Bevezető fizika (vill), 4. feladatsor
Munka, energia, teljesítmény

2014. október 16., 10:01

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- munka $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs\cos\alpha$ skalárszorzat (számít az irány!). $[W] = 1\,\mathrm{J}$
- szakaszokra bontás, határesetben integrálás ($W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{s}$), azaz a görbe alatti terület!
- nehézségi erőtér → helyzeti energia: $E_\mathrm{h} = mgh$, ami negatív is lehet (pl. talajszint alatt)
- kinetikus/mozgási energia: $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$
- rugó: $E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}Dx^2$ (x a megnyúlás, D a rugóállandó)
- munkatétel $\Delta E_\mathrm{k} = W$
- teljesítmény ($P = \frac{W}{t}$), hatásfok ($\eta = \frac{\text{hasznos}}{\text{összes}}$), $1\,\mathrm{kWh} = 3600\,\mathrm{kJ}$

Órai feladatok:

4.7. feladat: $\alpha = 30°$-os lejtőn valaki egy $m = 20$ kilogrammos bőröndöt tol fel vízszintes irányú erővel $h = 2$ méter magasra. A mozgási súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$. A bőrönd mozgása egyenletes. Mennyi munkát végez:

a) az ember,

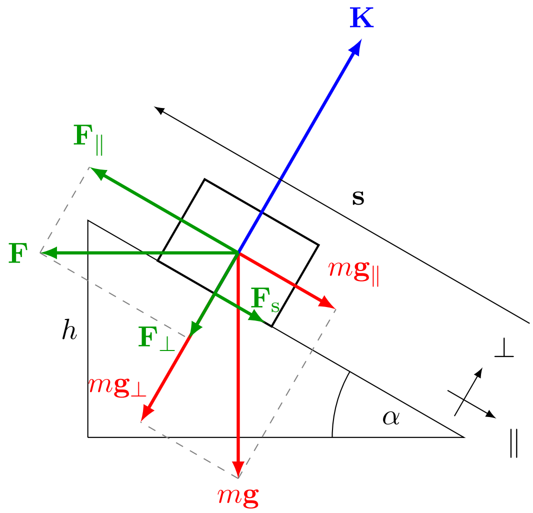
b) a súrlódási erő,

c) a bőröndre ható nehézségi erő,

d) a lejtő nyomóereje,

e) a bőröndre ható erők eredője?

($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



Mivel állandó erők hatnak, így a munkát ki lehet számítani az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként. A feladat megoldásához először határozzuk meg, hogy mekkora F erőre van szükség. A Newton-egyenleteket felírva azt kapjuk, hogy

$$\perp: \qquad 0 = K - mg\cos\alpha - F\cdot\sin\alpha$$
$$\parallel: \qquad 0 = F\cdot\cos\alpha - mg\sin\alpha - F_\mathrm{s}\ ,$$

ahol $F_s = \mu \cdot K$, és K az első egyenletből kifejezhető:

$$K = mg\cos\alpha + F\sin\alpha\ ,$$

melyet a második egyenletbe helyettesítve:

$$0 = F\cdot\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu\cdot\big(mg\cos\alpha + F\sin\alpha\big)$$
$$F = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\ .$$

Szükségünk lesz még a többi erő nagyságára is:

$$\begin{aligned} K &= mg\cos\alpha + F\sin\alpha \\ &= mg\cos\alpha + \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\sin\alpha \\ &= \frac{\cos^2\alpha - \mu\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha + \mu\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg \\ &= \frac{1}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\ , \end{aligned}$$

$$F_\mathrm{s} = \mu K = \frac{1}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot \mu mg\ .$$

a) Az ember által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_{\text{ember}} &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos\alpha \\ &= \frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\cdot mg\cdot\frac{h}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha \\ &= \frac{\sin 30^\circ + 0{,}2\cdot\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0{,}2\cdot\sin 30^\circ}\cdot \\ &\qquad \cdot 20\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{2\,\mathrm{m}}{\sin 30^\circ}\cdot\cos 30^\circ \\ &= 608{,}87\,\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$

b) A súrlódási erő által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{s}} &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = -F_{\mathrm{s}}\cdot s \\ &= -\frac{\mu mg}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\cdot\frac{h}{\sin\alpha} \\ &= -\frac{0{,}2\cdot 20\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\cos 30^\circ - 0{,}2\cdot\sin 30^\circ}\cdot\frac{2\,\mathrm{m}}{\sin 30^\circ} \\ &= -208{,}87\,\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$

c) A nehézségi erő munkája

$$\begin{aligned} W_{mg} &= m\mathbf{g}\cdot\mathbf{s} = -mg_{\parallel}\cdot s = -mg\sin\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha} \\ &= -20\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2\,\mathrm{m} = -400\,\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$

d) A lejtő nyomóereje nem végez munkát, hiszen az merőleges az $\mathbf{s}$ elmozdulásra.

e) A bőröndre ható erők eredője nulla, hiszen a bőrönd összgyorsulása nulla. Ennek munkája természetesen nulla.

Vegyük észre, hogy ezt a korábbi eredményekből is megkapjuk, hiszen ha összeadjuk az összes erő munkáját, akkor is nullát kapunk.

4.11. feladat: Rugós erőmérőt $\Delta l = 10\,\mathrm{cm}$-rel kihúztunk. Mekkora munkát végeztünk a megnyújtáskor, ha a mutató $F = 50\,\mathrm{N}$ nagyságú erőt jelez?

Először számoljuk ki a rugó állandóját:

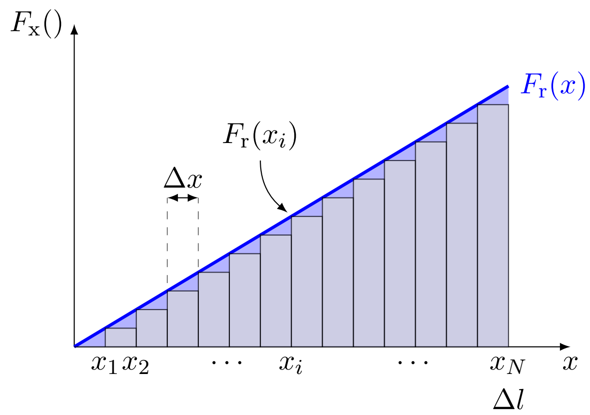
$$D = \frac{F}{\Delta l} = \frac{50\,\mathrm{N}}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$

Ennek a munkának a kiszámolásánál az a probléma, hogy az általunk kifejtett erő nem állandó, hiszen tudjuk, hogy a rugóerő $F_{\mathrm{r}}(x) = D\cdot x$, ahol x a megnyúlás, és a mi erőnk ennek az ellenereje.

A munka kiszámolásához először tekintsünk azt a pillanatot, mikor éppen x_i-vel van megnyújtva a rugó. Próbáljuk ekkor a rugót még egy nagyon pici Δx hosszal még jobban megnyújtani. Ez olyan kis távolság, hogy ez alatt az erő gyakorlatilag nem változik, végig $F_{\mathrm{r}}(x) = D\cdot x_i$. Ekkor a munkánk erre a kis Δx szakaszra:

$$\Delta W(x_i) = F_{\mathrm{r}}(x)\cdot\Delta x = D\cdot x_i\cdot\Delta x\,.$$

A teljes megnyújtásra számolt munkát úgy kapjuk, hogy a Δl távolságot felosztjuk sok ilyen pici Δx szakaszra, kiszámoljuk a munkát az egyes szakaszokra, majd összeadjuk őket. Vegyük észre, hogy az így számított összeg, éppen az $F_{\mathrm{r}}(x)$ függvény alatti terület téglalapösszege.



Ha egyre finomítjuk a felosztást, akkor az $F_{\mathrm{r}}(x)$ függvény alatti területet kapjuk a $x\in[0,\Delta l]$ tartományon. A téglalapösszeg pedig egy integrálásba megy át:

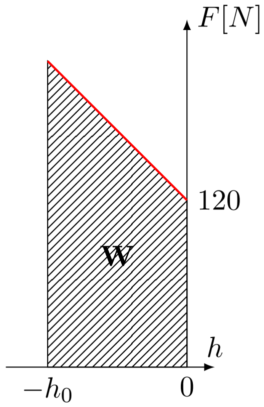
$$\begin{aligned} W &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta W(x_i) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} D\cdot x_i\cdot\Delta x \\ &= \int_0^{\Delta l}\mathrm{d}W(x) = \int_0^{\Delta l} D\cdot x\cdot\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}Dx^2\right]_0^{\Delta l} \\ &= \left(\frac{1}{2}D\cdot(\Delta l)^2\right) - \left(\frac{1}{2}D\cdot 0^2\right) = \frac{1}{2}D\cdot(\Delta l)^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot(0{,}1\,\mathrm{m})^2 = 2{,}5\,\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$

4.29. feladat: $h_0 = 10$ méter mély kútból, méterenként $F_{\text{lánc}} = 10\,\mathrm{N}$ súlyú lánccal vizet húzunk fel. A vödör súlya vízzel együtt $F_{\text{vödör}} = 120\,\mathrm{N}$. Mekkora munka árán tudunk egy vödör vizet felhúzni?

Miközben húzzuk fel a vödröt a lánc kikerül a kútból és egyre kisebb lesz a súly, amit húzunk. Formalizálva a húzóerő a mélység függvényében:

$$F_{\mathrm{h}}(h) = F_{\text{vödör}} + hF_{\text{lánc}},$$

amelyet összegeznünk kell $h = 0$-tól h_0-ig. Az erő-magasság grafikon:



A területet feloszthatjuk egy négyzetre (a vödör felhúzásának munkája), és egy kis háromszögre (lánc húzása). A két munka külön a terület alapján:

$$W_1 = F_{\text{vödör}} \cdot h_0 = 1200\,\text{J},$$
$$W_2 = \frac{(h_0 F_{\text{lánc}}) \cdot h_0}{2} = 500\,\text{J}.$$

Összesen tehát $W = W_1 + W_2 = 1700\,\text{J}$.

Megtehetjük azt is, hogy kihasználjuk, hogy az integrálszámítás értemében a munka:

$$W = \int_0^{h_0} F(h)\mathrm{d}h = \int_0^{h_0} \left(F_{\text{vödör}} + hF_{\text{lánc}}\right)\mathrm{d}h =$$
$$= \left[F_{\text{vödör}} h + \frac{h^2}{2} F_{\text{lánc}}\right]_0^{h_0} = \dots = 1700\,\text{J}.$$

4.32. feladat: Oldjuk meg a munkatétellel a következő feladatot: $v_0 = 500\,\text{m/s}$ sebességű puskagolyó $s_{\text{max}} = 5\,\text{cm}$ mélyen hatol be a fába. Mekkora volt a sebessége $s = 2\,\text{cm}$ mélységben? Tételezzük fel, hogy a fa fékező ereje állandó.

A munkatétel szerint $\Delta E_{\text{kin}} = W$, kifejtve $W = F_{\text{fék}} \cdot s_{\text{max}}$, míg $\Delta E_{\text{kin}} = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$. Így a fékezőerő:

$$F_{\text{fék}} = -\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{s_{\text{max}}}.$$

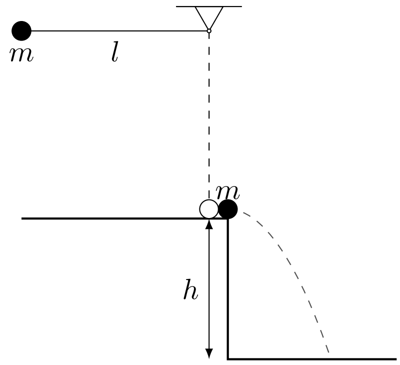
Ha csak 2 cm-t haladunk, akkor a mozgási energia megváltozása $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$, míg a munka $W = F_{\text{fék}} \cdot s$, azaz a munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_{\text{fék}} \cdot s = -\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{s_{\text{max}}} \cdot s$$

Amelyből fejezzük ki a sebességet:

$$v = \sqrt{\left(1 - \frac{s}{s_{\text{max}}}\right) v_0^2} = 387{,}3\,\text{m/s}.$$

4.39. feladat: Az ábrán látható ingát 90°-kal kitérítjük és elengedjük. Az asztal szélén levő, vele egyenlő tömegű golyóval teljesen rugalmasan ütközik. Határozzuk meg, hogy az asztaltól milyen távol ér a padlóra a lelökött golyó!



A mozgás több részre bontható. Először az inga lelendül (1–2), majd megtörténik az ütközés (2–3), végül pedig a második test leesik (3–4). Ezeket a speciális állapotokat mind összeköti a munkatétel, melyet használhatunk.

1–2: Az ingatest lelendül. Válasszuk a helyzeti energia nullszintjét az asztal szintjének. Ekkor a testnek az (1) pontban van helyzeti energiája, ám nincs mozgási energiája, ezzel szemben a (2) helyzetben helyzeti energiája nincs, cserébe viszont mozgási energiája lett, hiszen v_2 sebességgel mozog. A testre a kötélerő hat, ami sosem végez munkát, illetve hat rá a nehézségi erő, annak a munkáját viszont helyzeti energiában vettük figyelembe.

Ez alapján a munkatörvény:

$$W = \Delta\left(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}\right)$$
$$0 = \left(\frac{1}{2}mv_2^2\right) - (mgl)$$
$$v_2 = \sqrt{2gl}\ .$$

2–3: Itt történik meg az ütközés. Mivel az ütközés teljesen rugalmas, így az ütközés során az energia megmarad. Szintén mivel a külső erők munkája nulla, így az impulzusmegmaradást is lehet használni. A két törvény:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}mu_3^2$$
$$mv_2 + 0 = mv_3 + mu_3\ ,$$

ahol az u-val jelölt tagok a kezdetben álló golyó jellemzői.

A két egyenlet egyszerűsítve:

$$v_2^2 = v_3^2 + u_3^2$$

$$v_2 = v_3 + u_3 \ ,$$

majd a második egyenlet négyzetre emelve:

$$v_2^2 = v_3^2 + u_3^2 + 2v_3v_3' \ ,$$

és ebből az első egyenletet kivonva:

$$0 = 2v_3u_3 \ ,$$

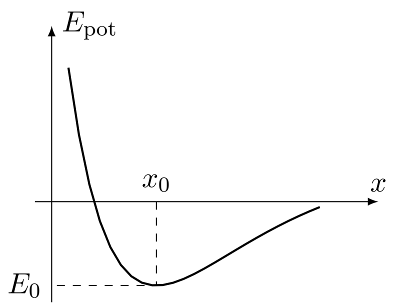
tehát vagy az első vagy a második test állni fog az ütközés után. Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletre pillantva láthatjuk, hogy ha az egyik sebesség nulla, akkor a teljes kezdeti sebességet a másik test kapja meg. Innen adódik, hogy a kezdetben mozgó golyónak kell megállnia, és a másiknak ugyanakkora sebességgel továbbhaladnia, hiszen a fordított eset nem lehetséges. Tehát $v_3 = 0$, $u_3 = v_2 = \sqrt{2gl}$.

3–4: A mozgás utolsó szakaszában egy vízszintes hajítás történik. A leesés ideje $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, mely alatt a test

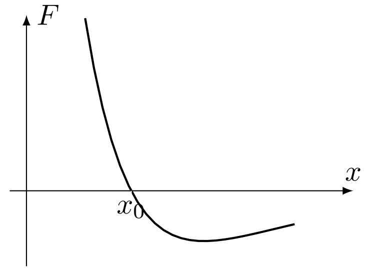
$$s = T \cdot u_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \sqrt{2gl} = 2\sqrt{lh}$$

utat tesz meg.

8.46. feladat: Egy részecske csupán az x tengely mentén mozoghat. Az ábrán a részecske potenciális energiájának a helytől való függése látható.
A; Ábrázoljuk grafikonon (hozzávetőlegesen) a részecskére ható erőt, mint a hely függvényét.
B; Feltéve, hogy a részecske valamilyen rezgő mozgást végez, legfeljebb mennyi lehet mozgási energiája?



Vannak olyan esetek, amikor a erő felírható a potenciális erő segítségével. Ilyen a kapcsolat az, hogy erő nem más, mint görbe meredekségének ellentettje. Nézzük az ábrát. Kezdetben az energia csökken, tehát a meredeksége negatív, vagyis az erő x_0-ig pozitív lesz. Ott az minimum van, a meredekség és az erő is 0. Ezt követően a függvény növekszik, tehát az erőnek negatívnak kell lennie. A kapott ábra:



A rezgő mozgás azt jelenti, hogy rögzített energia mellett különböző helyeken (x) is felvehet ugyanakkora potenciális energiát. Ez az x tengely alatti szakaszra érvényes. A minimális potenciális energia E_0, ha ennél egy kicsit több van akkor abban a magasságban elmetszve a függvényt megkapjuk a rezgés két végpontját. A végpontban a sebesség 0 (lásd egy rugó), így a kinetikus energia is. Azonban amikor a köztes szakaszra érünk a potenciális energia lecsökken, és a különbségből lesz a kinetikus energiája.

4.24. feladat: $mg = 100\,\text{N}$ súlyú testet $F = 120\,\text{N}$ nagyságú erővel emelünk. Mekkora a teljesítmény az indulás után $T = 2$ másodperccel? Mekkora az átlagteljesítmény az első 2 másodperc alatt?

A pillanatnyi teljesítmény $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. A testre ható erők eredője $F_e = 120\,\text{N} - 100\,\text{N} = 20\,\text{N}$, vagyis a test gyorsulása $a = \frac{20\,\text{N}}{10\,\text{kg}} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Kezdetben a test állt, T idő elteltével a test sebessége: $v(T) = a \cdot T = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\,\text{s} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mivel ez a sebesség felfelé mutat, így egy irányba esik az emelőerővel. A teljesítményünk tehát:

$$P(2\,\text{s}) = 120\,\text{N} \cdot 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 480\,\text{W} \ .$$

Az átlagteljesítmény kiszámításához tudnunk kell, hogy hogyan változik a pillanatnyi teljesítmény az időben. Az időfüggés a sebességen keresztül történik:

$$P(t) = F \cdot v(t) = F \cdot a \cdot t \ .$$

Mivel a teljesítmény az idővel lineáris kapcsolatban áll, így az átlagteljesítmény számolható, mint a kezdeti és a végállapotban lévő pillanatnyi teljesítmény számtani közepe:

$$P_{\text{átl}} = \frac{P(2\,\text{s}) + P(0)}{2} = \frac{480\,\text{W} + 0}{2} = 240\,\text{W} \ .$$

Otthoni gyakorlásra:

4.16. feladat: Mekkora átlagos teljesítménnyel lehet egy 1000 kg tömegű személyautót 10 másodperc alatt, álló helyzetből 100 km/h sebességre gyorsítani?

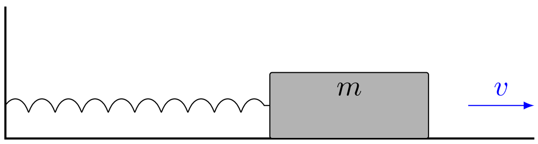
4.30. feladat: $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel függőlegesen lefelé hajítunk egy követ. Mennyi idő alatt négyszereződik meg a mozgási energiája?

4.31. feladat: Egy ládát állandó sebességgel húzunk vízszintes talajon. Mozgás közben $F_\mathrm{s} = 250\,\mathrm{N}$ a fellépő súrlódási erő. Milyen messzire húzhatjuk el a ládát $W_\mathrm{mi} = 0{,}001\,\mathrm{kWh}$ munka árán?

4.23. feladat: Egy ejtőernyős kiugrik egy 2000 m magasságban szálló repülőgépből. (A gép vízszintesen repül, sebessége 100 m/s.) Az ejtőernyős sebessége földet éréskor 5 m/s. Tömege az ernyővel együtt 100 kg. Mennyi munkát végzett a közegellenállás?

4.9. feladat: Mekkora munkavégzéssel jár egy $m = 4\,\mathrm{kg}$ tömegű test felgyorsítása vízszintes talajon $v_\mathrm{v} = 3\,\mathrm{m/s}$ sebességre $s = 2$ méter úton, ha a talaj és a test közötti súrlódás együtthatója $\mu = 0{,}3$? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)

D6. feladat: Az ábrán látható $m = 0{,}01\,\mathrm{kg}$ tömegű testtel $\Delta l = 7{,}5\,\mathrm{cm}$-rel összenyomtuk a $D = 4\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugót, majd a testet elengedtük. A test és a vízszintes felület közti mozgási súrlódási együttható értéke $\mu = 0{,}25$. Mekkora utat tesz meg a test a megállásig?



A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.