Bevezető fizika (vill), 3. feladatsor
Dinamika 2. és Statika

2014. október 8., 10:44

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- impulzus, impulzusmegmaradás
- egyensúly és feltétele
- forgatónyomaték

Példák órai gyakorlásra:

2.15. feladat: $F = 50\,\mathrm{N}$ nagyságú erő hat egy testre $t = 10\,\mathrm{s}$-ig. A test erő irányú sebessége közben $v = 5\,\mathrm{m/s}$-mal növekszik. Mekkora a test tömege? A feladatot az impulzustétel segítségével oldjuk meg.

Az impulzustétel: $\mathbf{F}t = \mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Az erő és sebesség egy egyenesbe esik, így a vektor jelzés elhagyása, és átrendezés után a test tömege:

$$m = \frac{Ft}{v} = \frac{50\,\mathrm{N}\cdot 10\,\mathrm{s}}{5\,\mathrm{m/s}} = 100\,\mathrm{kg}.$$

3.9. feladat: Állóvízben két csónak halad egymás felé. A vízhez viszonyított sebessége mindkét csónaknak ugyanakkora, $|v| = 0{,}6\,\mathrm{m/s}$. Amikor egymás mellé érnek, az egyikről a másikra $m = 60\,\mathrm{kg}$ tömegű testet tesznek át. Ezután a másik csónak az eredeti irányában $|v_2'| = 0{,}4\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad tovább. Mekkora ennek a második csónaknak a tömege? (A víz ellenállását elhanyagoljuk.)

Legyen az első iránya pozitív, a másodiké negatív, és legyen az átadás olyan, hogy közben nem változik meg az az első csomag sebessége (pl. oldalra adja át csomagot). Azaz

$$\begin{aligned} m_1 v - m_2 v &= (m_1 - m)v - (m_2 + m)v_2' \\ -m_2 v &= -mv - m_2 v_2' + m v_2' \\ m(v + v_2') &= m_2(v - v_2') \end{aligned}$$

A kifejezett tömeg:

$$m_2 = m\frac{v + v_2'}{v - v_2'} = 60\,\mathrm{kg}\frac{0{,}6\,\mathrm{m/s} + 0{,}4\,\mathrm{m/s}}{0{,}6\,\mathrm{m/s} - 0{,}4\,\mathrm{m/s}} = $$
$$= 300\,\mathrm{kg}.$$

3.14. feladat: A $m_1 = 120\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_1| = 40\,\mathrm{cm/s}$ sebességű és a $m_2 = 80\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_2| = 100\,\mathrm{cm/s}$ sebességű két test egymással szembe mozog egy egyenes mentén. Teljesen rugalmatlan ütközés után mekkora és milyen irányú sebességgel mozognak tovább?

Jelöljük ki a pozitív irányt úgy, hogy az első test mozgásával megegyező legyen. Az ütközés előtt az összimpulzus:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

utána:

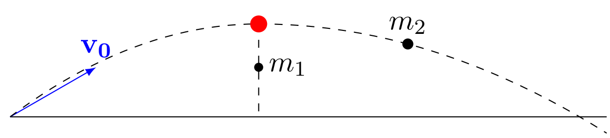
$$p' = (m_1 + m_2)v',$$

és persze tudjuk, hogy a kettőnek meg kell egyeznie. Ezért a sebesség:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{0{,}12\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}4\,\mathrm{m/s} + 0{,}08\,\mathrm{kg}\cdot(-1\,\mathrm{m/s})}{0{,}12\,\mathrm{kg} + 0{,}8\,\mathrm{kg}} = \\ &= -0{,}16\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

A sebesség előjele alapján a második test sebességének irányában mozognak együttesen.

3.31. feladat: A $m = 10\,\mathrm{kg}$ tömegű lövedék a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró irányban $v_0 = 240\,\mathrm{m/s}$ sebességgel hagyja el az ágyú torkolatát. Pályájának legmagasabb pontján a lövedék két részre robban szét. Az egyik, egy $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$-os darab, éppen a robbanás helye alatt, függőlegesen zuhan a földre. A másik, $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$-os darab sebességének iránya robbanás közben nem változik meg. Hol csapódna be ez a másik darab, ha nem lenne légellenállás? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



A kiinduló sebesség komponensei: $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$, $v_{0y} = v_0 \cos\alpha$. A kezdeti y irányú sebességgel a legmagasabb pontig t_1 idő alatt juthatunk el, amely kiszámolható a gyorsulásból:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}.$$

A robbanásra felírhatjuk az impulzusmegmaradást. Előtte volt egy $p_x = mv_{0x}$ impulzusú testünk, míg utána csak a 2-es mozgott vízszintesen, azaz $p'_x = m_1 \cdot 0 + m_2 v'_x$. A megmaradás miatt:

$$\begin{aligned} mv_{0x} &= m_2 v'_x \\ v'_x &= \frac{mv_{0x}}{m_2} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{m_2}. \end{aligned}$$

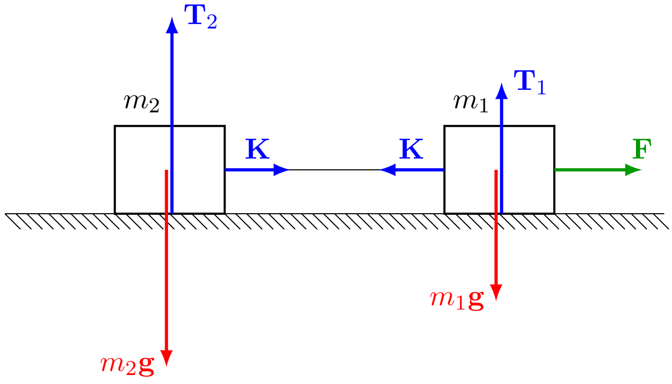
A robbanás után a test 0 y irányú sebességgel indul lefelé, és a leékezéshez szükséges idő ugyanakkora, mint lentről a tetejéig (gyorsulás, távolság, kezdősebesség megegyezik, ezért az idő is!), azaz $t_{\text{le}} = t_1$. A megtett út vízszintesen összefoglalva:

$$\begin{aligned} s = v'_x t_{\text{le}} &= \frac{mv_0 \sin\alpha}{m_2} \frac{v_0 \cos\alpha}{g} = \frac{mv_0^2 \sin 2\alpha}{2m_2 g} = \\ &= \frac{10\,\text{kg} \cdot (240\,\text{m/s})^2 \cdot \sin(2 \cdot 30°)}{2 \cdot 6\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2} = \\ &= 2400\sqrt{3}\,\text{m/s} = 4156{,}9\,\text{m/s}. \end{aligned}$$

3.1. feladat: Ha az erő és az ellenerő egyenlő nagyságú és ellenkező irányú erők, miért nem „semmisítik meg” egymást?

Mert nem ugyanarra hatnak.

3.2. feladat: Vízszintes irányú, $F = 8\,\text{N}$ nagyságú erővel hatunk az $m_1 = 2\,\text{kg}$ tömegű testre, amely egy fonállal az $m_2 = 3\,\text{kg}$ tömegű testhez van kötve az ábrán látható elrendezésben. Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a fonál tömegétől és a súrlódástól eltekintünk?



Itt is először felírjuk az egyes testekre a Newton-törvényt függőleges és vízszintes irányban:

$$\begin{aligned} &1,x: && m_1 a_{1x} = F - K \\ &1,y: && m_1 a_{1y} = T_1 - m_1 g \\ &2,x: && m_2 a_{2x} = K \\ &2,y: && m_2 a_{2y} = T_2 - m_2 g\,. \end{aligned}$$

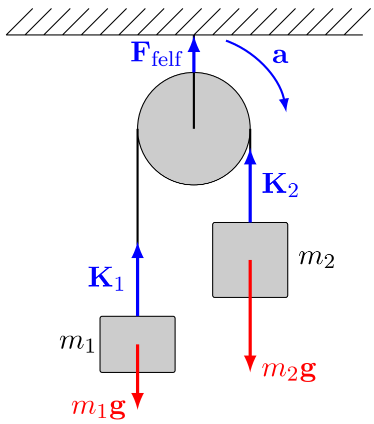
Mivel függőleges elmozdulás nincs, így $a_{1y} = a_{2y} = 0$. A két testet összekötő kötél nyújthatatlan, így a két test gyorsulása minden pillanatban ugyanakkora: $a_{1x} = a_{2x} = a$. Ezt egyszerűen meghatározhatjuk, ha összeadjuk a két x irányú egyenletet:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{8\,\text{N}}{2\,\text{kg} + \text{kg}} = 1{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

Ezt felhasználva a kötelet feszítő erő 2,x egyenlet alapján:

$$K = m_2 a = 3\,\text{kg} \cdot 1{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4{,}8\,\text{N}\,.$$

3.3. feladat: Állócsigán átvetett fonál végein m_1 illetve m_2 tömegű test van. Mekkora gyorsulással mozog az egyik, illetve a másik test, és mekkora erő hat a mennyezetre, ahová a csigát felfüggesztették? A fonál és a csiga tömege elhanyagolható, a fonál nem nyúlik meg, a tengely nem súrlódik, a közegellenállás és a levegőben a felhajtó erő elhanyagolható.



Írjuk fel a testekre a kötél mentén, illetve a csigára függőleges irányban a Newton-törvényt:

$$\begin{aligned} &1: && m_1 a = K_1 - m_1 g \\ &2: && m_2 a = m_2 g - K_2 \\ &\text{cs}: && 0 = F_{\text{felf}} - K_1 - K_2\,. \end{aligned}$$

Mivel a kötél és a csiga ideális, ezért a két kötélerő nagysága megegyezik, $K_1 = K_2 = K$. Az első két egyenletből adódik:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g\,.$$

Ha az m_2 test a nehezebb, akkor arra fog mozogni a rendszer, ha pedig a másik, akkor visszafelé. A kötélerő:

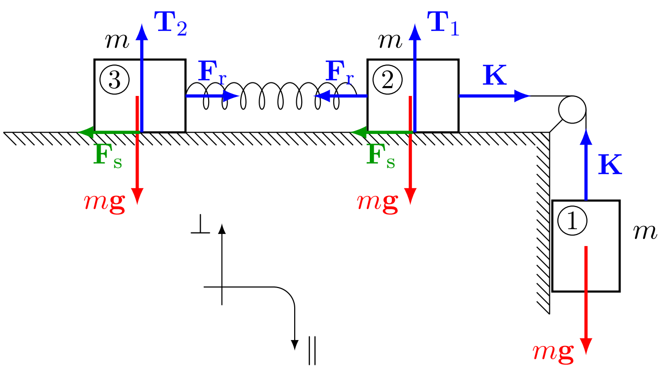
$$K = m_1 \cdot (a+g) = m_1 \cdot \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + 1\right) g$$
$$= \frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1} g \, ,$$

vagyis a csiga a felfüggesztést

$$F_{\text{felf}} = 2K = \frac{4m_1 m_2}{m_2 + m_1} g$$

erővel húzza.

3.12. feladat: Mennyivel nyúlik meg az ábra szerinti elrendezésben a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? A csiga, a rugó és a fonál tömegét ne vegyük figyelembe. Legyen $m = 1\,\text{kg}$, a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$, a rugóállandó $D = 4\,\text{N/cm}$.



Itt is felírjuk a Newton-törvényeket, figyelembe véve azt, hogy a rendszer csak az asztal felülete mentén mozog.

$$\begin{aligned}
&1, \parallel: && ma = mg - K \\
&1, \perp: && 0 = 0 \\
&2, \parallel: && ma = K - F_\text{r} - F_{\text{s},1} \\
&2, \perp: && 0 = T_1 - mg \\
&3, \parallel: && ma = F_\text{r} - F_{\text{s},2} \\
&3, \perp: && 0 = T_2 - mg \, ,
\end{aligned}$$

ahol $F_{\text{s},1} = \mu T_1$ és $F_{\text{s},2} = \mu T_2$. A merőleges egyenletekből a T tartóerőket meghatározva, majd behelyettesítve a párhuzamos irányokra felírt egyenletekbe:

$$\begin{aligned}
&1, \parallel: && ma = mg - K \\
&2, \parallel: && ma = K - F_\text{r} - \mu mg \\
&3, \parallel: && ma = F_\text{r} - \mu mg \, .
\end{aligned}$$

A három egyenlet összegéből:

$$a = \frac{1-2\mu}{3} g \, ,$$

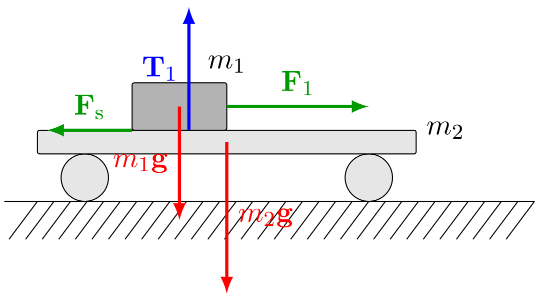
melyet visszahelyettesítve az utolsóba:

$$m \cdot \frac{1-2\mu}{3} g = F_\text{r} - \mu mg$$
$$F_\text{r} = \frac{1+\mu}{3} \cdot mg \, .$$

Vagyis a rugó megnyúlása:

$$\Delta l = \frac{F_\text{r}}{D} = \frac{1+\mu}{3} \frac{mg}{D} = \frac{1+0{,}2}{3} \frac{1\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 0{,}01\,\text{m} \, .$$

3.29. feladat: A $m_2 = 2\,\text{kg}$ tömegű kiskocsi vízszintes síkon súrlódás nélkül mozoghat. A kocsira $m_1 = 0{,}5\,\text{kg}$ tömegű hasábot helyeztünk, és a hasábot $F_1 = 1\,\text{N}$ vízszintes irányú erővel húzzuk. Mekkora a hasáb, illetve a kocsi gyorsulása, ha közöttük a tapadási súrlódási együttható $\mu_\text{tap} = 0{,}25$, csúszó súrlódási együttható pedig $\mu_\text{cs} = 0{,}01$? Mekkora a gyorsulás $F_1' = 10\,\text{N}$-os húzóerő esetén? ($g \approx 10\,\text{m/s}^2$)



Számoljuk ki a maximális tapadási erőt. Ebből kiderül, hogy a kocsi és a test összetapadva marad, vagy egymáshoz képest elmozdul. Tehát:

$$F_\text{tap} = \mu_\text{tap} T_1 = \mu_\text{tap} m_1 g = 0{,}25 \cdot 0{,}5\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 =$$
$$= 1{,}25\,\text{N},$$

azaz az első esetben $F_1 < F_\text{tap}$, így egyben maradnak.

A talajon nincsen súrlódás, így csak az F_1 gyorsító erő számít: $F_1 = (m_1 + m_2)a$, amelyből:

$$a = \frac{F_1}{m_1 + m_2} = \frac{1\,\text{N}}{0{,}5\,\text{kg} + 2\,\text{kg}} = 0{,}4\,\text{m/s}^2.$$

A második esetben $F_1' > F_\text{tap}$, azaz külön mozognak. A test mozgásegyenlete: $F_1' - F_s = m_1 a_1'$, azaz:

$$a_1' = \frac{F_1' - F_s}{m_1} = \frac{F_1' - \mu_\text{cs} m_1 g}{m_1} =$$

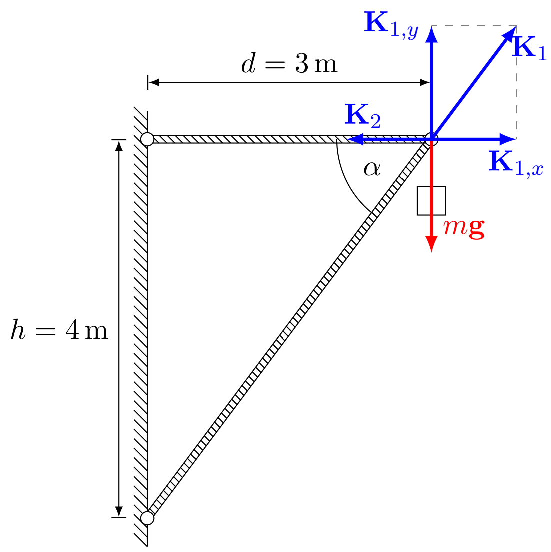
$$= \frac{10\,\mathrm{N} - 0{,}01 \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}5\,\mathrm{kg}} =$$
$$= 19{,}9\,\mathrm{m/s^2}.$$

A kocsira $-F_s = m_2 a_2'$, amelyből:

$$a_2' = \frac{-F_s}{m_2} = \frac{-\mu_{cs} m_1 g}{m_2} =$$
$$= \frac{-0{,}01 \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{2\,\mathrm{kg}} =$$
$$= -0{,}025\,\mathrm{m/s^2},$$

A kocsi lassan elindul hátrafelé.

5.9. feladat: Az ábrán látható tartón $G = 800\,\mathrm{N}$ súlyú teher függ. Mekkora erők hatnak a rudakban?



A rudak csuklókkal vannak a falhoz és egymáshoz erősítve. Azok mentén tetszőleges irányú és nagyságú erők hathatnak. A stabilitás miatt azonban a rudakban itt csak azok tengelyével párhuzamos erők hathatnak. Tegyük ugyanis fel, hogy a felső rúd nem vízszintes erővel hat a test felfüggesztési pontjára. Ha így lenne, akkor a felfüggesztési pont a rúdra szintén nem vízszintes irányban hatna az ellenerejével. Ez az erő pedig azt okozná, hogy a fenti rúd elfordulna a falba rögzített csukló körül, vagyis nem lenne nyugalomban a rendszer. Hasonló gondolatmenettel be lehet látni, hogy az alsó rúd is csak a tengelye mentén fejthet ki erőt.

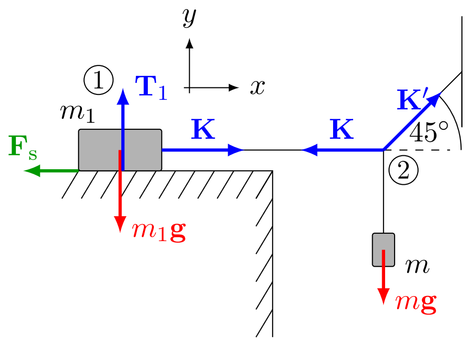
A felfüggesztési pontra felírva Newton II. törvényét:

$$x: \qquad 0 = K_1 \cos\alpha - K_2$$
$$y: \qquad 0 = K_1 \sin\alpha - G\,,$$

ahonnan

$$K_1 = \frac{G}{\sin\alpha} = \frac{800\,\mathrm{N}}{\frac{4\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m}}} = 1000\,\mathrm{N}$$
$$K_2 = K_1 \cdot \cos\alpha = 1000\,\mathrm{N} \cdot \frac{3\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m}} = 600\,\mathrm{N}\,.$$

5.26. feladat: Az m tömegű testet két fonál segítségével, az ábrán látható módon függesztünk fel. Az asztallapon fekvő test tömege $m_1 = 72\,\mathrm{kg}$, az asztal és közötte a súrlódási együttható $\mu = 0{,}25$. Mekkora m tömeg esetén van egyensúly?



Az egyensúly feltétele a testre (1):

$$x: \qquad K - F_s = 0,$$
$$y: \qquad T_1 - m_1 g = 0,$$

illetve tudjuk, hogy $F_s = \mu T_1$. A rögzítési pontra (2):

$$x: \qquad K_x' - K = K' \cos\alpha - K = 0,$$
$$y: \qquad K_y' - mg = K' \sin\alpha - mg = 0.$$

Az elsőből kifejezhető $K = F_s = \mu m_1 g$, amely beírható a második párba. Így $K' \cos\alpha - \mu m_1 g = 0$, azaz

$$K' = \frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha},$$

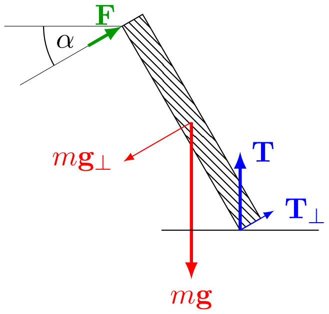
és az y-ra vonatkozó egyenlet:

$$\frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha} \sin\alpha - mg = 0.$$

Ebből a keresett tömeg:

$$m = \mu m_1 \mathrm{tg}\alpha = 0{,}25 \cdot 72\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{tg}45° = 18\,\mathrm{kg}.$$

5.20. feladat: Egy munkás $mg = 400\,\mathrm{N}$ súlyú, homogén tömegeloszlású deszkát egyik végénél fogva a vízszinteshez képest $\alpha = 30°$-os szögben tart. A deszka másik vége a földön fekszik. Mekkora erő szükséges ehhez, ha az általa kifejtett erő iránya merőleges a deszka egyenesére?



A forgás tengelye az a pont, ahol a földre ér a deszka csúcsa. Ha a deszka l hosszú, akkor a súlya $l/2$-nél hat, az emberi erő pedig l-nél. A forgatást jelentő merőleges komponens nagysága $mg_\perp = mg\sin\alpha$. Ez alapján a forgatónyomatékunk a deszkára:

$$\sum M = T_\perp \cdot 0 - mg_\perp \cdot \frac{l}{2} + F \cdot l,$$

ahol figyelembe vettük, ahogy az ellenkező irányú erők ellentétes forgatónyomatékot jelentenek. Az egyensúly feltétele, hogy $\sum M = 0$, azaz:

$$0 = T_\perp \cdot 0 - mg_\perp \cdot \frac{l}{2} + F \cdot l$$
$$0 = -mg_\perp \frac{1}{2} + F$$
$$F = \frac{mg_\perp}{2} = \frac{mg\sin\alpha}{2} = \frac{400\sin 30^\circ}{2} = 100\,\mathrm{N}????$$

DRS–>173 N**??**

Otthoni gyakorlásra:

3.10, 3.16, 3.5, 3.11, 3.13, 5.17, 5.36

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.