Bevezető fizika (vill), 5. feladatsor
Körmozgás

2014. november 4., 16:04

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- egyenletes körmozgás
- periódusidő, frekvencia, szögsebesség, kerületi sebesség, centripetális gyorsulás és erő
- radiális és tangenciális irány
- kapcsolat az egyenes és körpályán történő mozgás között

Órai feladatok:

6.2. feladat: Forgó kerék két ugyanazon sugáron levő pontjának sebessége $v_1 = 13\,\mathrm{m/s}$, illetve $v_2 = 7\,\mathrm{m/s}$. Mekkora a kerék szögsebessége, ha a két pont egymástól való távolsága $\Delta r = 30\,\mathrm{cm}$?

A kerületi sebességük különböző de szögsebességük azonos, azaz:

$$v_1 = r_1 \cdot \omega = (r_2 + \Delta r) \cdot \omega$$
$$v_2 = r_2 \cdot \omega$$

összevonva $v_1 = v_2 + \Delta r \cdot \omega$, amelyből a szögsebesség:

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{\Delta r} = \frac{13\,\mathrm{m/s} - 7\,\mathrm{m/s}}{0{,}3\,\mathrm{m}} = 20\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

6.5. feladat: Mekkora a TU-144 utasszállító repülőgép centripetális gyorsulása, ha $v = 2400\,\mathrm{km/h}$ sebességgel $r = 80\,\mathrm{km}$ sugarú körívben halad fordulás közben? Ily módon mennyi időbe telik, amíg északi irányból kelet felé fordul? Mennyi utat tesz meg e fordulás közben?

A centripetális gyorsulás:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(2400\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}/3{,}6\,\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}\right)^2}{80000\,\mathrm{m}} = 5{,}\dot{5}\,\mathrm{m/s^2}.$$

A negyedkör alatt megtett út:

$$s = \frac{2r\pi}{4} = \frac{2 \cdot 80\,\mathrm{km} \cdot \pi}{4} = 125{,}6\,\mathrm{km},$$

az ehhez szükséges idő:

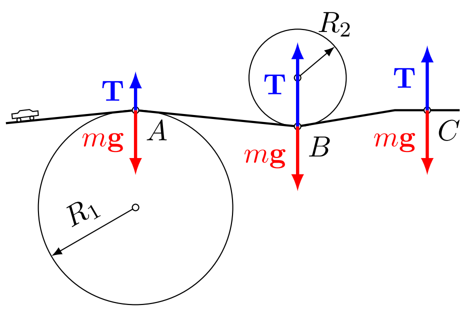
$$t = \frac{s}{v} = \frac{125{,}6\,\mathrm{km}}{2400\,\mathrm{km/h}} = 188{,}5\,\mathrm{s}.$$

6.7. feladat: $m = 1000\,\mathrm{kg}$ tömegű gépkocsi dombvidéken halad, egyenletes $v_0 = 72\,\mathrm{km/h}$ sebességgel. Az A és B pontokban az út $R_1 = 100\,\mathrm{m}$ illetve $R_2 = 50\,\mathrm{m}$ sugarú körív, a C pontban vízszintes.

a) Határozzuk meg e három pontban az út által a gépkocsira kifejtett nyomóerő irányát és nagyságát.

b) Mennyi lehet a gépkocsi maximális sebessége az A pontban?

($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



a) A C pontban az autó egyenesen halad, függőlegesen nem végez mozgást, így az ilyen irányú gyorsulása nulla. A II. Newton-törvény alapján $T_C = mg = 10^4\,\mathrm{N}$.

A gépkocsi az A és a B pontban körpályán halad, miközben az aktuális kerületi sebessége v_0. A körpályán való haladás feltétele, hogy a kocsira ható erők eredője biztosítsa az autónak a centripetális gyorsulást. Az A pontban

$$F_{\mathrm{cp}} = mg - T_A = m\frac{v_0^2}{R_1}$$

$$T_A = mg - m\frac{v_0^2}{R_1}$$
$$= 1000\,\mathrm{kg}\cdot\left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - \frac{\left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{100\,\mathrm{m}}\right)$$
$$= 600\,\mathrm{N}.$$

ahol T_A az út és az autó között fellépő nyomóerő.

A B pontban a centripetális gyorsulás ellentétes irányba kell, hogy mutasson, így

$$F_{\mathrm{cp}} = T_B - mg = m\frac{v_0^2}{R_2}$$
$$T_B = mg + m\frac{v_0^2}{R_2}$$
$$= 1000\,\mathrm{kg}\cdot\left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \frac{\left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{50\,\mathrm{m}}\right)$$
$$= 18000\,\mathrm{N}.$$

b) Vegyük észre, hogy ha a T_A kifejezésében, a v_0 sebesség túl nagy, akkor a T_A akár negatív is lehetne. Ez azonban nem valós megoldás, hiszen a tartóerő csak nyomni tud, húzni nem. Ha ez az eset állna fenn, akkor az azt jelentené, hogy az A pontban az autó már nem ér hozzá az aszfalthoz, mivel az már korábban elemelkedett attól.

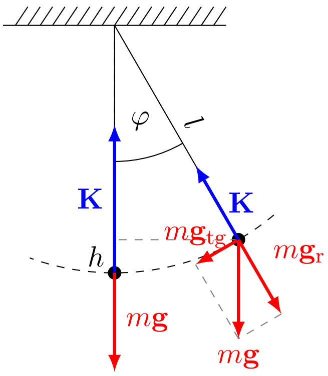
A határeset akkor következik be, amikor a tartóerő éppen nulla. Ekkor a nehézségi erő még éppen tudja biztosítani a körpályán való maradáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$mg = m\frac{v_{\max}^2}{R_1} \quad\Rightarrow\quad v_{\max} = \sqrt{R_1 g} = 31{,}62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

6.10. feladat: Az l hosszúságú fonálra függesztett m tömegű golyó ingaként leng. A legnagyobb kitérés $\varphi_{\max} = 30°$. Mekkora erő hat a fonálban, amikor

a) az inga szélső helyzetben van;

b) a függőleges helyzeten halad át? Mennyi a gyorsulása az előbbi helyzetekben?



Az ingatest körmozgást végez, vagyis a rá ható erők eredőjének sugárirányú komponense az, ami a test centripetális gyorsulását adja:

$$ma_{\mathrm{cp}} = m\frac{v^2}{l} = K - mg\cos\varphi\ .$$

a) A legszélső helyzetben a test sebessége nulla, vagyis az előző egyenlet alapján:

$$K = mg\cos 30°\ .$$

b) A pálya aló pontjában viszont

$$K = mg + m\frac{v^2}{l}\ .$$

A munkatételt felhasználva ezt a sebességet is ki tudjuk számítani. A testre csak a kötélerő és a nehézségi erő hat, melyek közül a kötélerő sosem végez munkát, hiszen az mindig merőleges a mozgás irányára. A nehézségi erő munkáját pedig a helyzeti energiával fogjuk figyelembe venni. Legyen az egyik állapot az inga maximális kitérése, a másik pedig az alsó helyzeten való áthaladás. Erre a két pontra felírva a munkatételt:

$$0 = W = \Delta E = E_2 - E_1$$
$$E_1 = E_2$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgl(1-\cos\varphi)$$
$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)}\ ,$$

ahonnan

$$K = mg\,[3 - 2\cos\varphi]\ .$$

6.12. feladat: a) Milyen erő hat a Föld körül keringő űrhajóban „lebegő” űrhajósra?
b) Milyen erő hat a Föld felé szabadon eső testre?
c) Milyen erő hat a Föld felé zuhanó repülőgépben „lebegő” pilótára?

a, A Föld nehézségi vonzása
b, ugyanaz
c, ugyancsak a nehézségi vonzás.

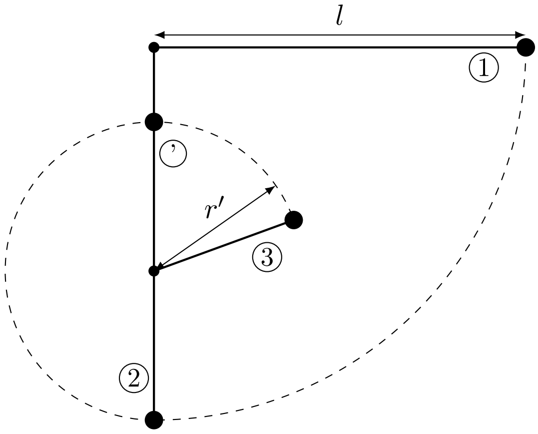
6.15. feladat: Egy gépkocsi $v = 108\,\mathrm{km/h}$ sebességgel halad. Kerekeinek átmérője $d = 75\,\mathrm{cm}$. Mekkora a kerekek szögsebessége?

Az autó éppen akkora sebességgel halad, mint amekkora a kerekei egy pontjának kerületi sebessége.

Ez a legegyszerűbben onnan látható be, hogy tudjuk, hogy a kerék az aszfalton tapad, vagyis a kerék legalsó pontja a kocsi mozgása során mindig áll. Mivel az autó minden pontja előre felé halad v sebességgel, ezért a kerék külső pontjainak kerületi sebessége olyan kell hogy legyen, hogy a legalsó pont mindig álljon, vagyis a kerületi sebességnek is v-nek kell lennie. Így a szögsebesség:

$$\omega = \frac{v}{d/2} = \frac{108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{37{,}5\,\mathrm{cm}} = 80\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

6.30. feladat: Egy fonálingát nyugalmi helyzetéhez képest 90°-kal kitérítünk, majd elengedünk. Amikor az inga átlendül a függőleges helyzeten, a fonál egy szögbe ütközik. A fonal hosszának hányadrészénél lehet a szög, ha azt akarjuk, hogy a fonál végére kötött test további pályája *teljes egészében* kör legyen?



A teljes kör megtételének feltétele, hogy elérjük a kis kör legfelső pontját és az inga átlendüljön rajta. Használjuk a munkatételt. A nehézségi erő munkája:

$$W = mg(l - 2r'),$$

míg a mozgási energia megváltozása:

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m\underbrace{v_1^2}_{0}.$$

Másrészt a körmozgás feltételéből a centripetális és nehézségi erő megegyezik ebben a pontban:

$$m\frac{v'^2}{r'} = mg,$$

amelyből $v' = \sqrt{gr'}$. Ezt behelyettesítve a munkatételbe:

$$mg(l - 2r') = \frac{1}{2}mgr'$$

$$r' = 0{,}4l.$$

6.39. feladat: Egy űrállomás $l = 30\,\mathrm{m}$ hosszú rúddal összekötött két kisebb űrkabinból áll. Milyen szögsebességgel kell az űrállomásnak a rúd középpontján átmenő képzelt tengely körül forognia, ha azt akarjuk, hogy az űrkabin lakói a Föld felszínén megszokott „súlyú” állapotban érezzék magukat? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)

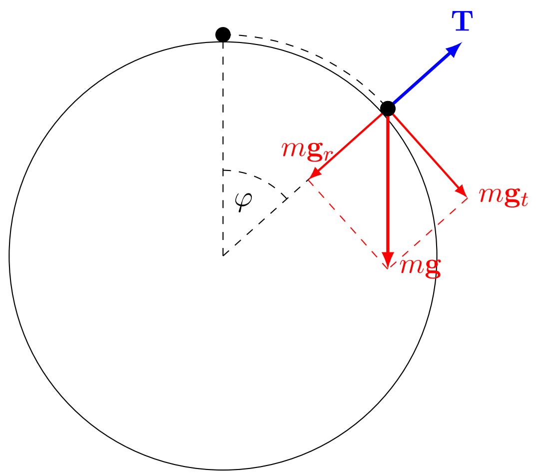
Miközben az űrállomás forog, a kabinok, és így a bennük lévő testek körmozgást végeznek. A körmozgás során a testek gyorsulnak, ezt a gyorsulást pedig az alátámasztást adó tartóerők biztosítják a testeknek. Az űrkabinban lévő űrhajós azt érzékei, hogy a környezetéhez képest nyugalomban van, illetve az alátámasztás őt nyomja. Az ő szemszögéből ez csak úgy magyarázható, ha őrá hat egy „fiktív” tehetetlenségi erő (a centripetális erő), melyet ő érez, és ez az, ami őt az alátámasztáshoz nyomja. Ezt a centripetális erőt érezzük úgy, mintha az egy mesterséges nehézségi erő lenne.

Ez az erő egyenlő nagyságú az alátámasztás erejével, vagyis a centripetális erő nagyságával:

$$G_{\mathrm{mesterséges}} = mg = m\frac{v^2}{l/2} = m\omega^2\frac{l}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{30\,\mathrm{m}}} = 0{,}81\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

6.33. feladat: Egy $r = 0{,}6$ méter sugarú gömb tetején egy kis golyót elengedünk. A gömb tetejétől számítva milyen magasságban hagyja el a golyó a gömböt? (A súrlódástól eltekintünk.)



A gömböt akkor hagyja el a golyó, amikor a felület tartóereje megszűnik. Írjuk fel az egyenleteket a radiális és tangenciális komponensekre:

$$\begin{aligned} r: \qquad & m\frac{v^2}{r} = mg\cos\varphi - T \\ t: \qquad & ma = mg\sin\varphi. \end{aligned}$$

A tetejéről való indulással felírhatjuk a munkatételt is:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg(r - r\cos\varphi)$$

azaz $v^2 = 2gr(1-\cos\varphi)$, amit behelyettesíthetünk a sugárirányú egyenletbe:

$$m2g(1-\cos\varphi) = mg\cos\varphi - T$$

és kifejezhetjük a felület tartóerejét:

$$T = mg(2 - 3\cos\varphi).$$

Ez zérus, ha $2 - 3\cos\varphi = 0$, vagyis ha $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. Azaz a gömb magasságához képest

$$\Delta h = r - r\cos\varphi = \frac{r}{3} = 0{,}2\,\mathrm{m}$$

magasságnál hagyja el a gömböt.

Otthoni gyakorlásra:

6.3, 6.4, 6.8, 6.9, 6.11, 6.14, 6.29, 6.15, 6.21, 6.26

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.