulomb erő, és azok elmozdulnának, és azok egészen addig mozognának, míg olyan állapot áll be, hogy nem hat már rájuk erő.

A gömbön belül a potenciál pedig állandó. Ennek oka, hogy a gömb belsejében a térerősség nulla, abban sehol sem eshet feszültség, vagyis semelyik két pont között nincs potenciálkülönbség.



17.11. feladat: Fémből készült, töltetlen gömbhéj középpontjában $+Q$ pontszerű töltés helyezkedik el.

a) Hogyan helyezkednek el a megosztott töltések a gömbhéjon?

b) Rajzoljuk meg vázlatosan az erővonalakat a gömbön belül és kívül!

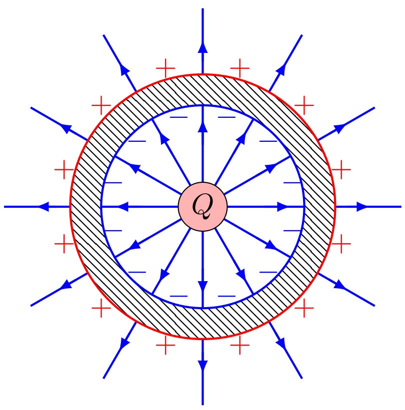
c) Hat-e erő a gömbön kívül levő töltésre?

d) A gömböt lefödve, hogyan változik meg a töltések eloszlása?

a) A gömbhéj külső és belső felületére töltések fognak felhalmozódni. A belső töltésfelhalmozódásnak az oka a gömb közepén található töltés megosztó hatása, a gömbhéj negatív töltései ahhoz közel, míg annak pozitív töltései attól távol szeretnének elhelyezkedni. Kérdés még, hogy a gömbhéj belsejében található-e szabad töltés. Mivel a gömbhéj ideális vezető, így annak belsejében nem lehet térerősség. Ennek az az oka, hogy ha lenne, akkor a fém belsejében lévő többi töltésre azonnal hatna a Coulomb erő, és azok elmozdulnának, és azok egészen addig mozognának, míg olyan állapot áll be, hogy nem hat már rájuk erő.

   Ezek mellett még azt is tudjuk, hogy a töltések irány szerinti eloszlása egyenletes lesz, melynek oka, hogy a probléma gömbszimmetrikus.

b) Az erővonalat párhuzamosak az elektromos térerősség irányával, és az erővonalak sűrűsége arányos a térerősség nagyságával.



c) Igen.

d) A gömbhéj külső felületén az ott felhalmozódó pozitív töltések taszítják egymást. Ha földeljük azt a felületet, akkor ezek a töltések már el tudnak távolodni egymástól, így a felületen megszűnik a töltésfelhalmozódás: a felület semleges lesz.

17.13. feladat: Sorosan kapcsolunk egy $C_1 = 4\,\mu\text{F}$-os és egy $C_2 = 6\,\mu\text{F}$-os kondenzátort. Mekkora töltéstől töltődik fel a rendszer $U = 220\,\text{V}$-ra?

Sorosan kapcsolt kapacitások esetén az eredő nagysága:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-6}\,\text{F}},$$

az eredő $C = 2{,}4\,\mu\text{F}$. A kondenzátorokra jutó töltés:

$$Q = CU = 2{,}4\,\mu\text{F} \cdot 220\,\text{V} = 5{,}28 \cdot 10^{-4}\,\text{C}.$$

17.16. feladat: Egy C kapacitású kondenzátorra Q töltést visznek, majd lekapcsolják a telepről. Hogyan változik a kondenzátor elektrosztatikus energiája, ha lemezeit távolítják egymástól?

A lekapcsolás után a kondenzátoron levő töltésnek meg kell maradnia. A kondenzátor energiája:

$$E_C = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

amelybe behelyettesíthetjük a síkkondenzátorra vonatkozó ismeretünket $\left(C = \varepsilon \frac{A}{l}\right)$, és így:

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon A} l.$$

Ez alapján ha lemezeket távolítjuk (l nő), akkor az energia is növekedni fog.

17.26. feladat: Mekkora eredő kapacitást kapunk, ha $C_1 = 2\,\mu\text{F}$ és $C_2 = 3\,\mu\text{F}$ kapacitású kondenzátort
a) sorba, b) párhuzamosan kapcsolunk?

a, Sorba kapcsolás esetén:

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} + \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}\,\text{F}}\right)^{-1} = 1{,}2\,\mu\text{F}.$$

b, Ha párhuzamosan kapcsoljuk őket:

$$C = C_1 + C_2 = 2\,\mu\text{F} + 3\,\mu\text{F} = 5\,\mu\text{F}.$$

Megj. Ez a példa előrevehető első kondenzátoros példának, aztán a levezetést hozzá el lehet közben mondani.

17.27. feladat: Két sorba kötött kondenzátorra, amelyek kapacitása $C_1 = 2\,\mu\text{F}$ és $C_2 = 4\,\mu\text{F}$; $U = 120\,\text{V}$ feszültséget kapcsolunk. Mekkora az egyes kondenzátorokra jutó feszültség?

A soros kapcsolás miatt mindkét kondenzátorra ugyanakkora töltés jut, azaz:

$$\begin{aligned} C_1 U_1 &= C_2 U_2 = C_2 (U - U_1) \\ (C_1 + C_2)\, U_1 &= C_2 U \\ U_1 &= \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{4\,\mu\text{F}}{2\,\mu\text{F} + 4\,\mu\text{F}} \cdot 120\,\text{V} \\ &= 80\,\text{V}. \end{aligned}$$

A másik kondenzátorra $U_2 = U - U_1 = 120\,\text{V} - 80\,\text{V} = 40\,\text{V}$ jut.

17.30. feladat: Ismeretlen kapacitású, $U_1 = 80\,\mathrm{V}$-ra feltöltött kondenzátor sarkait összekapcsoljuk egy $U_2 = 16\,\mathrm{V}$-ra feltöltött, $C_2 = 60\,\mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátor sarkaival. Határozzuk meg az ismeretlen kapacitást, ha az összekapcsolás után a kondenzátorok közös feszültsége $U_\mathrm{k} = 20\,\mathrm{V}$; és összekötéskor az
a) egyező pólusokat;
b) ellentétes pólusokat kapcsoltuk össze!

A második kondenzátorra $Q_2 = C_2U_2 = 16\,\mathrm{V} \cdot 60\,\mu\mathrm{F} = 960\,\mu\mathrm{C}$ töltés jut.

a, Egyező pólusok összekapcsolása esetén a töltések összeadódnak és mindkét kapacitáson azonos feszültség alakul ki. Az összeállítás a párhuzamos kapcsolásra emlékeztet. Azaz igaz lesz, hogy:

$$C = C_1 + C_2$$
$$Q = Q_1 + Q_2,$$

amely tovább fejtve:

$$\begin{aligned} U_\mathrm{k}C &= C_1U_1 + C_2U_2 \\ U_\mathrm{k}\left(C_1 + C_2\right) &= C_1U_1 + C_2U_2 \\ C_1 &= \frac{U_\mathrm{k} - U_2}{U_1 - U_\mathrm{k}} C_2 = \\ &= \frac{20\,\mathrm{V} - 16\,\mathrm{V}}{80\,\mathrm{V} - 20\,\mathrm{V}} \cdot 60\,\mu\mathrm{F} = 4\,\mu\mathrm{F}. \end{aligned}$$

A most fordítva kötjük össze őket, így a töltések kioltják egymást, azaz a fenti állítások közül módosul a harmadik:

$$Q = Q_1 - Q_2,$$

amely hasonlóan továbbvihető:

$$\begin{aligned} U_\mathrm{k}C &= C_1U_1 - C_2U_2 \\ U_\mathrm{k}\left(C_1 + C_2\right) &= C_1U_1 - C_2U_2 \\ C_1 &= \frac{U_\mathrm{k} + U_2}{U_1 - U_\mathrm{k}} C_2 = \\ &= \frac{20\,\mathrm{V} + 16\,\mathrm{V}}{80\,\mathrm{V} - 20\,\mathrm{V}} \cdot 60\,\mu\mathrm{F} = 36\,\mu\mathrm{F}. \end{aligned}$$

Otthoni gyakorlásra:
17.5, 17.12, 17.14, 17.22, 17.23, 17.24, 17.17, 17.18, K6

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.