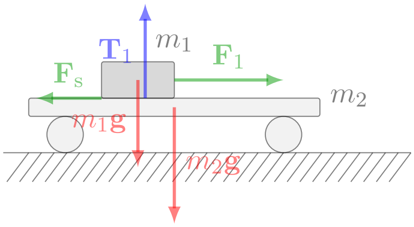
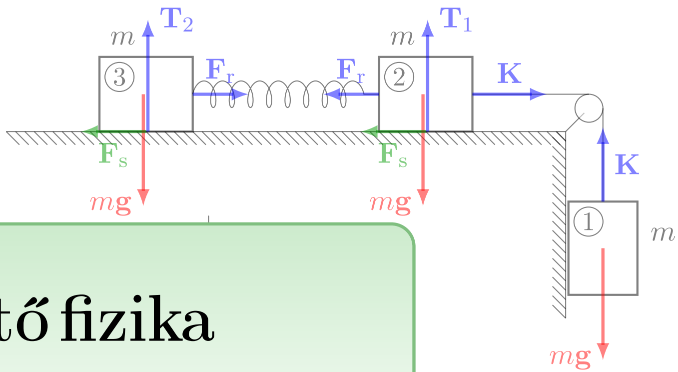
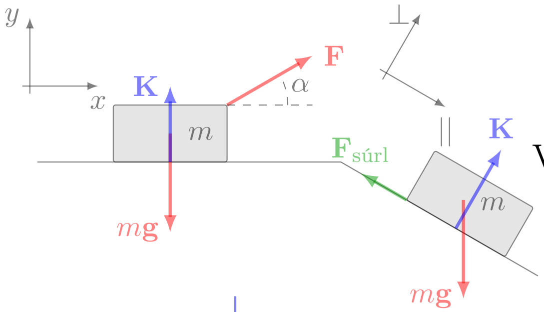
Utolsó módosítás 2015. február 3. 13:05



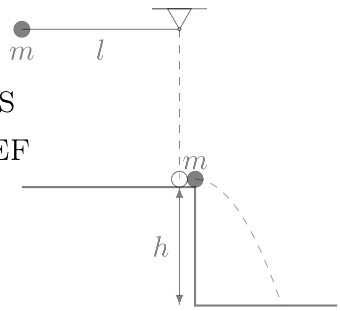


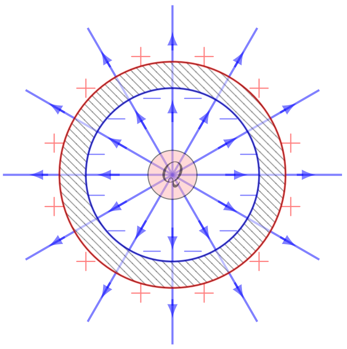
Bevezető fizika informatikusoknak

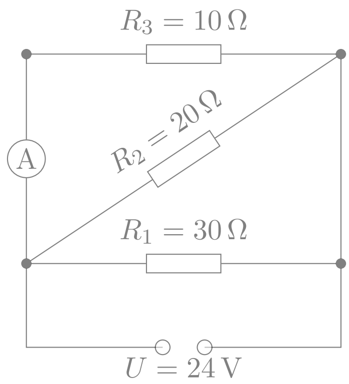
Kidolgozott példák gyűjteménye

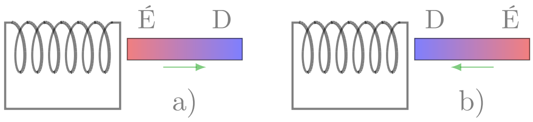


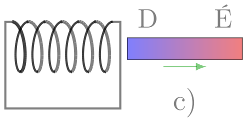
Nagyfalusi Balázs
Vida György József

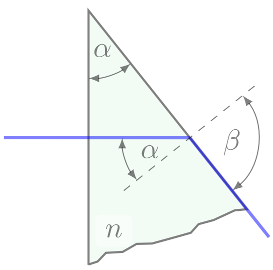


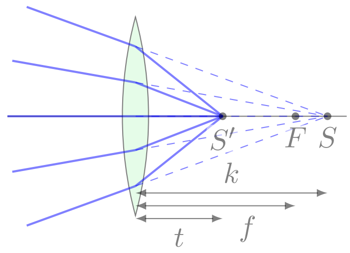












BME Fizikai Intézet
2015

Előszó

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen a frissen felvett mérnökhallgatók körében az utóbbi években megnövekedett az igény a középiskolai fizika összefoglalására, átismétlésére az egyetemi tanulmányok kezdetén. Így született meg a Bevezető fizika nevű tárgya, amelynek anyaga már állandósult az évek folyamán. A szerzők az idei őszi félév során úgy döntöttek, hogy az órákhoz készített jegyzeteiknek elkészítik az elektronikus változatát is a félév során. Ezek hétről hétre kikerültek a hallgatósághoz, azonban így a félév végén úgy döntöttünk, hogy egységes formába öntjük a részeket, és így született meg ez a mű.

Természetesen előfordulhatnak benne még hibák (sőt minden bizonnyal vannak még benne), és még egy-két helyen bővítésre szorul, de azért hasznos olvasmány lehet a tárgy hallgatói és persze minden érdeklődő számára.

Budapest, 2015. január Nagyfalusi Balázs és Vida György József

Bevezető fizika (info), 1. feladatsor

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- Alapfogalmak (út, sebesség, gyorsulás egyenes vonalú mozgásoknál)
- Az egyenes vonalú egyenletes mozgás
- Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás
- Mozgások függetlenségének elve
- szabadesés, hajítások a következő gyakorlat első felében!

Órai feladatok:

I/1.1. feladat:
Egyenletesen mozgó gyalogos sebessége $v = 4{,}5\,\mathrm{km/h}$. Mekkora utat tesz meg $t = 75$ perc alatt?

A megtett út:

$$s = v \cdot t = 4{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 75\,\mathrm{min} = 4{,}5 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} \cdot 75 \cdot 60\,\mathrm{s} = 5625\,\mathrm{m}\ .$$

I/1.6. feladat:
Két helyiség között a kocsik átlagsebessége az egyik irányban $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$, a másik irányban $v_2 = 60\,\mathrm{km/h}$. Mekkora az átlagsebesség egy teljes fordulót figyelembe véve?

Az átlagsebesség az teljes megtett út és az ehhez szükséges idő hányadosa. Legyen s a távolság a két település között. Ekkor a teljes megtett út $2s$. Az odaút és a visszaút időtartama:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} \qquad t_2 = \frac{s}{v_2}\ ,$$

vagyis az átlagsebesség:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}\ .$$

I/1.9. feladat:
Egy gépkocsi sebességét $v_1 = 54\,\mathrm{km/h}$-ról $v_2 = 90\,\mathrm{km/h}$-ra növelte állandó $a = 1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással. Mennyi ideig tartott ez, és mekkora utat tett meg a gépkocsi ezalatt?

Állandó gyorsulás esetén a sebesség megváltozása egyenlő a mindenkori gyorsulással, vagyis:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{36\,\frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}}{1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 6{,}25\,\mathrm{s}\ .$$

Az ezalatt megtett utat a négyzetes úttörvénnyel számolhatjuk

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0\ ,$$

ahol a a kocsi gyorsulása, v_0 a kezdeti időpontban a sebessége, vagyis $54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, és x_0 annak kezdeti pozíciója. Ez utóbbi legyen nulla, hiszen onnan kezdjük el mérni a megtett utat a gyorsítás végéig:

$$x(t) = \frac{1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(6{,}25\,\mathrm{s})^2 + 54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 6{,}25\,\mathrm{s} = 125\,\mathrm{m}\ .$$

I/1.39. feladat:
Egy test sebessége most $v_2 = -20\,\mathrm{m/s}$, $\Delta t = 100$ másodperccel ezelőtt $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$ volt. Mennyi volt a test átlagos gyorsulása?

Az átlaggyorsulás az adott idő alatt történt sebességváltozás és az ehhez szükséges idő hányadosa:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{-20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{100\,\mathrm{s}} = -0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ .$$

I/1.10. feladat:
$a = 2\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással induló gépkocsi elérve a $v_\mathrm{v} = 6\,\mathrm{m/s}$ sebességet egyenletesen mozog tovább. Milyen messze jut az indulástól számított $T = 8$ másodperc alatt?

Először számoljuk ki, hogy mennyi időre van szüksége az autónak, hogy elérje a v_v sebességet. Mivel a gyorsulás egyenletes, így

$$a = \frac{v_\mathrm{v}}{t_1} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{v_\mathrm{v}}{a} = \frac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 3\,\mathrm{s}\,.$$

Ez alatt az autó

$$s_1 = \frac{a}{2}t_1^2 = \frac{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}\cdot(3\,\mathrm{s})^2 = 9\,\mathrm{m}$$

távolságot tesz meg.

A hátralévő $t_2 = 8\,\mathrm{s} - 3\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{s}$ idő alatt az autó egyenletes mozgást végez. Az ezalatt megtett út:

$$s_2 = v_\mathrm{v}\cdot t_2 = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 5\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{m}\,.$$

Vagyis a teljes megtett távolság $s = 39\,\mathrm{m}$.

I/1.17. feladat:
Egy gépkocsi céljához vezető út felén $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$ állandó sebességgel halad. Mekkora legyen a sebessége az út másik felén (v_2), hogy az egész utat figyelembe véve átlagsebessége $\overline{v} = 50\,\mathrm{km/h}$ legyen?

Az átlagsebesség az összes megtett út és az ehhez szükséges idő hányadosa. Legyen a teljes út s hosszúságú. Az út első és második felének megtételéhez szükséges idő:

$$t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1}\,, \qquad t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{v_2}\,.$$

Az átlagsebesség tehát

$$\overline{v} = \frac{\frac{s}{2}+\frac{s}{2}}{t_1+t_2} = \frac{s}{\frac{\frac{s}{2}}{v_1}+\frac{\frac{s}{2}}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}\,,$$

ahonnan

$$v_2 = \frac{1}{\frac{2}{\overline{v}}-\frac{1}{v_1}} = \frac{1}{\frac{2}{50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}-\frac{1}{40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}} = 66{,}7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

I/1.21. feladat:
Egy gépkocsi $a = 2{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ állandó gyorsulással indul, majd egyenletesen halad tovább, és $t = 5$ másodperc alatt $s = 29{,}4$ méter messzire jut. Határozzuk meg a gyorsulás időtartamát!

Gyorsítson az autó t_1 ideig. Mivel az autó álló helyzetből indul, így az ezalatt megtett távolság:

$$s_1 = \frac{a}{2}t_1^2\,.$$

Ez idő alatt az autó $v_\mathrm{v} = a\cdot t_1$ sebességre tett szert. Az idő hátralevő részében ekkora sebességgel halad egyenletesen, és

$$s_2 = v_\mathrm{v}\cdot t_2 = a\cdot t_1\cdot(t-t_1)$$

távot tesz meg. Összefoglalva

$$\begin{aligned}
s = s_1+s_2 &= \frac{a}{2}t_1^2 + a\cdot t_1\cdot(t-t_1)\\
&= -\frac{a}{2}t_1^2 + a\cdot t_1\cdot t\\
0 &= \frac{a}{2}t_1^2 - at\cdot t_1 + s\\
0 &= 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t_1^2 - 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t_1 + 29{,}4\,\mathrm{m}\\
(t_1)_{1,2} &= \frac{14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{\left(14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 4\cdot 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 29{,}4\,\mathrm{m}}}{2\cdot 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\\
&= \begin{cases} 7\,\mathrm{s} \\ 3\,\mathrm{s} \end{cases}\,.
\end{aligned}$$

A két megoldás közül csak a $t_1 = 3\,\mathrm{s}$ az értelmes, hiszen a teljes időtartam $5\,\mathrm{s}$.

I/1.33. feladat:
A folyó szélessége $d = 200\,\mathrm{m}$, sebessége $v_\mathrm{f} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$. Hol köt ki a túlsó parton az átkelő csónak, ha a vízhez viszonyított sebességének nagysága $v_\mathrm{cs} = 3\,\mathrm{m/s}$, iránya a víz folyásának irányára merőleges?

A csónak $t = \frac{d}{v_\mathrm{cs}} = \frac{200\,\mathrm{m}}{3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{200}{3}\,\mathrm{s}$ alatt ér át a másik partra. Eközben a folyó $d = v_\mathrm{f}\cdot t = 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot\frac{200}{3}\,\mathrm{s} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{200}{3}\,\mathrm{s} = 66{,}7\,\mathrm{m}$ viszi le a csónakot a folyásirányba. Tehát a csónak ennyivel lejjebb fog kikötni a túloldalon.

I/1.37. feladat:
$v_\mathrm{v} = 72\,\mathrm{km/h}$ sebességgel haladó vonaton egy utas a vonat mozgásával ellentétes irányban elindul a vonathoz viszonyított $a_\mathrm{e} = 0{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással. Három másodperc alatt mekkora a pályatesthez viszonyított elmozdulása?

A pályatesthez viszonyítva az ember egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A négyzetes úttörvényt használva:

$$s = -\frac{a_\mathrm{e}}{2}t^2 + v_\mathrm{v}t = -\frac{0{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}\cdot(3\,\mathrm{s})^2 + 72\cdot\frac{1000}{3600}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 3\,\mathrm{s} = 56{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

Otthoni gyakorlásra:

I/1.20. feladat:
Egy személyautóval három különböző gyorsaságpróbát végeztek.

a) Az autó álló helyzetből indulva $t_0 = 19{,}3\,\mathrm{s}$ alatt érte el a $v_\mathrm{v} = 80\,\mathrm{km/h}$ sebességet.

b) Álló helyzetből indulva $T = 24{,}5\,\mathrm{s}$ alatt tett meg $s = 400\,\mathrm{m}$ távolságot.

c) $T = 15\,\mathrm{s}$ alatt növelte sebességét $v_1 = 60\,\mathrm{km/h}$-ról $v_2 = 90\,\mathrm{km/h}$-ra.

Mekkora volt az átlagos gyorsulás egy-egy kísérletben?

I/1.22. feladat:
Egy $v_0 = 54\,\mathrm{m/s}$ sebességgel mozgó versenyautó $T = 1{,}8$ másodpercig fékez. Mekkora a sebessége a fékezés után, és mekkora utat tett meg a fékezés alatt, ha a fékezés közben $a = -6\,\mathrm{m/s^2}$ a gyorsulása?

I/1.23. feladat:
Egymástól 10 km távol lévő állomások közözz az utat egy vonat 10 per 30 másodperc alatt teszi meg. Induláskor 90 másodpercig gyorsít állandó gyorsulással, fékezéskor 70 másodpercig lessít, szintén állandó gyorsulással. Mekkora a vonat sebessége a nyílt pályán?

I/1.30. feladat:
Egy folyón két motorcsónak közül az egyik a folyón lefelé, a másik felfelé halad. Vízhez viszonyított sebességük különböző. Mozgásuk közben egyszerre haladnak el egy, a folyón úszó farönk mellett. A rönköt elhagyva, mindkét csónak azonos ideig távolodik attól, majd visszafordulnak. Melyik ér előbb a rönkhöz?

I/1.31. feladat:
Ha lassan mozgó vasúti kocsi mellett a kocsival egy irányban haladunk, a kocsit 17 lépés, ellentétes irányban haladva 12 lépés hosszúnak találjuk. Hány lépés a kocsi hossza? A kocsi és a mérő személy sebessége állandó, s az utóbbi a nagyobb.

I/1.41. feladat:
Egy test sebessége most $20\,\mathrm{m/s}$, 100 másodperc múlva $-20\,\mathrm{m/s}$. Mennyi az ez idő alatti átlagos gyorsulás?

I/B.1.. feladat:
Egy személyautó nyugalmi helyzetből indulva $1\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással indít, amikor a forgalmi lámpa zöldre vált. Ugyanabba a pillanatban elhalad mellette egy teherautó $10\,\mathrm{m/s}$ sebességgel.

a) Mennyi idővel később éri utol a személyautó a teherautót?

b) Ekkor milyen messze lesznek a forgalmi lámpától?

c) Mekkora a személyautó sebessége, miközben megelőzi a teherautót?

I/F.1.. feladat:
Egy egyenletesen gyorsuló autó 80 m úton növelte sebességét $10\,\mathrm{m/s}$-ról $20\,\mathrm{m/s}$-ra. Mekkora úton érte el előzőleg a $10\,\mathrm{m/s}$ sebességet, ha nyugalmi helyzetből indult, s gyorsulása végig állandó volt?

A feladatok forrása a Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (infó), 2. feladatsor
Kinematika 2. és Dinamika 1.

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- Röviden beszéljük meg az otthoni felkészülés során felmerült kérdéseket.
- szabadesés, hajítások (kb. 10 perc)
- Az erő, az erők összegezése; Newton törvényei; testek egyensúlya; tömeg, nehézségi erő, súly, súlytalanság. súrlódás

Órai feladatok:

II/1.13. feladat:
A talaj fölött $h_0 = 30$ méter magasságból $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel kavicsot dobunk függőlegesen fölfelé. Mekkora a kavics sebessége, elmozdulása és a megtett út $t_1 = 1\,\mathrm{s}, t_2 = 3\,\mathrm{s}; t_3 = 5\,\mathrm{s}$ múlva.

A kavics útja a következő. Először felfelé megy, eléri a maximális magasságot, majd elindul lefelé és eléri a talajt. Ez két nevezetes időpontot jelent, egyet a csúcson (t_{fel}), és az út végén ($t_{\mathrm{össz}}$). t_{fel} meghatározható a kezdeti sebességtől, és a lassulásból:

$$t_{\mathrm{fel}} = \frac{v_0}{g} = \frac{20\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 2\,\mathrm{s}.$$

Ez alapján az első időpontban még emelkedett. A sebessége $v_1 = v_0 - gt = 20\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m/s}$. A megtett út

$$\begin{aligned} s_1 =& v_0 t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} - \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(1\,\mathrm{s})^2 \\ =& 15\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

és végig azonos irányban haladt, így az elmozdulás megegyezik az úttal. A maximális magasság:

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{fel}} =& v_0 t_{\mathrm{fel}} - \frac{g}{2} t_1^2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 2\,\mathrm{s} - \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(2\,\mathrm{s})^2 \\ =& 20\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

tehát összesen $H = h_0 + s_{\mathrm{fel}} = 50\,\mathrm{m}$ magasra jutott, ahonnan a leeséshez szükséges idő meghatározható a $H = \frac{g}{2} t_{\mathrm{le}}^2$ összefüggésből:

$$t_{\mathrm{le}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{10}\,\mathrm{s} > 3\,\mathrm{s},$$

azaz az ötödik másodpercben még repülni fog. Tehát 2 másodpercig emelkedett, így t_2-ig még 1-et zuhant. A megtett út:

$$s_{22} = \frac{g}{s}(t_2 - t_{\mathrm{fel}})^2 = \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s})^2 = 5\,\mathrm{m},$$

összesen $s_2 = s_{\mathrm{fel}} + s_{22} = 25\,\mathrm{m}$. Az elmozdulás $r_2 = s_{\mathrm{fel}} - s_{22} = 15\,\mathrm{m}$. A sebessége ekkor $v_2 = -g(t_2 - t_{\mathrm{fel}}) = -10\,\mathrm{m/s}$, ahol figyelembe vettük, hogy a pozitív irány függőlegesen felfelé választottuk.

t_3 időpillanatig $t_3 - t_{\mathrm{fel}}$-t zuhan. A keresett értékek:

$$s_{32} = \frac{g}{s}(t_3 - t_{\mathrm{fel}})^2 = \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s})^2 = 45\,\mathrm{m},$$

összesen $s_3 = s_{\mathrm{fel}} + s_{32} = 65\,\mathrm{m}$. Az elmozdulás $r_2 = s_{\mathrm{fel}} - s_{32} = -25\,\mathrm{m}$. A sebessége ekkor $v_3 = -g(t_3 - t_{\mathrm{fel}}) = -30\,\mathrm{m/s}$.

II/1.19. feladat:
Az esőcseppek függőleges irányban esnek $v_{\mathrm{eső}} = 6\,\mathrm{m/s}$ sebességgel. Az esőcseppek nyomai a vonatablakon a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró csíkok. Milyen gyorsan megy a vonat?

A vonatablakon lévő csíkok az esőcseppek látszólagos sebességvektorával egy irányba mutatnak. Az esőcseppek függőleges sebességvektora, illetve a vonat vízszintes sebességvektora egy derékszögű háromszöget határoz meg, ahol a háromszög átfogójának hossza megegyezik a cseppek látszólagos, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró sebességvektorának hosszával. A háromszögben a megfelelő szögfüggvényt felírva:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{\mathrm{eső}}}{v_{\mathrm{vonat}}}$$

$$v_{\text{vonat}} = \frac{v_{\text{eső}}}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\operatorname{tg}30^\circ} = 10{,}39\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\ .$$

II/1.15. feladat:
Határozzuk meg a $v_0 = 120\,\text{m/s}$ kezdősebességgel $\alpha = 30^\circ$-os szögben kilőtt test helyzetét a kilövés után 3 másodperccel!

A test vízszintes irányban egyenletes mozgást végez:

$$x(t) = v_{0x}t + x_0\ ,$$

ahol v_{0x} a kezdősebesség vízszintes komponense: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$. Az x_0 a $t = 0$ pillanatban a test helye. Helyezzük a koordináta-rendszerünket oda, ahonnan elhajítjuk a testet, így $x(t = 0) = 0$, vagyis $x_0 = 0$.

Függőleges irányban a test egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Az y tengely felfelé mutat, így a gyorsulás negatív:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0\ ,$$

ahol v_{0y} a függőleges kezdősebesség: $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$, illetve az előzőekhez hasonlóan y_0 itt is nulla.

A mozgást leíró két egyenlet tehát:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$
$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t\ .$$

A $t = 3\,\text{s}$-ban:

$$x(3\,\text{s}) = 120\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 30^\circ \cdot 3\,\text{s} = 311{,}77\,\text{m}$$
$$y(3\,\text{s}) = -\frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}(3\,\text{s})^2 + 120\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 30^\circ \cdot 3\,\text{s} = 135\,\text{m}\ .$$

II/1.14. feladat:
$h = 200$ méter magasságban $v_0 = 360\,\text{km/h}$ sebességgel haladó repülőgépről a cél előtt milyen távolságban kellene kioldani a segélycsomagot ahhoz, hogy a célba csapódjék, ha nem lenne légellenállás? Mekkora lenne a segélycsomag sebessége a becsapódás pillanatában?

Függőlegesen a csomag egyenletes gyorsulással mozog, vagyis a magassága az idő függvényében:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h\ .$$

T idő alatt ez a magasság nullára csökken:

$$0 = -\frac{g}{2}T^2 + h \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6{,}32\,\text{s}.$$

A csomag vízszintes kezdősebessége megegyezik a repülő sebességével, és ez a csomag mozgása során nem is változik. Emiatt, ha T idő alatt ér földet a csomag, akkor az vízszintesen $s = v_0 \cdot T$ távolságot tesz meg. Ez alapján

$$0 = -\frac{g}{2}\frac{s^2}{v_0^2} + h \qquad \Rightarrow \qquad s = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}} = 632{,}45\,\text{m}\ .$$

A függőlegesen szerzett sebessége: $v_y = -gT = -63{,}2\,\text{m/s}$, vízszintesen pedig maradt $v_x = v_0$. Az eredő sebesség nagysága:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 118{,}32\,\text{m/s}.$$

II/2.14. feladat:
Milyen erő hat az eldobott kőre? Mekkora a gyorsulása?

Nehézségi erő, közegellenállás. $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

II/2.3. feladat:
A $v_0 = 9\,\text{m/s}$ sebességgel elütött korong a jégen $s = 36\,\text{m}$ út megtétele után áll meg. Mekkora a súrlódási együttható a korong és a jég között?

A korong egyenletesen lassult, átlagsebessége $v_{\text{átl}} = \frac{v_0}{2} = 4{,}5\,\text{m/s}$. Ez alapján a megállásig eltelt idő

$$t = \frac{s}{v_{\text{átl}}} = \frac{36\,\text{m}}{4{,}5\,\text{m/s}} = 8\,\text{s}.$$

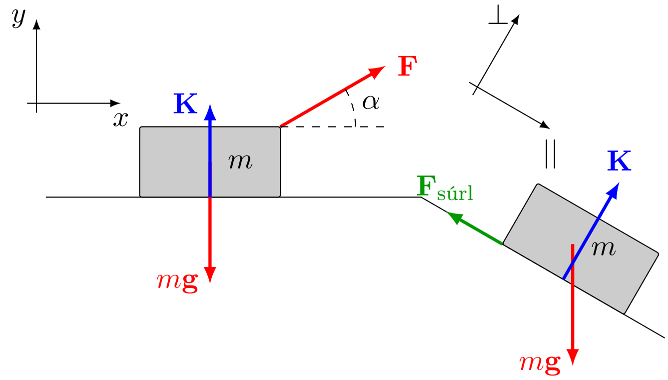
A gyorsulása

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0\,\text{m/s} - 9\,\text{m/s}}{8\,\text{s}} = -\frac{9}{8}\,\text{m/s}^2.$$

Newton szerint $ma = -F_{\text{súrl}} = -\mu F_{\text{nyomó}} = -\mu mg$, azaz

$$\mu = -\frac{a}{g} = \frac{9/8}{10} = 0{,}1125.$$

II/2.4. feladat:
Milyen erők hatnak egy vízszintes lapon és egy lejtőn nyugvó testre? (Készítsen ábrát!)
$m = 10\,\text{kg}$ tömegű testet a vízszintessel $\alpha = 30^\circ$-os szöget bezáró $F = 20\,\text{N}$ erővel húzunk. Mekkora a test gyorsulása, ha a csúszási súrlódási tényező értéke $\mu = 0{,}1$?



A Newton-törvények, figyelembe véve, hogy függőlegesen nem mozdulunk el:

$$
\begin{aligned}
x: &\qquad ma = F\cos\alpha - F_{\text{súrl}} \\
y: &\qquad 0 = F\sin\alpha - mg + K
\end{aligned}
$$

A második alapján a kényszererő nagysága:

$$
\begin{aligned}
K &= mg - F\sin\alpha = 10\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} - 20\,\mathrm{N}\cdot\sin 30^\circ \\
&= 90\,\mathrm{N},
\end{aligned}
$$

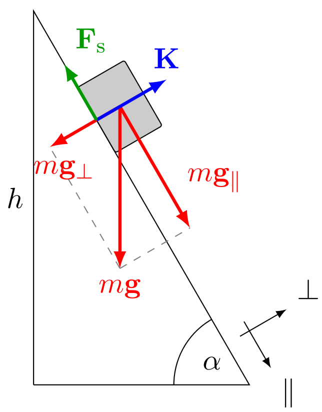
amelyet már behelyettesíthetünk az elsőbe, hiszen $F_{\text{súrl}} = \mu K$, és a gyorsulásra azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{m}\left(F\cdot\cos\alpha - \mu K\right) \\
&= \frac{1}{10\,\mathrm{kg}}\left(20\,\mathrm{N}\cdot\cos 30^\circ - 0{,}1\cdot 90\,\mathrm{N}\right) = \\
&= 0{,}832\,\mathrm{m/s^2}.
\end{aligned}
$$

II/2.12. feladat:
$h = 10\,\mathrm{m}$ magas, $\alpha = 60^\circ$-os lejtő tetejéről csúszik le egy test. Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt ér le a lejtő aljára, ha

a) a lejtő súrlódásmentes,

b) a lejtő és a test közötti súrlódási együttható $\mu = 0{,}5$?



a) Írjuk fel a Newton-törvényt a lejtőről lecsúszó testre, a lejtővel párhuzamos és arra merőleges irányban:

$$
\begin{aligned}
\parallel &\qquad ma_\parallel = mg_\parallel = mg\sin\alpha \\
\perp &\qquad ma_\perp = K - mg_\perp = K - mg\cos\alpha\,,
\end{aligned}
$$

Mivel a test a lejtőn csúszik, így arra merőlegesen nincsen elmozdulás, azaz $a_\perp = 0$. Az előző egyenletből adódik, hogy test gyorsulása a lejtő mentén $a_\parallel = g\cdot\sin\alpha$.

A lejtő hossza $s = \frac{h}{\sin\alpha}$, így a lecsúszás ideje:

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{a}{2}T^2 \\
\frac{h}{\sin\alpha} &= \frac{a\sin\alpha}{2}T^2 \\
T &= \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\sin^2 60^\circ}} = 1{,}63\,\mathrm{s}\,,
\end{aligned}
$$

illetve a test sebessége a lejtő alján:

$$
\begin{aligned}
v_{\text{vég}} &= a\cdot T = g\sin\alpha\cdot T = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 60^\circ\cdot 1{,}63\,\mathrm{s} \\
&= 14{,}14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.
\end{aligned}
$$

b) Ha van súrlódás a lejtőn, akkor a Newton-egyenletek kiegészülnek:

$$
\begin{aligned}
\parallel &\qquad ma_\parallel = mg_\parallel - F_{\mathrm{s}} = mg\sin\alpha - \mu K \\
\perp &\qquad ma_\perp = K - mg_\perp = K - mg\cos\alpha\,,
\end{aligned}
$$

ahol a második egyenletből kifejezhető K,

$$
0 = K - mg\cos\alpha \qquad\Rightarrow\qquad K = mg\cos\alpha\,,
$$

majd az elsőbe helyettesíthető:

$$
a_\parallel = g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\,.
$$

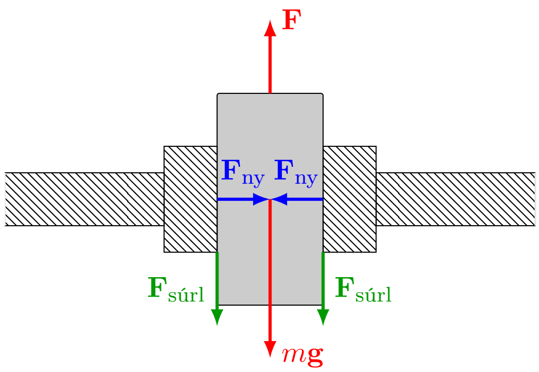
A lecsúszás ideje:

$$
\begin{aligned}
T &= \sqrt{\frac{2h}{g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\cdot\sin\alpha}} \\
&= \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\big(\sin 60^\circ - 0{,}5\cdot\cos 60^\circ\big)\cdot\sin 60^\circ}} \\
&= 1{,}94\,\mathrm{s}\,,
\end{aligned}
$$

illetve a test sebessége a lejtő alján:

$$
\begin{aligned}
v_{\text{vég}} &= a_\parallel\cdot T = g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\cdot T \\
&= 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\big(\sin 60^\circ - 0{,}5\cdot\cos 60^\circ\big)\cdot 1{,}94\,\mathrm{s} \\
&= 11{,}93\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.
\end{aligned}
$$

II/2.11. feladat:
$m\mathbf{g} = 50\,\mathrm{N}$ súlyú tégla alakú testet satuba fogunk. A satupofák $F_{\mathrm{ny}} = 150\,\mathrm{N}$ nagyságú vízszintes erővel nyomják a testet. Az érintkező felületek között $\mu = 0{,}5$ a súrlódási tényező. Mekkora erővel lehet a testet felfelé kihúzni?



A tapadási súrlódás maximális értéke $F_{\mathrm{tap}}^{\max} = \mu F_{\mathrm{ny}} = 0{,}5 \cdot 150\,\mathrm{N} = 75\,\mathrm{N}$. Két satuval ez $150\,\mathrm{N}$ erőt jelent. Ezen felül még ott van a tégla súlya, tehát a három erő összegét kell az F erőnek ellensúlyoznia. Így a kapott eredmény az, hogy

$$F \geq 2F_{\mathrm{tap}}^{\max} + mg = 200\,\mathrm{N}$$

Otthoni gyakorlásra:

II/A1. feladat:
Egy követ függőlegesen felfelé, egy másik követ függőlegesen lefelé hajítunk $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ sebességgel, ugyanabban a pillanatban, Mennyi idő múlva lesznek egymástól $x = 60$ méter távolságban?

II/1.28. feladat:
$20\,\mathrm{m}$ magas ház tetejéről $12\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel ferdén felfelé elhajítunk egy testet. A vízszintessel bezárt szög $30°$. Mennyi idő múlva és aháztól mekkora távolságban ér földet, ha a közegellenállástól eltekintünk? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)

II/1.50. feladat:
A gravitációs gyorsulás értéke a Holdon a földi érték egyhatod része.
A; Hányszor magasabbra,
B; hányszor messzebbre száll az azonos kezdősebességgel ferdén elhajított kő a Holdon, mint a Földön?
C; Mennyi ideig repül a Holdon a földi repülési időhöz képest?

II/2.28. feladat:
Könnyen gördülő kiskocsira szerelt állványon fonálinga függ. Milyen irányú a fonál, ha a kocsi vízszintes síkon
a. egyenletesen halad,
b. a gyorsulással mozog?

II/?. feladat:
Egy testet $5\,\mathrm{N}$ állandó erővel tudunk egyenletesen felfelé húzni egy $\alpha = 30°$ hajlásszögű lejtőn. Ugyanezen a lejtőn lefelé szabadon csúszva a test $5\,\mathrm{m/s}$ sebességről $5\,\mathrm{m}$ hosszú úton áll meg. Mekkora a test tömege? Mekkora a súrlódási tényező?

II/2.7. feladat:
Mekkora az emelődaru kötelében fellépő húzóerő egy $100\,\mathrm{kg}$ tömegű gépalkatrész süllyesztésekor, illetőleg emelésekor, ha a gyorsulás nagysága minden esetben $2\,\mathrm{m/s^2}$. A kötél és a végén levő horogszerkezet súlya elhanyagolható.

II/2.6. feladat:
Egy test kelet felé mozog és nyugat felé gyorsul. Lehetséges ez? Milyen irányú az erő?

A feladatok forrása a Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (infó), 3. feladatsor
Dinamika 2. és Statika

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- impulzus, impulzusmegmaradás
- forgatónyomaték
- egyensúly és feltétele

Órai feladatok:

III/2.15. feladat:
$F = 50\,\mathrm{N}$ nagyságú erő hat egy testre $t = 10\,\mathrm{s}$-ig. A test erő irányú sebessége közben $v = 5\,\mathrm{m/s}$-mal növekszik. Mekkora a test tömege? A feladatot az impulzustétel segítségével oldjuk meg.

Az impulzustétel: $\mathbf{F}t = \mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Az erő és sebesség egy egyenesbe esik, így a vektor jelzés elhagyása, és átrendezés után a test tömege:

$$m = \frac{Ft}{v} = \frac{50\,\mathrm{N} \cdot 10\,\mathrm{s}}{5\,\mathrm{m/s}} = 100\,\mathrm{kg}.$$

III/3.6. feladat:
A rakománnyal együtt $M = 1$ tonna tömegű vasúti pályakocsi vízszintes pályán $v = 10\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad. Mozgás közben a kocsin ülő emberek lelöknek egy $m = 100\,\mathrm{kg}$ tömegű síndarabot, amely függőlegesen esik a talpfákra. Mekkora sebességgel halad tovább a pályakocsi, ha a súrlódástól eltekinthetünk?

Oldjuk meg impulzusmegmaradással. Kezdetben az egész rendszerben van $p = Mv$, a ledobás után $p' = (M - m)v' + m \cdot 0$. A kettő egyenlőségéből a sebesség:

$$v' = \frac{M}{M-m}v = \frac{1000\,\mathrm{kg}}{1000\,\mathrm{kg} - 100\,\mathrm{kg}}10\,\mathrm{m/s} = \\ = 11{,}\dot{1}\,\mathrm{m/s}.$$

III/3.14. feladat:
A $m_1 = 120\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_1| = 40\,\mathrm{cm/s}$ sebességű és a $m_2 = 80\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_2| = 100\,\mathrm{cm/s}$ sebességű két test egymással szembe mozog egy egyenes mentén. Teljesen rugalmatlan ütközés után mekkora és milyen irányú sebességgel mozognak tovább?

Jelöljük ki a pozitív irányt úgy, hogy az első test mozgásával megegyező legyen. Az ütközés előtt az összimpulzus:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

utána:

$$p' = (m_1 + m_2)v',$$

és persze tudjuk, hogy a kettőnek meg kell egyeznie. Ezért a sebesség:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{0{,}12\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}4\,\mathrm{m/s} + 0{,}08\,\mathrm{kg} \cdot (-1\,\mathrm{m/s})}{0{,}12\,\mathrm{kg} + 0{,}8\,\mathrm{kg}} = \\ &= -0{,}16\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

A sebesség előjele alapján a második test sebességének irányában mozognak együttesen.

III/3.32. feladat:
Az $H = 1000\,\mathrm{m}$ magasan lebegő léggömbről $m = 80\,\mathrm{kg}$ tömegű bombát ejtenek le. A bomba $h = 600\,\mathrm{m}$ esés után két részre robban szét. Az egyik, $m_1 = 30\,\mathrm{kg}$ tömegű rész a robbanás pillanatában vízszintes irányban $v_1 = 200\,\mathrm{m/s}$ sebességet kap. Hol éri el a talajt a másik rész? (A légellenállástól tekintsünk el.)

Kövessük a bomba mozgását. Az első szakasz h hosszú, és egyenletesen gyorsulva tesszük meg, azaz

$$h = \frac{g}{2}t_1^2 \qquad \rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

A teljes magasság leeséséhez:

$$H = \frac{g}{2}t^2 \qquad \rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

így a robbanás után még

$$t_2 = t - t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - t = \sqrt{\frac{2H}{g}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1000\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m/s^2}}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 600\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m/s^2}}} = 3{,}19\,\mathrm{s}$$

időt mozog.

A robbanásra felírhatunk egy impulzusmegmaradást, azaz előtte $p = m \cdot 0$, utána $p' = m_1 v_1 + (m - m_1)v_2$. Az egyenlőség alapján:

$$v_2 = -\frac{m_1}{m - m_1}v_1 = -\frac{30\,\mathrm{kg}}{80\,\mathrm{kg} - 30\,\mathrm{kg}}200\,\mathrm{m/s} =$$
$$= -120\,\mathrm{m/s}.$$

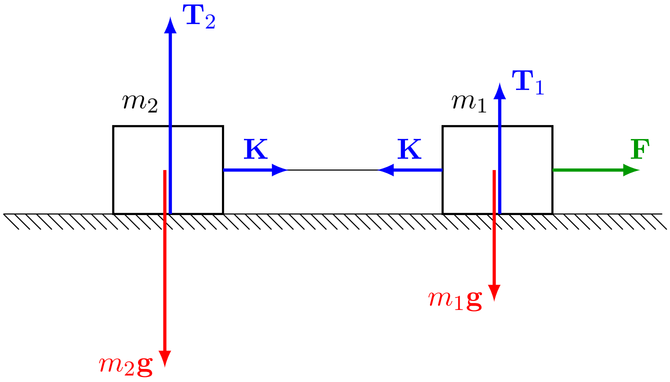
Az elmozdulás az eltelt idő és a fenti sebesség szorzata:

$$s_2 = t_2 v_2 = -382{,}5\,\mathrm{m}.$$

III/3.1. feladat:
Ha az erő és az ellenerő egyenlő nagyságú és ellenkező irányú erők, miért nem „semmisítik meg" egymást?

Mert nem ugyanarra hatnak.

III/3.2. feladat:
Vízszintes irányú, $F = 8\,\mathrm{N}$ nagyságú erővel hatunk az $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ tömegű testre, amely egy fonállal az $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ tömegű testhez van kötve az ábrán látható elrendezésben. Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a fonál tömegétől és a súrlódástól eltekintünk?



Itt is először felírjuk az egyes testekre a Newton-törvényt függőleges és vízszintes irányban:

$$\begin{aligned}
1{,}x: &\quad m_1 a_{1x} = F - K \\
1{,}y: &\quad m_1 a_{1y} = T_1 - m_1 g \\
2{,}x: &\quad m_2 a_{2x} = K \\
2{,}y: &\quad m_2 a_{2y} = T_2 - m_2 g\,.
\end{aligned}$$

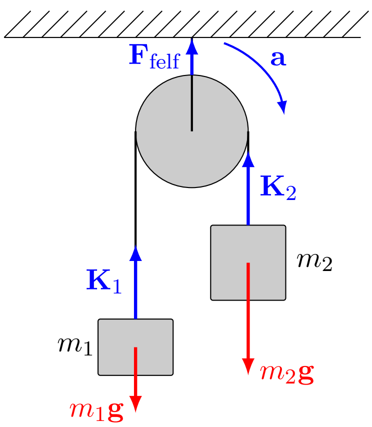
Mivel függőleges elmozdulás nincs, így $a_{1y} = a_{2y} = 0$. A két testet összekötő kötél nyújthatatlan, így a két test gyorsulása minden pillanatban ugyanakkora: $a_{1x} = a_{2x} = a$. Ezt egyszerűen meghatározhatjuk, ha összeadjuk a két x irányú egyenletet:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{8\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg} + 3\,\mathrm{kg}} = 1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Ezt felhasználva a kötelet feszítő erő 2,x egyenlet alapján:

$$K = m_2 a = 3\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4{,}8\,\mathrm{N}\,.$$

III/3.3. feladat:
Állócsigán átvetett fonál végein m_1 illetve m_2 tömegű test van. Mekkora gyorsulással mozog az egyik, illetve a másik test, és mekkora erő hat a mennyezetre, ahová a csigát felfüggesztették? A fonál és a csiga tömege elhanyagolható, a fonál nem nyúlik meg, a tengely nem súrlódik, a közegellenállás és a levegőben a felhajtó erő elhanyagolható.



Írjuk fel a testekre a kötél mentén, illetve a csigára függőleges irányban a Newton-törvényt:

$$\begin{aligned}
1: &\quad m_1 a = K_1 - m_1 g \\
2: &\quad m_2 a = m_2 g - K_2 \\
\mathrm{cs}: &\quad 0 = F_{\mathrm{felf}} - K_1 - K_2\,.
\end{aligned}$$

Mivel a kötél és a csiga ideális, ezért a két kötélerő nagysága megegyezik, $K_1 = K_2 = K$. Az első két egyenletből adódik:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \ .$$

Ha az m_2 test a nehezebb, akkor arra fog mozogni a rendszer, ha pedig a másik, akkor visszafelé. A kötélerő:

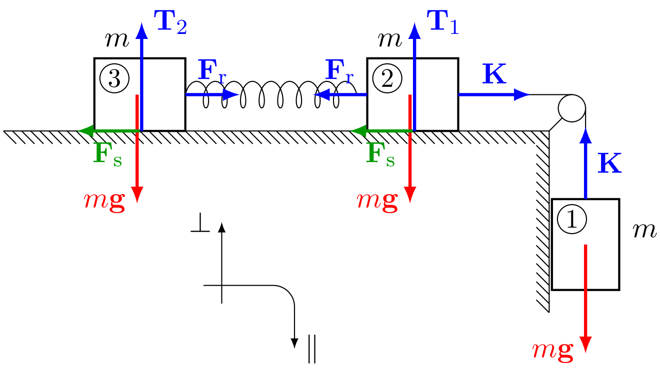
$$K = m_1 \cdot (a + g) = m_1 \cdot \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + 1 \right) g$$
$$= \frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g \ ,$$

vagyis a csiga a felfüggesztést

$$F_{\text{felf}} = 2K = \frac{4 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g$$

erővel húzza.

III/3.12. feladat:
Mennyivel nyúlik meg az ábra szerinti elrendezésben a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? A csiga, a rugó és a fonál tömegét ne vegyük figyelembe. Legyen $m = 1\,\text{kg}$, a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$, a rugóállandó $D = 4\,\text{N/cm}$.



Itt is felírjuk a Newton-törvényeket, figyelembe véve azt, hogy a rendszer csak az asztal felülete mentén mozog.

$$\begin{aligned}
1,\ \parallel: &\quad ma = mg - K \\
1,\ \perp: &\quad 0 = 0 \\
2,\ \parallel: &\quad ma = K - F_{\text{r}} - F_{\text{s},1} \\
2,\ \perp: &\quad 0 = T_1 - mg \\
3,\ \parallel: &\quad ma = F_{\text{r}} - F_{\text{s},2} \\
3,\ \perp: &\quad 0 = T_2 - mg \ ,
\end{aligned}$$

ahol $F_{\text{s},1} = \mu T_1$ és $F_{\text{s},2} = \mu T_2$. A merőleges egyenletekből a T tartóerőket meghatározva, majd behelyettesítve a párhuzamos irányokra felírt egyenletekbe:

$$\begin{aligned}
1,\ \parallel: &\quad ma = mg - K \\
2,\ \parallel: &\quad ma = K - F_{\text{r}} - \mu mg \\
3,\ \parallel: &\quad ma = F_{\text{r}} - \mu mg \ .
\end{aligned}$$

A három egyenlet összegéből:

$$a = \frac{1 - 2\mu}{3} g \ ,$$

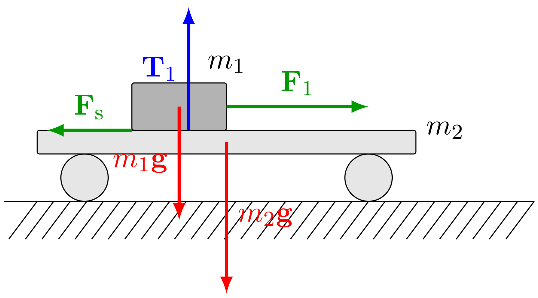
melyet visszahelyettesítve az utolsóba:

$$m \cdot \frac{1 - 2\mu}{3} g = F_{\text{r}} - \mu mg$$
$$F_{\text{r}} = \frac{1 + \mu}{3} \cdot mg \ .$$

Vagyis a rugó megnyúlása:

$$\Delta l = \frac{F_{\text{r}}}{D} = \frac{1 + \mu}{3} \frac{mg}{D} = \frac{1 + 0{,}2}{3} \frac{1\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 0{,}01\,\text{m} \ .$$

III/3.29. feladat:
A $m_2 = 2\,\text{kg}$ tömegű kiskocsi vízszintes síkon súrlódás nélkül mozoghat. A kocsira $m_1 = 0{,}5\,\text{kg}$ tömegű hasábot helyeztünk, és a hasábot $F_1 = 1\,\text{N}$ vízszintes irányú erővel húzzuk. Mekkora a hasáb, illetve a kocsi gyorsulása, ha közöttük a tapadási súrlódási együttható $\mu_{\text{tap}} = 0{,}25$, csúszó súrlódási együttható pedig $\mu_{\text{cs}} = 0{,}01$? Mekkora a gyorsulás $F_1' = 10\,\text{N}$-os húzóerő esetén? ($g \approx 10\,\text{m/s}^2$)



Számoljuk ki a maximális tapadási erőt. Ebből kiderül, hogy a kocsi és a test összetapadva marad, vagy egymáshoz képest elmozdul. Tehát:

$$F_{\text{tap}} = \mu_{\text{tap}} T_1 = \mu_{\text{tap}} m_1 g = 0{,}25 \cdot 0{,}5\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 =$$
$$= 1{,}25\,\text{N},$$

azaz az első esetben $F_1 < F_{\text{tap}}$, így egyben maradnak.
A talajon nincsen súrlódás, így csak az F_1 gyorsító erő számít: $F_1 = (m_1 + m_2)a$, amelyből:

$$a = \frac{F_1}{m_1 + m_2} = \frac{1\,\text{N}}{0{,}5\,\text{kg} + 2\,\text{kg}} = 0{,}4\,\text{m/s}^2.$$

A második esetben $F_1' > F_{\text{tap}}$, azaz külön mozognak.
A test mozgásegyenlete: $F_1' - F_s = m_1 a_1'$, azaz:

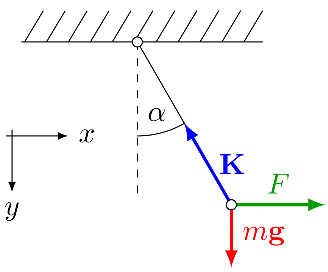
$$a_1' = \frac{F_1' - F_s}{m_1} = \frac{F_1' - \mu_{\text{cs}} m_1 g}{m_1} = \\ = \frac{10\,\text{N} - 0{,}01 \cdot 0{,}5\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2}{0{,}5\,\text{kg}} = \\ = 19{,}9\,\text{m/s}^2.$$

A kocsira $-F_s = m_2 a_2'$, amelyből:

$$a_2' = \frac{-F_s}{m_2} = \frac{-\mu_{\text{cs}} m_1 g}{m_2} = \\ = \frac{-0{,}01 \cdot 0{,}5\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2}{2\,\text{kg}} = \\ = -0{,}025\,\text{m/s}^2,$$

A kocsi lassan elindul hátrafelé.

III/5.1. feladat:
Fonálra függesztett $mg = 20\,\text{N}$ súlyú golyót vízszintes irányban oldalt húzunk. Mekkora erővel húzza a fonál a testet, ha az a függőlegessel $\alpha = 30°$-os szöget zár be?



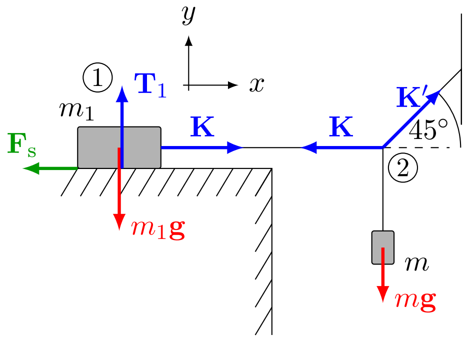
Az egyensúly feltétele:

$$x: \quad F - K_x = F - K\sin\alpha = 0$$
$$y: \quad mg - K_y = mg - K\cos\alpha = 0$$

A másodikból kifejezhető a kötélerő:

$$K = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{20\,\text{N}}{\cos 30°} = 23{,}09\,\text{N}.$$

III/5.26. feladat:
Az m tömegű testet két fonál segítségével, az ábrán látható módon függesztünk fel. Az asztallapon fekvő test tömege $m_1 = 72\,\text{kg}$, az asztal és közötte a súrlódási együttható $\mu = 0{,}25$. Mekkora m tömeg esetén van egyensúly?



Az egyensúly feltétele a testre (1):

$$x: \quad K - F_s = 0,$$
$$y: \quad T_1 - m_1 g = 0,$$

illetve tudjuk, hogy $F_s = \mu T_1$. A rögzítési pontra (2):

$$x: \quad K_x' - K = K'\cos\alpha - K = 0,$$
$$y: \quad K_y' - mg = K'\sin\alpha - mg = 0.$$

Az elsőből kifejezhető $K = F_s = \mu m_1 g$, amely beírható a második párba. Így $K'\cos\alpha - \mu m_1 g = 0$, azaz

$$K' = \frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha},$$

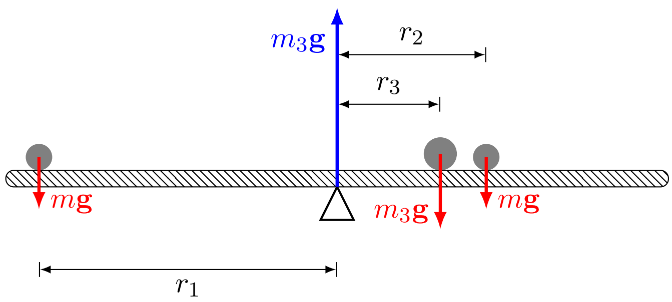
és az y-ra vonatkozó egyenlet:

$$\frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha}\sin\alpha - mg = 0.$$

Ebből a keresett tömeg:

$$m = \mu m_1 \text{tg}\alpha = 0{,}25 \cdot 72\,\text{kg} \cdot \text{tg}45° = 18\,\text{kg}.$$

III/5.10. feladat:
Mérleghinta két oldalán egy-egy $mg = 450\,\text{N}$ súlyú gyerek ül. Egyikük $|r_1| = 3\,\text{m}$, másikuk $|r_2| = 1{,}5\,\text{m}$ távolságra van a forgástengelytől.
a) Hová üljön még egy $m_3 g = 650\,\text{N}$ súlyú gyerek ahhoz, hogy a hinta egyensúlyban legyen?
b) Mekkora ebben az esetben az alátámasztási pontra ható erő? (A hintát tekintsük súlytalannak!)



Az egyensúly feltétele, hogy a testre ható erők eredője, illetve a testre ható forgatónyomatékok eredője nulla legyen. Az első feltétel itt úgy fog teljesülni, hogy amekkora erővel húzzák a gyerekek a mérleghintát lefelé, az alátámasztás akkora erővel fogja azt felfelé nyomni. Tehát a b) kérdésre a válasz:

$$K = 2 \cdot mg + m_3 g = 2 \cdot 450\,\mathrm{N} + 650\,\mathrm{N} = 1550\,\mathrm{N}\ .$$

Az adott pontra vonatkoztatott forgatónyomaték $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, ahol $\mathbf{r}$ a pont és az erő támadáspontját összekötő vektor, és $\mathbf{F}$ az adott erő. Válasszuk ki az alátámasztási pontot vonatkoztatási pontnak. A mérleghintára négy erő hat: a három gyerek, és az alátámasztás. Az utóbbi forgatónyomatéka nulla, hiszen annak támadáspontja és a vonatkoztatási pont egybeesik, vagyis $\mathbf{r} = 0$. A súlyerők forgatónyomatéka egyszerűen számítható, mivel azok iránya merőleges az $\mathbf{r}$ vektorokra: a forgatónyomatékok nagysága egyenlő az erő és a távolság szorzatával. A forgatónyomatékok irányát a jobbkézszabály segítségével adhatjuk meg, az előjelek innen adódnak.

Ezek alapján az egyensúly második feltétele:

$$0 = -\,|r_1| \cdot mg + |r_2| \cdot mg + r_3 \cdot m_3 g\ .$$

amelyből:

$$r_3 = \frac{mg(|r_1| - |r_2|)}{m_3 g} = \frac{450\,\mathrm{N}(3\,\mathrm{m} - 1{,}5\,\mathrm{m})}{650\,\mathrm{N}} = \\ = 1{,}038\,\mathrm{m}$$

Otthoni gyakorlásra:

III/3.10. feladat:
Egy 0,2 kg tömegű labdát 4 m magasról leejtünk. A labda 4 s-ig pattog a padlón, míg végül nyugalomban marad. Mennyi a labda által a padlóra kifejtett erő átlaga ezen 4 másodperc idő alatt alatt? (A légellenállás elhanyagolható.)

III/3.16. feladat:
Géppuskából percenként 240 db 20 gramm tömegű lövedéket lőnek ki 1000 m/s kezdősebességgel vízszintes irányban egy céltárgyra. A golyók becsapódnak és lefékeződnek a céltárgyban.

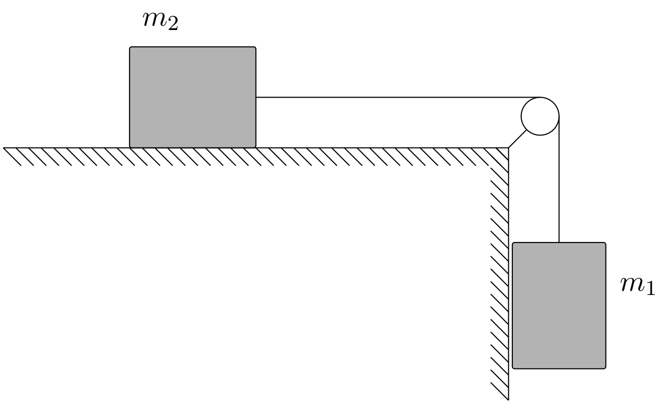
a) Mennyi a golyók által a céltárgyra kifejtett átlagos erő?

b) Mennyi a géppuskára ható átlagos (visszalökő) erő?

III/3.5. feladat:
Mekkora az ábra szerinti fonállal egymáshoz kötött $m_1 = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ és $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ tömegű testek gyorsulása és a fonalat feszítő erő, ha

a) az m_2 test a vízszintes síkon súrlódásmentesen csúszhat;

b) az m_2 test és a sík között a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$?

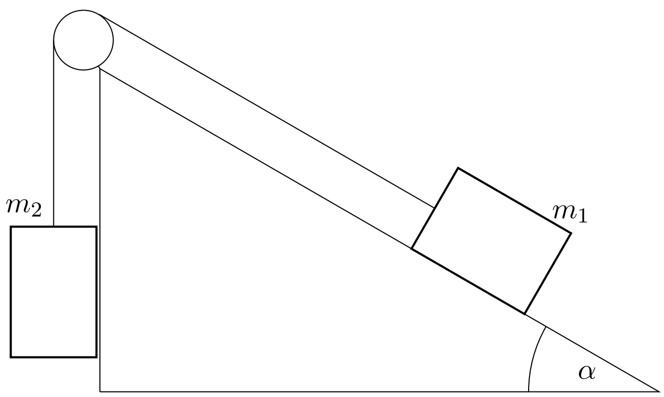


III/3.13. feladat:
Határozzuk meg az ábrán látható rendszer gyorsulását, ha

a) a súrlódástól eltekintünk;

b) az m_1 tömegű test és a lejtő között a súrlódási együttható μ.

A lejtő rögzített helyzetű, a fonál és a csiga tömege elhanyagolható, a fonál nem nyúlik meg, a tengely nem súrlódik.



III/5.17. feladat:
Egy rendszer n darab részecskéből áll. Mindegyik részecske az összes többire erőt gyakorol. Mutassuk meg, hogy a rendszerben $n(n-1)$ erő lép fel!

A feladatok forrása a Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (infó), 4. feladatsor
Munka, energia, teljesítmény

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- munka $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs\cos\alpha$ skalárszorzat (számít az irány!). $[W] = 1\,\mathrm{J}$
- szakaszokra bontás, határesetben integrálás ($W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{s}$), azaz a görbe alatti terület!
- nehézségi erőtér → helyzeti energia: $E_\mathrm{h} = mgh$, ami negatív is lehet (pl. talajszint alatt)
- kinetikus/mozgási energia: $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$
- rugó: $E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}Dx^2$ (x a megnyúlás, D a rugóállandó)
- munkatétel $\Delta E_\mathrm{k} = W$
- teljesítmény ($P = \frac{W}{t}$), hatásfok ($\eta = \frac{\text{hasznos}}{\text{összes}}$), $1\,\mathrm{kWh} = 3600\,\mathrm{kJ}$

Órai feladatok:

IV/4.7. feladat:
$\alpha = 30°$-os lejtőn valaki egy $m = 20$ kilogrammos bőröndöt tol fel vízszintes irányú erővel $h = 2$ méter magasra. A mozgási súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$. A bőrönd mozgása egyenletes. Mennyi munkát végez:

a) az ember,

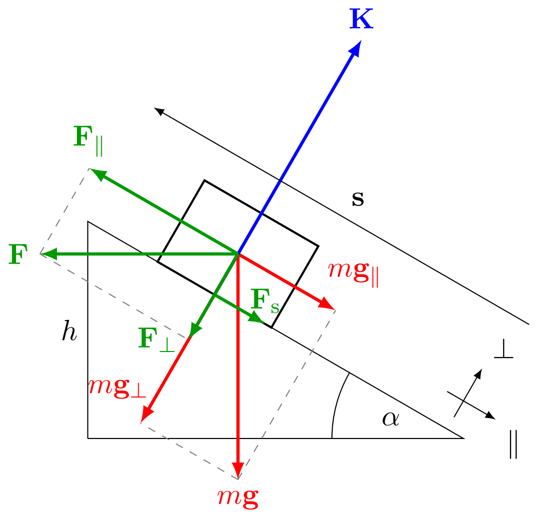
b) a súrlódási erő,

c) a bőröndre ható nehézségi erő,

d) a lejtő nyomóereje,

e) a bőröndre ható erők eredője?

($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)



Mivel állandó erők hatnak, így a munkát ki lehet számítani az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként. A feladat megoldásához először határozzuk meg, hogy mekkora F erőre van szükség. A Newton-egyenleteket felírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \perp: &\qquad 0 = K - mg\cos\alpha - F\cdot\sin\alpha \\ \parallel: &\qquad 0 = F\cdot\cos\alpha - mg\sin\alpha - F_\mathrm{s}\ , \end{aligned}$$

ahol $F_s = \mu \cdot K$, és K az első egyenletből kifejezhető:

$$K = mg\cos\alpha + F\sin\alpha\ ,$$

melyet a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} 0 &= F\cdot\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu\cdot\big(mg\cos\alpha + F\sin\alpha\big) \\ F &= \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\ . \end{aligned}$$

Szükségünk lesz még a többi erő nagyságára is:

$$\begin{aligned} K &= mg\cos\alpha + F\sin\alpha \\ &= mg\cos\alpha + \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg\sin\alpha \\ &= \frac{\cos^2\alpha - \mu\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha + \mu\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot mg \,,$$
$$F_s = \mu K = \frac{1}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot \mu mg \,.$$

a) Az ember által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_{\text{ember}} &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos\alpha \\ &= \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot mg \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha \\ &= \frac{\sin 30^\circ + 0{,}2\cdot\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0{,}2\cdot\sin 30^\circ} \cdot \\ &\quad \cdot 20\,\text{kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{2\,\text{m}}{\sin 30^\circ} \cdot \cos 30^\circ \\ &= 608{,}87\,\text{J}\,. \end{aligned}$$

b) A súrlódási erő által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_s &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = -F_s \cdot s \\ &= -\frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \\ &= -\frac{0{,}2\cdot 20\,\text{kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 30^\circ - 0{,}2\cdot\sin 30^\circ} \cdot \frac{2\,\text{m}}{\sin 30^\circ} \\ &= -208{,}87\,\text{J}\,. \end{aligned}$$

c) A nehézségi erő munkája

$$\begin{aligned} W_{mg} &= m\mathbf{g}\cdot\mathbf{s} = -mg_{\parallel}\cdot s = -mg\sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \\ &= -20\,\text{kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 2\,\text{m} = -400\,\text{J}\,. \end{aligned}$$

d) A lejtő nyomóereje nem végez munkát, hiszen az merőleges az $\mathbf{s}$ elmozdulásra.

e) A bőröndre ható erők eredője nulla, hiszen a bőrönd összgyorsulása nulla. Ennek munkája természetesen nulla.

Vegyük észre, hogy ezt a korábbi eredményekből is megkapjuk, hiszen ha összeadjuk az összes erő munkáját, akkor is nullát kapunk.

IV/4.11. feladat:
Rugós erőmérőt $\Delta l = 10\,\text{cm}$-rel kihúztunk. Mekkora munkát végeztünk a megnyújtáskor, ha a mutató $F = 50\,\text{N}$ nagyságú erőt jelez?

Először számoljuk ki a rugó állandóját:

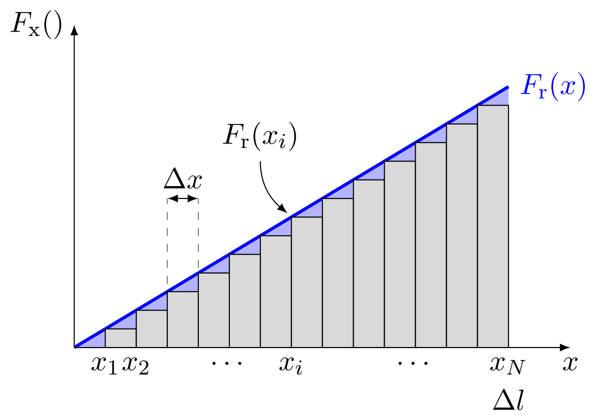
$$D = \frac{F}{\Delta l} = \frac{50\,\text{N}}{0{,}1\,\text{m}} = 500\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,.$$

Ennek a munkának a kiszámolásánál az a probléma, hogy az általunk kifejtett erő nem állandó, hiszen tudjuk, hogy a rugóerő $F_r(x) = D\cdot x$, ahol x a megnyúlás, és a mi erőnk ennek az ellenereje.

A munka kiszámolásához először tekintsünk azt a pillanatot, mikor éppen x_i-vel van megnyújtva a rugó. Próbáljuk ekkor a rugót még egy nagyon pici Δx hosszal még jobban megnyújtani. Ez olyan kis távolság, hogy ez alatt az erő gyakorlatilag nem változik, végig $F_r(x) = D\cdot x_i$. Ekkor a munkánk erre a kis Δx szakaszra:

$$\Delta W(x_i) = F_r(x)\cdot\Delta x = D\cdot x_i\cdot\Delta x\,.$$

A teljes megnyújtásra számolt munkát úgy kapjuk, hogy a Δl távolságot felosztjuk sok ilyen pici Δx szakaszra, kiszámoljuk a munkát az egyes szakaszokra, majd összeadjuk őket. Vegyük észre, hogy az így számított összeg, éppen az $F_r(x)$ függvény alatti terület téglalapösszege.



Ha egyre finomítjuk a felosztást, akkor az $F_r(x)$ függvény alatti területet kapjuk a $x \in [0,\Delta l]$ tartományon. A téglalapösszeg pedig egy integrálásba megy át:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta W(x_i) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} D\cdot x_i\cdot\Delta x \\ &= \int_0^{\Delta l}\mathrm{d}W(x) = \int_0^{\Delta l} D\cdot x\cdot\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}Dx^2\right]_0^{\Delta l} \\ &= \left(\frac{1}{2}D\cdot(\Delta l)^2\right) - \left(\frac{1}{2}D\cdot 0^2\right) = \frac{1}{2}D\cdot(\Delta l)^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 500\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0{,}1\,\text{m})^2 = 2{,}5\,\text{J}\,. \end{aligned}$$

IV/4.32. feladat:
Oldjuk meg a munkatétellel a következő feladatot: $v_0 = 500\,\text{m/s}$ sebességű puskagolyó $s_{\text{max}} = 5\,\text{cm}$ mélyen hatol be a fába. Mekkora volt a sebessége $s = 2\,\text{cm}$ mélységben? Tételezzük fel, hogy a fa fékező ereje állandó.

A munkatétel szerint $\Delta E_{\text{kin}} = W$, kifejtve $W = F_{\text{fék}} \cdot s_{\max}$, míg $\Delta E_{\text{kin}} = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$. Így a fékezőerő:

$$F_{\text{fék}} = -\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{s_{\max}}.$$

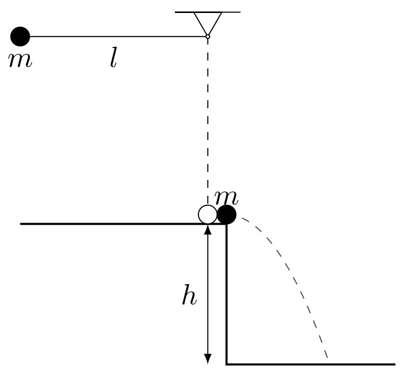
Ha csak 2 cm-t haladunk, akkor a mozgási energia megváltozása $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$, míg a munka $W = F_{\text{fék}} \cdot s$, azaz a munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_{\text{fék}} \cdot s = -\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{s_{\max}} \cdot s$$

Amelyből fejezzük ki a sebességet:

$$v = \sqrt{\left(1 - \frac{s}{s_{\max}}\right) v_0^2} = 387{,}3\,\text{m/s}.$$

IV/4.39. feladat:
Az ábrán látható ingát 90°-kal kitérítjük és elengedjük. Az asztal szélén levő, vele egyenlő tömegű golyóval teljesen rugalmasan ütközik. Határozzuk meg, hogy az asztaltól milyen távol ér a padlóra a lelökött golyó!



A mozgás több részre bontható. Először az inga lelendül (1–2), majd megtörténik az ütközés (2–3), végül pedig a második test leesik (3–4). Ezeket a speciális állapotokat mind összeköti a munkatétel, melyet használhatunk.

1–2: Az ingatest lelendül. Válasszuk a helyzeti energia nullszintjét az asztal szintjének. Ekkor a testnek az (1) pontban van helyzeti energiája, ám nincs mozgási energiája, ezzel szemben a (2) helyzetben helyzeti energiája nincs, cserébe viszont mozgási energiája lett, hiszen v_2 sebességgel mozog. A testre a kötélerő hat, ami sosem végez munkát, illetve hat rá a nehézségi erő, annak a munkáját viszont helyzeti energiában vettük figyelembe.

Ez alapján a munkatörvény:

$$W = \Delta\left(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}\right)$$

$$0 = \left(\frac{1}{2}mv_2^2\right) - (mgl)$$
$$v_2 = \sqrt{2gl}\ .$$

2–3: Itt történik meg az ütközés. Mivel az ütközés teljesen rugalmas, így az ütközés során az energia megmarad. Szintén mivel a külső erők munkája nulla, így az impulzusmegmaradást is lehet használni. A két törvény:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}mu_3^2$$
$$mv_2 + 0 = mv_3 + mu_3\ ,$$

ahol az u-val jelölt tagok a kezdetben álló golyó jellemzői.

A két egyenlet egyszerűsítve:

$$v_2^2 = v_3^2 + u_3^2$$
$$v_2 = v_3 + u_3\ ,$$

majd a második egyenlet négyzetre emelve:

$$v_2^2 = v_3^2 + u_3^2 + 2v_3v_3'\ ,$$

és ebből az első egyenletet kivonva:

$$0 = 2v_3u_3\ ,$$

tehát vagy az első vagy a második test állni fog az ütközés után. Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletre pillantva láthatjuk, hogy ha az egyik sebesség nulla, akkor a teljes kezdeti sebességet a másik test kapja meg. Innen adódik, hogy a kezdetben mozgó golyónak kell megállnia, és a másiknak ugyanakkora sebességgel továbbhaladnia, hiszen a fordított eset nem lehetséges.

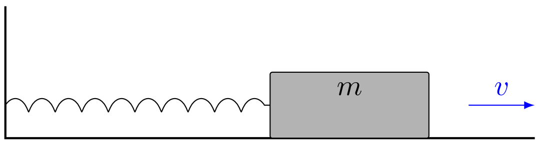
Tehát $v_3 = 0$, $u_3 = v_2 = \sqrt{2gl}$.

3–4: A mozgás utolsó szakaszában egy vízszintes hajítás történik. A leesés ideje $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, mely alatt a test

$$s = T \cdot u_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \sqrt{2gl} = 2\sqrt{lh}$$

utat tesz meg.

IV/D6. feladat:
Az ábrán látható $m = 0{,}01$ kg tömegű testtel $\Delta l = 7{,}5$ cm-rel összenyomtuk a $D = 4$ N/m rugóállandójú rugót, majd a testet elengedtük. A test és a vízszintes felület közti mozgási súrlódási együttható értéke $\mu = 0{,}25$. Mekkora utat tesz meg a test a megállásig?



A megoldást a munkatétel alapján fogjuk megadni. Tekintsük a rugót és a testet egy rendszernek. Vegyük sorra a rendszer energiájának megváltozását és a rendszeren végzett munkákat. Kezdetben a test állt, illetve a rugó meg volt feszítve, a végállapotban pedig a rugó egyenes, illetve a test áll. A rendszeren csak a súrlódási erő végez munkát. Ez alapján a munkatétel:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathrm{kin}} + \Delta E_{\mathrm{rug}} &= W_{\mathrm{s}}\\ (0-0) + \left(0 - \frac{1}{2}D\cdot(\Delta l)^2\right) &= -\mu mgs\\ \frac{1}{2}D\cdot(\Delta l)^2 &= \mu mgs\ ,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy a Δl-lel összenyomott rugóban tárolt energia $E_{\mathrm{rug}} = \frac{1}{2}D(\Delta l)^2$. Innen

$$\begin{aligned}s &= \frac{1}{2}D\cdot\frac{(\Delta l)^2}{\mu mg} = \frac{1}{2}\cdot 4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot\frac{(0{,}075\,\mathrm{m})^2}{0{,}25\cdot 0{,}01\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\\ &= 0{,}45\,\mathrm{m}\ .\end{aligned}$$

IV/4.24. feladat:
$mg = 100\,\mathrm{N}$ súlyú testet $F = 120\,\mathrm{N}$ nagyságú erővel emelünk. Mekkora a teljesítmény az indulás után $T = 2$ másodperccel? Mekkora az átlagteljesítmény az első 2 másodperc alatt?

A pillanatnyi teljesítmény $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. A testre ható erők eredője $F_{\mathrm{e}} = 120\,\mathrm{N} - 100\,\mathrm{N} = 20\,\mathrm{N}$, vagyis a test gyorsulása $a = \frac{20\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Kezdetben a test állt, T idő elteltével a test sebessége: $v(T) = a\cdot T = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2\,\mathrm{s} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Mivel ez a sebesség felfelé mutat, így egy irányba esik az emelőerővel. A teljesítményünk tehát:

$$P(2\,\mathrm{s}) = 120\,\mathrm{N}\cdot 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 480\,\mathrm{W}\ .$$

Az átlagteljesítmény kiszámításához tudnunk kell, hogy hogyan változik a pillanatnyi teljesítmény az időben. Az időfüggés a sebességen keresztül történik:

$$P(t) = F\cdot v(t) = F\cdot a\cdot t\ .$$

Mivel a teljesítmény az idővel lineáris kapcsolatban áll, így az átlagteljesítmény számolható, mint a kezdeti és a végállapotban lévő pillanatnyi teljesítmény számtani közepe:

$$P_{\mathrm{átl}} = \frac{P(2\,\mathrm{s}) + P(0)}{2} = \frac{480\,\mathrm{W} + 0}{2} = 240\,\mathrm{W}\ .$$

IV/4.31. feladat:
Egy ládát állandó sebességgel húzunk vízszintes talajon. Mozgás közben $F_{\mathrm{s}} = 250\,\mathrm{N}$ a fellépő súrlódási erő. Milyen messzire húzhatjuk el a ládát $W_{\mathrm{mi}} = 0{,}001\,\mathrm{kWh}$ munka árán?

A munkatételt használjuk ismét. A mozgás során a testen csak az általunk kifejtett erő és a súrlódási erő végez munkát. Mivel a test állandó sebességgel halad, így a mozgási energiája nem változhat meg:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathrm{kin}} &= W_{\mathrm{s}} + W_{\mathrm{mi}}\\ 0 &= -F_{\mathrm{s}}\cdot s + W_{\mathrm{mi}}\\ s &= \frac{W_{\mathrm{mi}}}{F_{\mathrm{s}}} = \frac{0{,}001\,\mathrm{kWh}}{250\,\mathrm{N}} = \frac{1\cdot 3600\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{s}}{250\,\mathrm{N}} = 14{,}4\,\mathrm{m}\ .\end{aligned}$$

Otthoni gyakorlásra:

IV/4.16. feladat:
Mekkora átlagos teljesítménnyel lehet egy 1000 kg tömegű személyautót 10 másodperc alatt, álló helyzetből 100 km/h sebességre gyorsítani?

IV/4.28. feladat:
A ferdén eldobott 0,5 kg tömegű kő kezdeti mozgási energiája 87 joule. A kő 30 m messze esik le a vízszintes talajra. Milyen szög alatt hajítottuk el? (A légellenállást ne vegyük figyelembe!)

IV/4.30. feladat:
$v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel függőlegesen lefelé hajítunk egy követ. Mennyi idő alatt négyszereződik meg a mozgási energiája?

IV/4.40. feladat:
$M = 10\,\mathrm{kg}$ tömegű homokzsák $l = 2\,\mathrm{m}$ hosszú fonálon függ. Egy $m = 10\,\mathrm{g}$ tömegű puskagolyó behatol a homokzsákba, és ennek hatására a fonál $\alpha = 10°$-os szöggel kitér. Mekkora volt a golyó sebessége? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s}^2$)

IV/4.29. feladat:
$h_0 = 10$ méter mély kútból, méterenként $F_{\mathrm{lánc}} = 10\,\mathrm{N}$ súlyú lánccal vizet húzunk fel. A vödör súlya vízzel együtt $F_{\mathrm{vödör}} = 120\,\mathrm{N}$. Mekkora munka árán tudunk egy vödör vizet felhúzni?

IV/4.23. feladat:
Egy ejtőernyős kiugrik egy 2000 m magasságban szálló repülőgépből. (A gép vízszintesen repül, sebessége 100 m/s.) Az ejtőernyős sebessége földet éréskor 5 m/s. Tömege az ernyővel együtt 100 kg. Mennyi munkát végzett a közegellenállás?

IV/4.9. feladat:
Mekkora munkavégzéssel jár egy $m = 4\,\mathrm{kg}$ tömegű test felgyorsítása vízszintes talajon $v_\mathrm{v} = 3\,\mathrm{m/s}$ sebességre $s = 2$ méter úton, ha a talaj és a test közötti súrlódás együtthatója $\mu = 0{,}3$? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (infó), 6. feladatsor
Elektrosztatika

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- töltés (Q, $[Q] = 1\,\mathrm{C}$), tapasztalat (azonos taszít, ellentétes vonz), Coulomb-törvény

$$\mathbf{F} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

  vákuum permittivitása $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$, relatív permittivitás ε_r

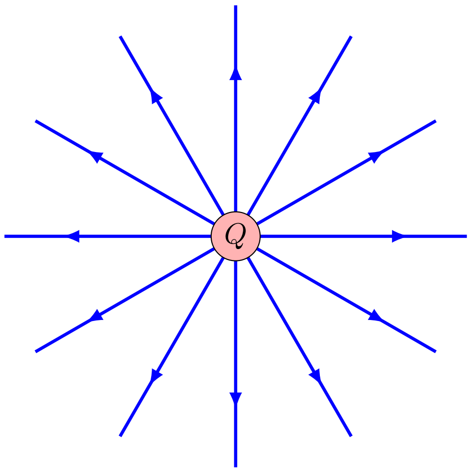
- q próbatöltésre ható erő $\rightarrow$ elektromos tér ($\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$)
- erővonalkép, homogén erőtér
- munkavégzés $W = \mathbf{Fs} = q\mathbf{Es}$, feszültség/potenciálkülönbség ($U = \mathbf{Es}$, $[U] = 1\,\mathrm{V}$)
- kondenzátor $C = \frac{Q}{U}$, $[C] = 1\,\mathrm{F}$, síkkondenzátor $C = \varepsilon\frac{A}{l}$, energia, $U = \frac{1}{2}CU^2$

Órai feladatok:

VI/17.2. feladat:
Mekkora az elektromos térerősség a pontszerű $Q = 10^{-5}\,\mathrm{C}$ pozitív töltéstől $d = 1\,\mathrm{m}$ távolságban vákuumban? Milyen felületen vannak azok a pontok, amelyekben a térerősség ugyanakkora? Milyen irányú a térerősség?

A vákuumban $\mathbf{r}'$ helyen lévő Q töltés elektromos térerőssége:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ .$$



Itt ε_0 a vákuum permittivitása, egy állandó. Az utolsó tag egy egységvektor, az $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ vektor le van osztva annak hosszával. Ez az egységvektor adja meg a térerősség irányát, ez mindig a töltés helyétől az $\mathbf{r}$ megfigyelési pontba mutat. A térerősség nagysága:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\ ,$$

mely csak a töltéstől mért távolságtól függ. Tehát a ponttöltés körüli térerősség nagysága gömbfelületeken állandó, hiszen annak pontjai vannak ugyanakkora távolságban a töltéstől.

A térerősség nagysága a töltéstől $1\,\mathrm{m}$ távolságban:

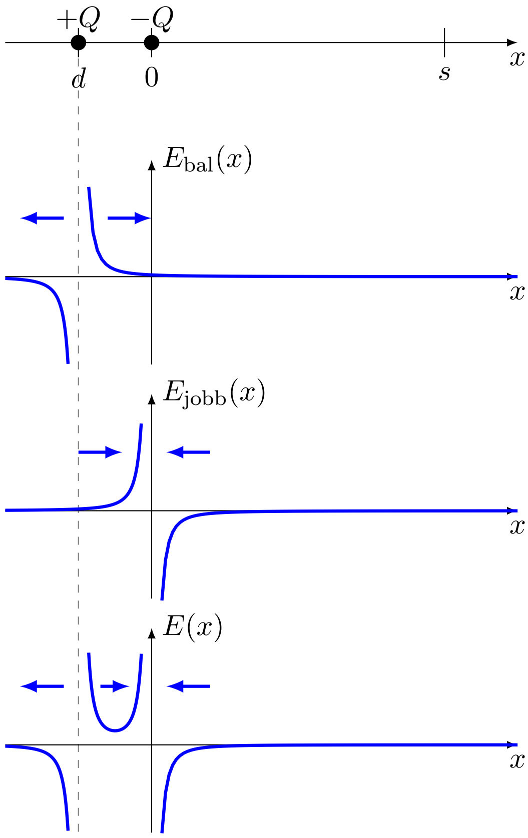
$$E(1\,\mathrm{m}) = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}} \cdot \frac{10^{-5}\,\mathrm{C}}{(1\,\mathrm{m})^2} = 8{,}99 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ .$$

VI/17.5. feladat:
Két pontszerű töltés egymástól $d = 0{,}5\,\mathrm{m}$ távolságban van rögzítve. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség a töltések összekötő egyenesében, a Q_2 töltéstől $x = 2\,\mathrm{m}$ távolságban jobbra? (balra $Q_1 = 2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$; jobbra $Q_2 = -2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$)

Rögzítsük a jobb oldali töltést az $x'_\mathrm{j} = 0$ helyen. A bal oldali töltés így az $x'_\mathrm{b} = -d$ koordinátájú helyen van. A térerősségek nagysága az egyenes mentén:

$$|E_\mathrm{bal}(x)| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q_1|}{(x - x'_\mathrm{b})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q_1|}{(x + d)^2}$$

$$|E_\mathrm{jobb}(x)| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q_2|}{(x - x'_\mathrm{j})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q_2|}{x^2}\,.$$



A teljes térerősség nagysága ezek összege, azonban ehhez figyelembe kell venni a térerősségek előjelét is. A bal oldali töltés pozitív, így a pozitív ponttöltést az taszítja. Emiatt ennek térerősség járuléka attól balra negatív, jobbra pedig pozitív. A jobb oldali töltés negatív, vagyis attól jobbra annak a térerőssége negatív, balra pedig pozitív előjelű. Jelöljük $Q_1 = |Q_2| = Q$, mellyel:

$$E(x) = E_\mathrm{bal}(x) + E_\mathrm{jobb}(x)$$
$$= \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{(x+d)^2} + \frac{1}{x^2}\right) & x < -d \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{(x+d)^2} + \frac{1}{x^2}\right) & -d < x < 0 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{(x+d)^2} - \frac{1}{x^2}\right) & 0 < x \end{cases}$$

A térerősség a jobb oldali töltéstől $s = 2\,\mathrm{m}$-re jobbra:

$$E(s) = \frac{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{-2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} \cdot \left(2\,\mathrm{m} + \frac{0{,}5\,\mathrm{m}}{2}\right)}{(2\,\mathrm{m})^2 \cdot (2\,\mathrm{m} + 0{,}5\,\mathrm{m})^2}\right)$$
$$= -1{,}62 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,.$$

A térerősség nagysága negatív, vagyis a térerősség balra mutat.

VI/17.6. feladat:
Homogén elektrosztatikus tér pontjaiban a térerősség $E = 10^5\,\mathrm{V/m}$. Mekkora erő hat a térben levő $q = 2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ töltésű kicsi fémgolyóra? Mennyi a golyó gyorsulása, ha tömege $m = 5\,\mathrm{g}$?

A testre a Coulomb-erő hat, amely felírható a térerősséggel:

$$F = qE = 2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C} \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}.$$

Newton törvénye értelmében az erő alapján a gyorsulás:

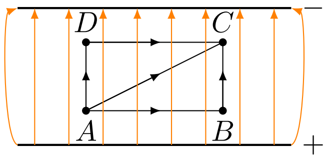
$$a = \frac{F}{m} = \frac{2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}}{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}} = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

VI/17.7. feladat:
Síkkondenzátor homogén elektromos terében a térerősség $E = 1000\,\mathrm{N/C}$. Az ábra szerinti elrendezés esetén, az AD és BC szakaszok 1 cm hosszúságúak.

a) Mennyi munkát végeznek az elektromos erők, ha $Q = 5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ pozitív töltés az A pontból a C pontba: az ABC; vagy az ADC; vagy közvetlenül az AC úton mozdul el?

b) Mennyivel kisebb a B; C; D; pontban a potenciál, mint az A pontban?

c) Mennyi a kondenzátor lemezei között a feszültség, ha a lemezek távolsága 3 cm?



A töltésre ható erő: $F = QE = 5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}\cdot 1000\,\mathrm{N/C} = 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$, melynek iránya megegyezik az elektromos térerősség irányával, vagyis felfelé mutat. Az erő állandó: annak nagysága és iránya független a töltés helyétől.

Az AB és a DC egyenesek mentén végzett munka nulla, hiszen itt az elmozdulás és az erő egymásra merőleges, így a skalárszorzat nulla. Az AD és a BC egyenesek mentén pedig az elmozdulás párhuzamos az erő irányával, így a munka:

$$W_{AD} = W_{BC} = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AD} = F\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right| = 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\cdot 1\,\mathrm{cm} = 5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}\,.$$

Az AC úton végzett munkát hasonlóan számolhatjuk:

$$W_{AC} = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AC} = F\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha = F\cdot\frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha = W_{AD}\,.$$

A feszültség homogén térerősség esetében:

$$V = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{s} = -\frac{W}{Q}\,,$$

vagyis az AB szakaszon nem esik feszültség, az AD és az AC szakaszokon pedig

$$V_{AC} = V_{AD} = -\frac{5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}}{5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}} = -10\,\mathrm{V}\,.$$

A kondenzátor lemezei közötti feszültség nagysága

$$V = 1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\cdot 3\,\mathrm{cm} = 30\,\mathrm{V}\,.$$

VI/17.8. feladat:
Mekkora sebességre gyorsul fel vákuumban, homogén elektrosztatikus térben, s úton az eredetileg nyugvó elektromos részecske? ($m = 10^{-6}\,\mathrm{g}$; $Q = 10^{-7}\,\mathrm{C}$, $E = 10^4\,\mathrm{V/m}$; $s = 10\,\mathrm{cm}$)

Használjuk a munkatételt! Az egyik oldalon külső gyorsító erőként ott van az elektromos tér, míg a másikon a mozgási energia változásából kijön a sebesség:

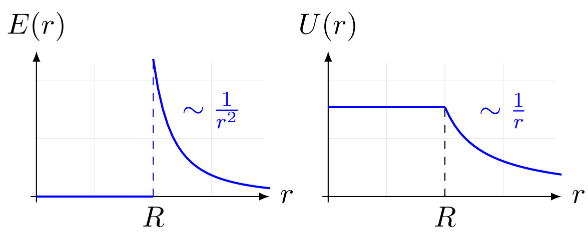
$$QEs = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2QEs}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\cdot 0{,}1\,\mathrm{m}}{10^{-9}\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{2\cdot 10^5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 447{,}21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

VI/17.10. feladat:
Mekkora a térerősség és a potenciál egy tömör, töltött fémgömb belsejében?

Mivel a gömb ideális vezető, így annak belsejében nem lehet térerősség. Ennek az az oka, hogy ha lenne, akkor a fém belsejében lévő többi töltésre azonnal hatna a Coulomb erő, és azok elmozdulnának, és azok egészen addig mozognának, míg olyan állapot áll be, hogy nem hat már rájuk erő.

A gömbön belül a potenciál pedig állandó. Ennek oka, hogy a gömb belsejében a térerősség nulla, abban sehol sem eshet feszültség, vagyis semelyik két pont között nincs potenciálkülönbség.



VI/17.11. feladat:
Fémből készült, töltetlen gömbhéj középpontjában $+Q$ pontszerű töltés helyezkedik el.

a) Hogyan helyezkednek el a megosztott töltések a gömbhéjon?

b) Rajzoljuk meg vázlatosan az erővonalakat a gömbön belül és kívül!

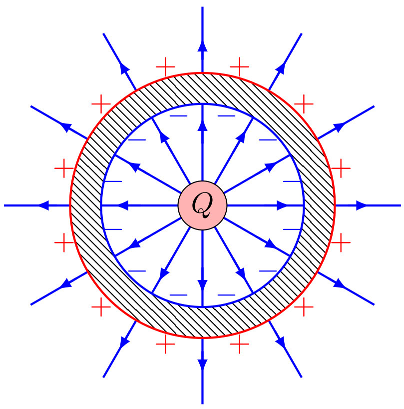
c) Hat-e erő a gömbön kívül levő töltésre?

d) A gömböt lefödve, hogyan változik meg a töltések eloszlása?

a) A gömbhéj külső és belső felületére töltések fognak felhalmozódni. A belső töltésfelhalmozódásnak az oka a gömb közepén található töltés megosztó hatása, a gömbhéj negatív töltései ahhoz közel, míg annak pozitív töltései attól távol szeretnének elhelyezkedni. Kérdés még, hogy a gömbhéj belsejében található-e szabad töltés. Mivel a gömbhéj ideális vezető, így annak belsejében nem lehet térerősség. Ennek az az oka, hogy ha lenne, akkor a fém belsejében lévő többi töltésre azonnal hatna a Coulomb erő, és azok elmozdulnának, és azok egészen addig mozognának, míg olyan állapot áll be, hogy nem hat már rájuk erő.

Ezek mellett még azt is tudjuk, hogy a töltések irány szerinti eloszlása egyenletes lesz, melynek oka, hogy a probléma gömbszimmetrikus.

b) Az erővonalat párhuzamosak az elektromos térerősség irányával, és az erővonalak sűrűsége arányos a térerősség nagyságával.



c) Igen.

d) A gömbhéj külső felületén az ott felhalmozódó pozitív töltések taszítják egymást. Ha földeljük azt a felületet, akkor ezek a töltések már el tudnak távolodni egymástól, így a felületen megszűnik a töltésfelhalmozódás: a felület semleges lesz.

VI/17.13. feladat:
Sorosan kapcsolunk egy $C_1 = 4\,\mu$F-os és egy $C_2 = 6\,\mu$F-os kondenzátort. Mekkora töltéstől töltődik fel a rendszer $U = 220$ V-ra?

Sorosan kapcsolt kapacitások esetén az eredő nagysága:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} + \frac{1}{6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}},$$

az eredő $C = 2{,}4\,\mu$F. A kondenzátorokra jutó töltés:

$$Q = CU = 2{,}4\,\mu\mathrm{F}\cdot 220\,\mathrm{V} = 5{,}28\cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}.$$

VI/ 17.25. feladat:
Mennyi annak a kondenzátornak a kapacitása, amelyet $Q = 2{,}5\cdot 10^{-8}$ C töltés $U = 20$ V feszültségre tölt fel?

A kapacitás definíció szerint:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{20\,\mathrm{V}} = 1{,}25\cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}.$$

VI/17.26. feladat:
Mekkora eredő kapacitást kapunk, ha $C_1 = 2\,\mu$F és $C_2 = 3\,\mu$F kapacitású kondenzátort
a) sorba, b) párhuzamosan kapcsolunk?

a, Sorba kapcsolás esetén:

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} + \frac{1}{3\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}}\right)^{-1} = 1{,}2\,\mu\mathrm{F}.$$

b, Ha párhuzamosan kapcsoljuk őket:

$$C = C_1 + C_2 = 2\,\mu\mathrm{F} + 3\,\mu\mathrm{F} = 5\,\mu\mathrm{F}.$$

Megj. Ez a példa előrevehető első kondenzátoros példának, aztán a levezetést hozzá el lehet közben mondani.

VI/17.27. feladat:
Két sorba kötött kondenzátorra, amelyek kapacitása $C_1 = 2\,\mu$F és $C_2 = 4\,\mu$F; $U = 120$ V feszültséget kapcsolunk. Mekkora az egyes kondenzátorokra jutó feszültség?

A soros kapcsolás miatt mindkét kondenzátorra ugyanakkora töltés jut, azaz:

$$C_1U_1 = C_2U_2 = C_2(U - U_1)$$
$$(C_1 + C_2)\,U_1 = C_2U$$
$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}U = \frac{4\,\mu\mathrm{F}}{2\,\mu\mathrm{F} + 4\,\mu\mathrm{F}}\cdot 120\,\mathrm{V}$$

$= 80\,\mathrm{V}.$

A másik kondenzátorra $U_2 = U - U_1 = 120\,\mathrm{V} - 80\,\mathrm{V} = 40\,\mathrm{V}$ jut.

Otthoni gyakorlásra:

VI/17.4. feladat:
Két pozitív, pontszerű töltés, Q és $4Q$, egymástól l távolságban van rögzítve. Hol kell elhelyezni egy pontszerű Q töltést, hogy egyensúlyban legyen?

VI/17.12. feladat:
Két (nem pontszerű) fémgolyó között fellépő elektromos kölcsönhatás nagyobb, ha ellentétesen töltjük fel őket, mint azonos előjelű, ugyanolyan mértékű feltöltés esetén. Hogyan lehetséges ez?

VI/17.14. feladat:
Két azonos kapacitású kondenzátor egyikét feltöltjük $U_1 = 100\,\mathrm{V}$-ra, a másikat $U_2 = 200\,\mathrm{V}$-ra. Ezután párhuzamosan kötjük őket a) azonos pólusaikkal; b) ellentétes pólusaikkal. Mekkora lesz a kondenzátorok feszültsége az egyik és a másik esetben?

VI/17.21. feladat:
Egy négyzet csúcsaiban egyenlő Q pontszerű töltések helyezkednek el. Mekkora és milyen előjelű töltés van a négyzet átlóinak metszéspontjában, ha az egész rendszer egyensúlyban van?

VI/17.23. feladat:
Két pontszerű töltés egymástól $d = 0{,}5\,\mathrm{m}$ távolságban van rögzítve. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség a töltéseket összekötő szakasz felezőmerőlegesén, a szakasztól mért $l = 1\,\mathrm{m}$ távolságban? ($Q_1 = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$, $Q_2 = -2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$)

VI/17.24. feladat:
Mekkora sebességre gyorsul fel vákuumban, $U = 500\,\mathrm{V}$ feszültség hatására az $m = 10^{-5}\,\mathrm{g}$ tömegű, $Q = 10^{-8}\,\mathrm{C}$ elektromos töltésű, eredetileg nyugvó részecske?

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (infó), 7. feladatsor
Egyenáram, egyenáramú áramkörök 1.

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- Elektromos áram $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, mértékegység $\frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{A}$
- Elektromos ellenállás R, mértékegység $1\,\Omega$
- vezeték ellenállása
- Ohm-törvénye: $R = \frac{U}{I}$
- Egyenáramú áramkörök, soros és párhuzam kapcsolások, Kirchhoff csomóponti törvénye
- munka, energia, teljesítmény ($P = U \cdot I$)

Órai feladatok:

VII/18.2. feladat:
Mekkora az áram erőssége működés közben abban az izzóban, amelyen a 60 W, 110 V felirat szerepel?

Az adott áramköri elemen leadott teljesítmény megegyezik az azon eső feszültség és a rajta átfolyó áram szorzatával: $P = UI$. Feltéve, hogy az izzón valóban esik 110 V, akkor az azon átfolyó áram: $I = \frac{P}{U} = \frac{60\,\mathrm{W}}{110\,\mathrm{V}} = 0{,}55\,\mathrm{A}$.

VII/18.3. feladat:
Mekkora lesz az eredő ellenállás, ha $R_1 = 16$ ohm és $R_2 = 24$ ohm ellenállásokat a.) sorosan, b.) párhuzamosan kapcsolunk?

Soros kapcsolás esetén az ellenállások összeadódnak, vagyis

$$R_\mathrm{e} = R_1 + R_2 = 40\,\Omega\ ,$$

míg párhuzamos kapcsolásnál:

$$R_\mathrm{e} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{16\,\Omega} + \frac{1}{24\,\Omega}} = 9{,}6\,\Omega\ .$$

VII/18.7. feladat:
Mekkora az ellenállása a $d = 2{,}4\,\mathrm{mm}$ átmérőjű, $l = 30\,\mathrm{m}$ hosszú vörösréz huzalnak? ($\varrho_\mathrm{Cu} = 0{,}017\,\Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$)

A hengeres vezetők ellenállása:

$$R = \varrho \frac{l}{A}\ ,$$

ahol ϱ a vezető anyagának fajlagos ellenállása, l annak hossza és A a keresztmetszete. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned} R &= \varrho_\mathrm{Cu} \frac{l}{\pi \cdot (\frac{d}{2})^2} \\ &= 0{,}017\,\Omega \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \cdot \frac{30\,\mathrm{m}}{\pi \cdot (1{,}2\,\mathrm{mm})^2} = 0{,}11\,\Omega\ . \end{aligned}$$

VII/18.8. feladat:
Feszültségforrásra sorosan kötött ellenállások egyikét megváltoztatjuk, változnak-e a részfeszültségek?

Vegyünk két ellenállást, az egyik változzon ($R \to R'$) a másik legyen a maradék rendszer eredője (R_m) Az Ohm-törvény értelmében az áramerősség:

$$I = \frac{U}{R + R_\mathrm{m}}.$$

Csere után:

$$I' = \frac{U}{R' + R_\mathrm{m}}.$$

A két esetben a maradékra jutó feszültség:

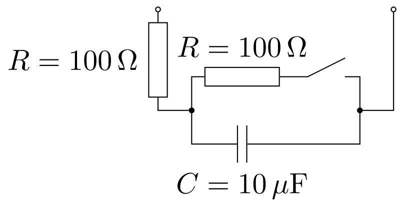
$$U_\mathrm{m} = \frac{UR_\mathrm{m}}{R + R_\mathrm{m}} \qquad U'_\mathrm{m} = \frac{UR_\mathrm{m}}{R' + R_\mathrm{m}},$$

amelyek láthatóan csak $R = R'$ esetben egyeznek meg.

VII/18.12. feladat:
Elhanyagolható belső ellenállású, $U = 100\,\mathrm{V}$ elektromotoros erejű telepet kapcsolunk az ábrán látható hálózatra.

a) Mekkora a kondenzátor energiája a kapcsoló zárt/nyitott állása mellett?

b) Mekkora a telep által állandóan leadott teljesítmény a kapcsoló zárt/nyitott állása mellett?



a) A kapcsoló nyitott állása mellett az áramkörben egy ellenállás és egy kondenzátor marad. Ha ezt egy állandó U feszültségű telepre kapcsoljuk, akkor az a kondenzátort fel fogja tölteni, majd ha a kondenzátor feltöltődött, akkor megszűnik az áram. Az állandósult állapotban nem folyik áram, vagyis az ellenálláson nem esik feszültség, így a kondenzátoron esik mind a 100 V. Ekkor a kondenzátor energiája:

$$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\,\mu\mathrm{F} \cdot (100\,\mathrm{V})^2 = 50\,\mathrm{mJ}\ .$$

Mivel az állandósult állapotban nem folyik áram az áramkörben, így a telep által leadott teljesítmény nulla.

b) Ha a kapcsoló zárt, akkor a kondenzátorral párhuzamosan is van egy R ellenállás. Az állandósult állapotban itt sem folyhat áram a kondenzátoron. A kondenzátor feltöltődése után azonban itt még tud folyni áram az újonnan bekötött ellenálláson keresztül. Az ekkor folyó áram: $I = \frac{U}{2R} = \frac{100\,\mathrm{V}}{200\,\Omega} = 0{,}5\,\mathrm{A}$, hiszen az áramkörben két sorosan kapcsolt ellenállás van. A kondenzátor az egyik ellenállás két kivezetésére van kötve, így rajta ugyanakkora feszültség esik mint azon az egy ellenálláson: $U_\mathrm{C} = U_\mathrm{R} = IR = 0{,}5\,\mathrm{A} \cdot 100\,\Omega = 50\,\mathrm{V}$.

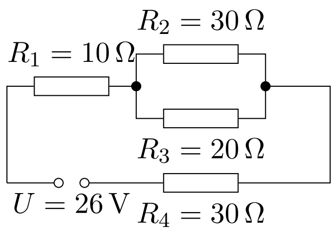
Ez alapján a kondenzátor energiája itt:

$$E = \frac{1}{2}CU_\mathrm{C}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\,\mu\mathrm{F} \cdot (50\,\mathrm{V})^2 = 12{,}5\,\mathrm{mJ}\ .$$

Az állandósult állapotban a telep által leadott teljesítmény:

$$P_\mathrm{z} = UI = 100\,\mathrm{V} \cdot 0{,}5\,\mathrm{A} = 50\,\mathrm{W}\ .$$

VII/18.27. feladat:
Mennyi az elektromos teljesítmény a $20\,\Omega$-os ellenálláson?



Számoljuk ki az eredő ellenállást. Elsőként a 2-3 elem párhuzamosan:

$$R_{23} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{30\,\Omega} + \frac{1}{20\,\Omega}\right)^{-1} = 12\,\Omega.$$

Most már sorosan van 3 ellenállás, az eredő:

$$R_\mathrm{e} = R_1 + R_{23} + R_4 = 10\,\Omega + 12\,\Omega + 30\,\Omega = 52\,\Omega.$$

A főágban az áram:

$$I = \frac{U}{R_\mathrm{e}} = 0{,}5\,\mathrm{A}.$$

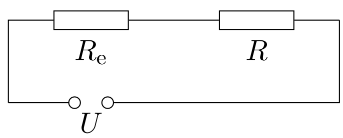
A részfeszültségek:

$$U_1 = R_1 I = 5\,\mathrm{V} \qquad U_4 = R_4 I = 15\,\mathrm{V},$$

azaz $U_{23} = U - U_1 - U_4 = 6\,\mathrm{V}$, amely alapján a 3-as ágban folyó áram $I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = 0{,}3\,\mathrm{A}$, a teljesítmény:

$$P_3 = U_{23} I_3 = 6\,\mathrm{V} \cdot 0{,}3\,\mathrm{A} = 1{,}8\,\mathrm{W}.$$

VII/18.29. feladat:
Feszültségmérő méréshatára $U = 5\,\mathrm{V}$, ellenállása $R = 800\,\Omega$. Mekkora előtét-ellenállást kell sorba kapcsolnunk vele, hogy $U' = 500\,\mathrm{V}$-ig mérhessünk vele?



I_max értékét kell állandóan tartanunk, hiszen akkor jut a műszerre ugyanaz a részfeszültség (U):

$$I_\mathrm{max} = \frac{U}{R},$$

az előtét betétele után az összfeszültség:

$$U' = (R_e + R)\, I_{max} = \frac{R_e + R}{R} U.$$

Ebből kifejezhető az előtét nagysága:

$$R_e = \frac{U' - U}{U} R = \frac{500\,\mathrm{V} - 5\,\mathrm{V}}{5\,\mathrm{V}} \cdot 800\,\Omega = \\ = 79200\,\Omega$$

VII/18.30. feladat:
A $I = 2\,\mathrm{A}$ méréshatárú, $R_A = 10^{-1}\,\Omega$ belső ellenállású áramerősség-mérővel párhuzamosan kapcsolt söntnek mekkora legyen az ellenállása, hogy $I' = 50\,\mathrm{A}$-ig mérhessünk vele?

A párhuzamosan kapcsolt söntellenállás hatása az, hogy így nem az áramkörben folyó teljes áram fog átfolyni az ampermérőn, hanem annak csak egy része, a többi a söntellenálláson folyik át. Ekkor nagyobb áramokat mérhetünk, a méréshatár megnő addig, míg az így lecsökkent áram értéke is eléri az eredeti méréshatárt.

Az R_A ellenállású ampermérőnek és a vele párhuzamosan kapcsolt R_s söntellenállásnak az eredője:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_s}}\,,$$

tehát ha I_0 áram folyik a teljes áramkörben (ekkorát szeretnénk mérni), akkor az árammérőre $U_A = I_0 \cdot R_e$ feszültség esik, vagyis a rajta átfolyó áram:

$$I_A = \frac{U_A}{R_A} = I_0 \cdot \frac{R_e}{R_A} = I_0 \cdot \frac{R_s}{R_A + R_s}\,.$$

Itt az I_A maximális értéke az ampermérő tényleges méréshatára, így a sönt nagyságát ki tudjuk fejezni:

$$R_s = R_A \frac{I_A}{I_0 - I_A} = 10^{-3}\,\Omega \cdot \frac{2\,\mathrm{A}}{50\,\mathrm{A} - 2\,\mathrm{A}} \\ = 4{,}16 \cdot 10^{-5}\,\Omega.$$

VII/18.39. feladat:
Mikor kapunk több fényt, ha két azonos izzólámpát ugyanakkora feszültségre párhuzamosan, vagy sorosan kapcsolunk?

Legyen az ellenállásuk R. Párhuzamosan kapcsolva az eredő ellenállás $R_p = \frac{R}{2}$, az összteljesítmény:

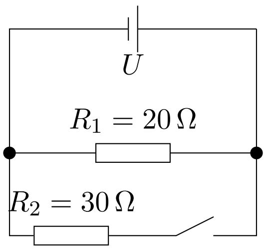
$$P_p = 2UI_p = 2\frac{U^2}{R_p} = 4\frac{U^2}{R}.$$

Soros esetben az eredő ellenállás $R_s = 2R$, az összteljesítmény:

$$P_s = 2UI_s = 2\frac{U^2}{R_s} = \frac{U^2}{R}.$$

Azaz párhuzamosan kapcsolva a teljesítmény, és így a fényerő is négyszer akkora.

VII/+1. feladat:
Az ábrán látható elektromos hálózatban a kapcsoló nyitott állásánál $I_{ny} = 0{,}4\,\mathrm{A}$ erősségű, a kapcsoló zárt állásánál $I_z = 0{,}6\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik át az áramforráson. Mekkora az áramforrás belső ellenállása?



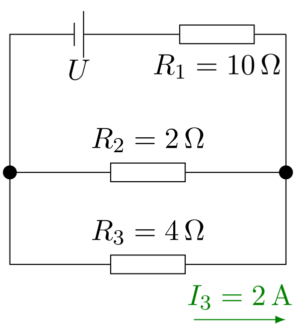
A nyitott esetben $R_{e,ny} = R_b + R_1$, azaz $I_{ny} = \frac{U}{R_1 + R_b}$, míg zárt esetben $R_{e,z} = R_b + \left(R_1^{-1} + R_2^{-1}\right)^{-1}$, azaz $I_z = \frac{U}{R_b + \left(R_1^{-1} + R_2^{-1}\right)^{-1}}$. Az elsőből kifejezhető U és beírható a másodikba:

$$I_z = \frac{(R_1 + R_b)}{R_b + \left(R_1^{-1} + R_2^{-1}\right)^{-1}} I_{ny}.$$

Ebből kifejezhető a belső ellenállás:

$$R_b = \frac{R_1 I_{ny} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_z}{I_z - I_{ny}} \\ = \frac{20\,\Omega \cdot 0{,}4\,\mathrm{A} - \frac{20\,\Omega \cdot 30\,\Omega}{20\,\Omega + 30\,\Omega} \cdot 0{,}6\,\mathrm{A}}{0{,}6\,\mathrm{A} - 0{,}4\,\mathrm{A}} \\ = 4\,\Omega.$$

VII/+2. feladat:
Az ábrán látható elektromos hálózatban a $4\,\Omega$-os ellenálláson $2\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik. Mekkora feszültség esik a $10\,\Omega$-os ellenálláson?



Sorban haladva: $U_3 = R_3 \cdot I_3$, a párhuzamosság miatt $U_2 = U_3$, így

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{R_3 \cdot I_3}{R_2},$$

majd

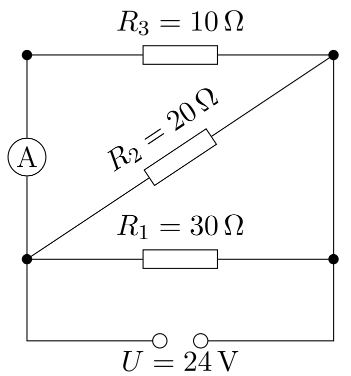
$$I_1 = I_2 + I_3 = I_3 \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right).$$

Végezetül a keresett feszültség:

$$\begin{aligned} U_1 = I_1 \cdot R_1 = I_3 \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) R_1 \\ = 2\,\mathrm{A} \left(1 + \frac{4\,\Omega}{2\,\Omega}\right) 10\,\Omega. \\ = 60\,\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Otthoni gyakorlásra:

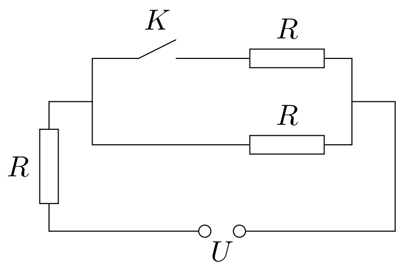
VII/18.4. feladat:
Mekkora áramerősséget jelez a műszer az ábra szerinti kapcsolásban? (A műszer belső ellenállása elhanyagolható.)



VII/18.6. feladat:
A 100 W-os vagy a 60 W-os izzólámpa ellenállása a nagyobb, ha ugyanakkora feszültségre készültek?

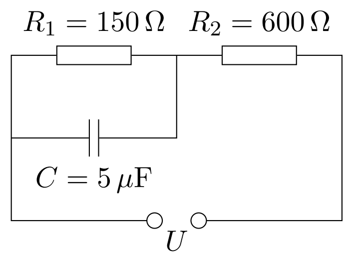
VII/18.10. feladat:
Két párhuzamosan kapcsolt ellenállás közül az egyik $R_1 = 10000\,\Omega$-os és $P_1 = 4\,\mathrm{W}$-ra terhelhető, míg a másik $R_2 = 3000\,\Omega$-os és névleges teljesítménye $P_2 = 7{,}5\,\mathrm{W}$. Mekkora áram folyhat át a rendszeren?

VII/18.25. feladat:
Az ábrán látható áramkörben minden ellenállás $10\,\Omega$-os. Mekkora az áramkör ellenállása nyitott, illetve zárt kapcsoló esetén? Mekkora a kapocsfeszültség, ha a kapcsoló zárása után az áramkör teljesítménye 15 W-ot változik? (A kapocsfeszültség a terheléstől független.)



VII/18.42. feladat:
A 220 V feszültségű áramforrástól 100 méterre lévő helyen három, egyenként 220 V-ra méretezett, 200 W-os fogyasztót működtetünk. Az odavezető Al huzal átmérője $d = 2\,\mathrm{mm}$, fajlagos ellenállása $\varrho = 0{,}029\,\frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$. Mekkora a párhuzamosan kapcsolt fogyasztók sarkain a feszültség? Hogyan változik a kapocsfeszültség, ha a fogyasztók számát növeljük?

VII/18.46. feladat:
Az ábra szerinti kapcsolásban az AB pontokra 225 V feszültséget kapcsolunk. Mekkora a töltés a kondenzátoron?



VII/18.51. feladat:
Az 50 mV végkitérésű, $20\,\mathrm{k}\Omega$ belső ellenállású feszültségmérővel 100 V-ig akarunk feszültséget mérni. Mekkora védőellenállást kell használni? Mekkora a mért feszültség, amikor a műszer mutatója a 30 mV-nak megfelelő skálaosztásnál állapodik meg?

VII/18.52. feladat:
A 10 mA végkitérésű, $10^{-2}\,\Omega$ belső ellenállású áramerősség-mérővel 2 A-ig akarunk áramerősséget mérni. Mekkora védőellenállást alkalmazzunk? Mekkora a mért áramerősség, amikor a műszer mutatója a 3 mA-nek megfelelő skálaosztásnál állapodik meg?

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (infó), 8. feladatsor
Egyenáram, egyenáramú áramkörök 2.

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

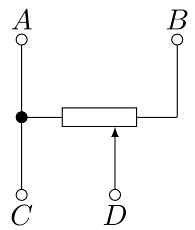
- Kirchhoff törvényei:
  I. Minden csomópontban a befolyó és kifolyó áramok előjeles összege zérus: $\sum_{\text{be}} I_i = \sum_{\text{ki}} I_i$.
  II. Minden hurokra $0 = \sum_i U_i + \sum I_i R_i$ (lásd 19.16. példa).
- Kapocsfeszültség (U_k, ami a fogyasztóhoz kijut), elektromotoros erő (ε, minden ami az feszültségforrásban van), belső ellenállás (R_b, a feszültségforrás ellenállása): $U_\mathrm{k} = \varepsilon - IR_\mathrm{b}$.

Órai feladatok:

VIII/19.3. feladat:
A zérus ohmtól $100\,\Omega$-ig változtatható ellenállású feszültségosztó A és B pontjai között $100\,\mathrm{V}$ a feszültség.

a) Milyen határok között változtathatjuk a feszültséget a C és D pontok között?

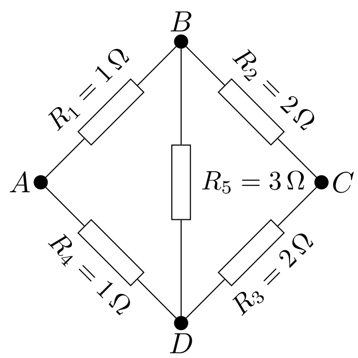
b) Mekkora a C és D pontok közötti feszültség, ha a csúszka az ellenállás közepén áll? (A potenciométer egyenletes keresztmetszetű huzalból készült.)



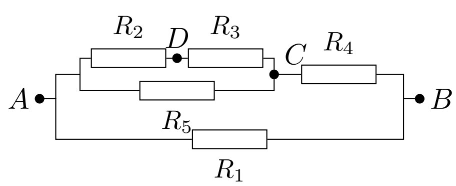
a) A C pont a potenciál szempontjából megfelel az A-nak hiszen a vezeték ideális. A D-n pedig akkora a potenciál A-hoz képest, amekkora aránya az ellenállásnak van azon az oldalon. Az ellenállás 0-tól $100\,\Omega$-ig változik, és összesen $100\,\mathrm{V}$, feszültség osztódik el. Ez ohmonként 1 volt, összességében C és D között 0 és $100\,\mathrm{V}$ között tetszőleges érték beállítható.

b) Ha a csúszka középen áll, akkor $50\,\Omega$ van jobbra, így az előző gondolatmenet alapján $50\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{V}/\Omega = 50\,\mathrm{V}$ feszültséget mérhetünk.

VIII/19.10. feladat:
Mekkora az eredő ellenállás az ábrán látható kapcsolás A–B, B–C, C–D, D–A és A–C pontjai között?



A–B**:** Az áramkört átrajzolhatjuk:



Melynek ellenállását azonnal számolhatjuk:

$$R_{23} = R_2 + R_3$$
$$R_{235} = \frac{1}{\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_5}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2+R_3} + \frac{1}{R_5}}$$

$$= \frac{(R_2 + R_3) \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5}$$

$$R_{2345} = R_{235} + R_4$$

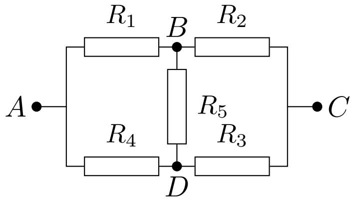
$$= \frac{(R_2 + R_3) \cdot (R_4 + R_5) + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5}$$

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_{2345}} + \frac{1}{R_1}}$$

$$= \frac{R_1(R_2 + R_3)(R_4 + R_5) + R_1 R_4 R_5}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4 + R_5) + (R_1 + R_4) \cdot R_5}$$

B–C: Az *A–B* esethez teljesen hasonlóan lehet megoldani, úgy mint a *C–D* és a *D–A* eseteket is.

A–C: A kapcsolás átrajzolásával itt egy kicsit más kapcsolást kapunk:

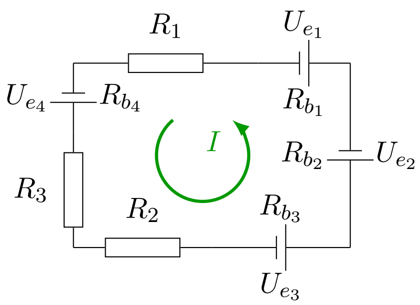


Itt, mivel az R_1 és az R_2 aránya ugyanakkora, mint az R_4 és az R_3 aránya, így ugyanakkora feszültség fog esni az R_1 és az R_4 ellenállásokon, vagyis a C és a D pont között nem lesz soha feszültség. Ennek következménye, hogy az R_5-ös ellenálláson nem folyik áram, vagyis annak ellenállását az eredő ellenállás számításakor nem kell figyelembe venni. A többi járuléka:

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}}$$

$$= \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_3} \ .$$

VIII/19.16. feladat:
Mekkora az áramerősség az ábra szerint összekapcsolt áramkörben? ($R_1 = 20\,\Omega$; $R_2 = 40\,\Omega$; $R_3 = 10\,\Omega$; $U_1 = U_2 = 10\,\mathrm{V}$; $U_3 = 6\,\mathrm{V}$; $U_4 = 20\,\mathrm{V}$; $R_{\mathrm{b},1} = 0{,}2\,\Omega$; $R_{\mathrm{b},2} = R_{\mathrm{b},3} = 0{,}1\,\Omega$; $R_{\mathrm{b},4} = 0{,}01\,\Omega$.)



Az áramkörben folyó áram kiszámításához felhasználjuk Kirchhoff II. törvényét. Ez azt mondja ki, hogy egy áramhurok mentén a feszültségek előjeles összegének nullát kell adnia.

Vegyünk fel az áram irányát úgy, ahogy az ábrán szerepel. Ennek az irányában fogjuk körbejárni az áramhurkot. Ebben az eseten az ellenállásokon eső feszültség $U = IR$. A telepek feszültségét pedig a következő előjelekkel kell figyelembe venni. Ha a telepen úgy haladunk át, hogy a feszültség csökken, vagyis a pozitív kivezetéséről lépünk át a negatív kivezetésére, akkor annak a feszültségét pozitív előjellel kell figyelembe venni. Ezzel szemben, ha fordítva haladunk át egy telepen, vagyis úgy, hogy alacsonyabb feszültségű helyről lépünk magasabb feszültségűre, akkor annak a feszültségét negatív előjellel kell venni.

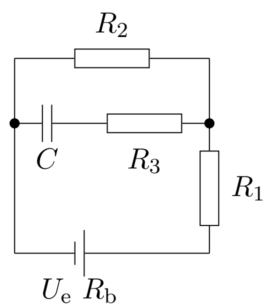
Ebben a konkrét esetben, ha a jobb alsó sarokban kezdjük a körbejárást:

$$0 = U_2 + IR_{\mathrm{b},2} + U_1 + IR_{\mathrm{b},1} + IR_1$$
$$- U_4 + IR_{\mathrm{b},4} + IR_3 + IR_2 - U_3 + IR_{\mathrm{b},3}$$

$$I = \frac{U_3 + U_4 - U_1 - U_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{\mathrm{b},1} + R_{\mathrm{b},2} + R_{\mathrm{b},3} + R_{\mathrm{b},4}}$$

$$I = \frac{6\,\mathrm{V} + 20\,\mathrm{V} - 10\,\mathrm{V} - 10\,\mathrm{V}}{20\,\Omega + 40\,\Omega + 10\,\Omega + 0{,}2\,\Omega + 2 \cdot 0{,}1\,\Omega + 0{,}01\,\Omega}$$
$$= 0{,}085\,\mathrm{A} \ .$$

VIII/19.18. feladat:
Mekkora feszültségre töltődik fel az ábrán látható kapcsolásban a kondenzátor? ($U_\mathrm{e} = 3{,}6\,\mathrm{V}$; $R_\mathrm{b} = 10\,\Omega$; $R_1 = 40\,\Omega$; $R_2 = 70\,\Omega$; $R_3 = 30\,\Omega$.)



A kondenzátor feltöltődése után azon már nem folyik áram, vagyis akkor az R_3-as ellenállás is kiesik az áramkörből. Ekkor csak az R_1, az R_2 és a telep belső ellenállása marad a körben, mind sorba kapcsolva, vagyis az eredő ellenállás

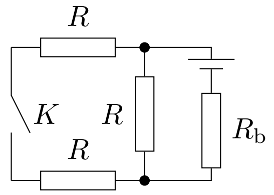
$$R_\mathrm{e} = R_1 + R_2 + R_\mathrm{b} = 40\,\Omega + 70\,\Omega + 10\,\Omega = 120\,\Omega \ ,$$

és a körben folyó áram

$$I = \frac{U_\mathrm{e}}{R_\mathrm{e}} = \frac{3{,}6\,\mathrm{V}}{120\,\Omega} = 0{,}03\,\mathrm{A} \ .$$

Ekkor az R_2-n eső feszültség $U_2 = R_2 I_2 = 2{,}1\,\mathrm{V}$. Mivel a kondenzátor és az R_3-as ellenállás ezzel párhuzamosan van kötve, így azokon is ekkora feszültség esik. Azonban az R_3-as ellenálláson nem folyik áram, így azon nem eshet feszültség, tehát a 2,1 V-nak mind a kondenzátoron kell esnie.

VIII/19.28. feladat:
Az ábra szerinti kapcsolásban a K kapcsoló nyitott állásánál $I_{\mathrm{ny}} = 0{,}1\,\mathrm{A}$, zárt kapcsolóállás esetén pedig $I_{\mathrm{z}} = 0{,}133\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik az elemet tartalmazó ágban. Mekkora az elem elektromotoros ereje és belső ellenállása? ($R = 18\,\Omega$.)



Ha a kapcsoló nyitott, akkor az áramkörben egy R és a belső ellenállás van sorba kapcsolva. Ekkor

$$I_{\mathrm{ny}} = \frac{U}{R + R_{\mathrm{b}}} \,.$$

Bekapcsolt kapcsolóállás esetén a belső ellenállással egy két ágból álló párhuzamos kör van sorba kapcsolva. A párhuzamos rész ellenállása:

$$R_{\parallel} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R}} = \frac{2}{3}R \,,$$

mellyel az eredő ellenállás, és az áram

$$R_{\mathrm{e}} = R_{\parallel} + R_{\mathrm{b}} = \frac{2}{3}R + R_{\mathrm{b}} \,.$$
$$I_{\mathrm{z}} = \frac{U}{R_{\mathrm{e}}} = \frac{U}{\frac{2}{3}R + R_{\mathrm{b}}} \,.$$

A két egyenletből meg lehet határozni a keresett két mennyiséget. Behelyettesítve:

$$0{,}1\,\mathrm{A} = \frac{U}{18\,\Omega + R_{\mathrm{b}}}$$
$$0{,}133\,\mathrm{A} = \frac{U}{12\,\Omega + R_{\mathrm{b}}} \,,$$

majd átrendezve

$$U = 1{,}8\,\mathrm{V} + 0{,}1\,\mathrm{A} \cdot R_{\mathrm{b}}$$
$$U = 1{,}6\,\mathrm{V} + 0{,}133\,\mathrm{A} \cdot R_{\mathrm{b}} \,,$$

ahonnan

$$1{,}8\,\mathrm{V} + 0{,}1\,\mathrm{A} \cdot R_{\mathrm{b}} = 1{,}6\,\mathrm{V} + 0{,}133\,\mathrm{A} \cdot R_{\mathrm{b}}$$
$$0{,}2\,\mathrm{V} = 0{,}033\,\mathrm{A} \cdot R_{\mathrm{b}}$$
$$R_{\mathrm{b}} = 6\,\Omega \,,$$

melyet visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$U = 1{,}8\,\mathrm{V} + 0{,}1\,\mathrm{A} \cdot 6\,\Omega = 2{,}4\,\mathrm{V} \,.$$

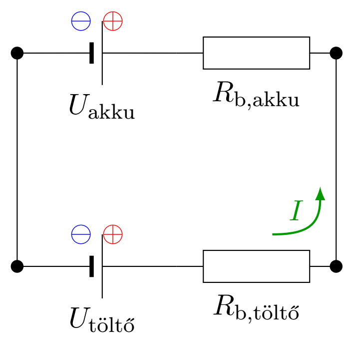
VIII/19.43. feladat:
Egy autóakkumulátort töltés céljából $U_{\mathrm{t}} = 13\,\mathrm{V}$ elektromotoros erejű és $R_{\mathrm{t,b}} = 0{,}09\,\Omega$ belső ellenállású töltőre kapcsolunk. Az akkumulátor belső ellenállása $R_{\mathrm{a,b}} = 0{,}01\,\Omega$, elektromotoros ereje $U_{\mathrm{a}} = 12\,\mathrm{V}$.

a) Mekkora a töltőáram?

b) Mennyi a töltő által leadott teljesítmény?

c) Mennyi az akkumulátor és a töltő melegítésére fordítódó teljesítmény?

d) Mennyi az akkumulátor töltésére fordítódó teljesítmény?



a) Az akkumulátort úgy dugjuk a töltőre, hogy annak negatív pólusát a töltő negatív pólusához, a pozitívat pedig a pozitívhoz kapcsoljuk. Az áramkör egy hurokból áll. A huroktörvény:

$$0 = -U_{\mathrm{t}} + I R_{\mathrm{b,t}} + I R_{\mathrm{b,a}} + U_{\mathrm{a}}$$
$$I = \frac{U_{\mathrm{t}} - U_{\mathrm{a}}}{R_{\mathrm{b,t}} + R_{\mathrm{b,a}}} = \frac{13\,\mathrm{V} - 12\,\mathrm{V}}{0{,}09\,\Omega + 0{,}01\,\Omega} = 10\,\mathrm{A} \,.$$

b) A töltő által leadott teljesítmény:

$$P_{\mathrm{t}} = U_{\mathrm{t}} I = 13\,\mathrm{V} \cdot 10\,\mathrm{A} = 130\,\mathrm{W} \,.$$

c) Az akkumulátor és a töltő melegedését a belső ellenállásokon termelődő Joule-hő okozza. Ez veszteségként jelenik meg:

$$P_{\mathrm{v}} = I^2 \cdot R_{\mathrm{b,a}} + I^2 \cdot R_{\mathrm{b,t}}$$
$$= (10\,\mathrm{A})^2 \cdot 0{,}01\,\Omega + (10\,\mathrm{A})^2 \cdot 0{,}09\,\Omega = 10\,\mathrm{W} \,.$$

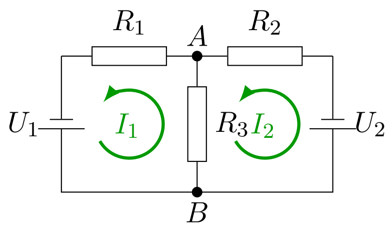
d) Az akkumulátor töltésére

$$P_\mathrm{a} = U_\mathrm{a} I = 12\,\mathrm{V} \cdot 10\,\mathrm{A} = 120\,\mathrm{W}$$

teljesítmény fordítódik.

Vegyük észre, hogy töltő által leadott teljesítmény megegyezik a hasznos teljesítmény és a veszteség összegével: ez egy példa energiamegmaradás törvényére.

VIII/19.45. feladat:
Az ábrán látható hálózatban az ellenállások értéke $R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 80\,\Omega$ és $R_3 = 100\,\Omega$. A telepek elektromotoros ereje $U_1 = 1{,}5\,\mathrm{V}$; $U_2 = 1\,\mathrm{V}$, és belső ellenállásuk elhanyagolható. Határozzuk meg az AB ágban folyó áram erősségét!



Írjuk fel a huroktörvényt a jobb és bal oldalra is:

$$R_1 I_1 - U_1 + (I_1 - I_2) R_3 = 0$$
$$U_2 + R_2 I_2 + (I_2 - I_1) R_3 = 0$$

majd rendezzük az áramokra:

$$I_1(R_1 + R_3) - I_2 R_3 - U_1 = 0$$
$$I_1(-R_3) + I_2(R_2 + R_3) + U_2 = 0.$$

Az elsőből $I_1 = \frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3}$, amely beírható a másodikba, amelyet így csak rendezni kell:

$$0 = -\frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3} R_3 + I_2(R_2 + R_3) + U_2$$
$$\vdots$$
$$I_2 = \frac{U_1 R_3 - U_2(R_1 + R_3)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2}$$
$$= \frac{1{,}5\,\mathrm{V} \cdot 100\,\Omega - 1\,\mathrm{V} \cdot (50\,\Omega + 100\,\Omega)}{(50\,\Omega + 100\,\Omega)(80\,\Omega + 100\,\Omega) - (100\,\Omega)^2}$$
$$= 0\,\mathrm{A}.$$

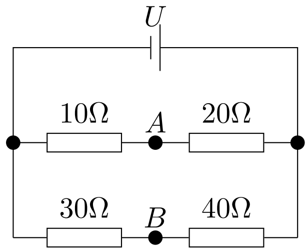
Ha visszahelyettesítjük:

$$I_1 = \frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{1{,}5\,\mathrm{V} + 0\,\mathrm{A} \cdot 100\,\Omega}{50\,\Omega + 100\,\Omega}$$
$$= 0{,}01\,\mathrm{A}.$$

Az AB szakaszon folyó áram:

$$I_{AB} = I_2 - I_1 = -0{,}01\,\mathrm{A}.$$

VIII/+1. feladat:
Az ábrán látható kapcsolásban mekkora az A és B pont közötti feszültség nagysága? ($U = 220\,\mathrm{V}$)



A felső soron ágban az eredő ellenállás $R_{12} = 30\,\Omega$, míg az alsóban $R_{34} = 70\,\Omega$. A teljes eredő:

$$R_\mathrm{e} = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = 21\,\Omega.$$

A főágban folyó $I = \frac{U}{R_\mathrm{e}} = 10{,}476\,\mathrm{A}$ áram az ellenállások arányában fordítottan oszlik el az ágakon, azaz:

$$I_{12} R_{34} = I_{34} R_{12}$$

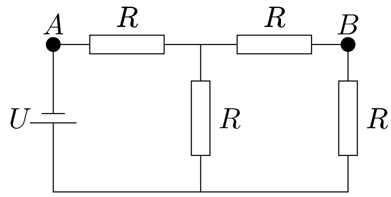
A fenti egyenlet alapján

$$I_{12} = \frac{R_{34}}{R_{12}} I_{34}$$
$$\left(\frac{R_{34}}{R_{12}} + 1\right) I_{34} = I \qquad \to \quad I_{34} = 3{,}14\,\mathrm{A},$$
$$I_{12} = I - I_{34} = 7{,}3\,\mathrm{A}.$$

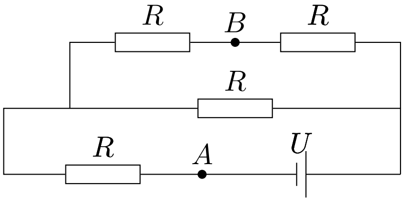
Az A pont potenciálja $U_A = R_1 I_{12} = 10\,\Omega \cdot 7{,}3\,\mathrm{A} = 73{,}3\,\mathrm{V}$, a B ponté $U_B = R_3 I_{34} = 30\,\Omega \cdot 3{,}14\,\mathrm{A} = 94{,}2\,\Omega$. A kettő különbsége:

$$U_{AB} = U_B - U_A = 20{,}9\,\mathrm{V}.$$

VIII/+2. feladat:
Az ábrán látható kapcsolásban mekkora az A és B pont közötti feszültség nagysága? ($U = 10\,\mathrm{V}$)



Átrajzolva:



Az eredő ellenállás:

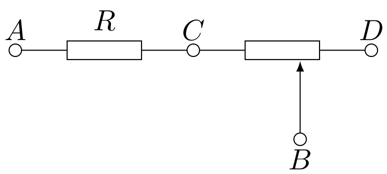
$$R_e = \frac{(R+R)R}{(R+R)+R} + R = \frac{5}{3}R.$$

Az áramerősség a főágban és így a lenti ellenálláson $I = \frac{U}{R_e}$, így az arra jutó feszültség $U_1 = IR = \frac{3}{5}U$. A párhuzamos tagra jut a maradék, és szimmetria miatt a B pont elé és mögé annak fele-fele. Azaz az AB feszültség a következő:

$$U_{AB} = U_1 + \frac{U - U_1}{2} = \frac{3}{5}U + \frac{U - \frac{3}{5}U}{2} = \frac{4}{5}U = 8\,\mathrm{V}.$$

Otthoni gyakorlásra:

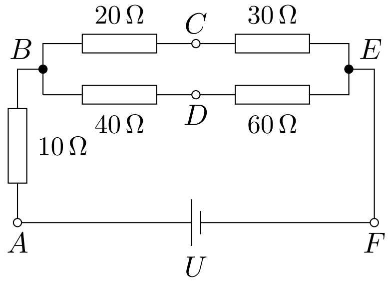
VIII/19.5. feladat:
A csúszóérintkező mozgatásával a C és a B pontok között 0-tól 100 Ω-ig lehet változtatni az ellenállást. Milyen határok között lehet változtatni az ellenállást az A és a B pontok között, ha $R = 50\,\Omega$?

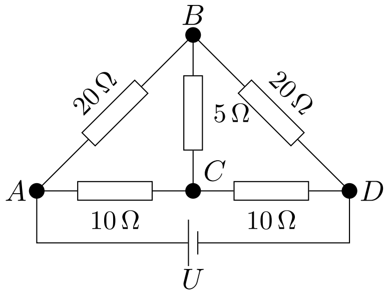


VIII/19.12. feladat:
Galvánelemet 25 Ω-os ellenállással terhelve a kapocsfeszültség az elektromotoros erő 80%-a lesz. Mennyi az elem belső ellenállása?

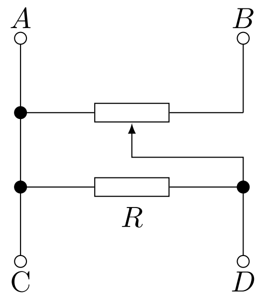
VIII/19.14. feladat:
Három, egyenként 1,5 V elektromotoros erejű és 4,5 Ω belső ellenállású párhuzamosan kötve 11,5 Ω-os külső ellenállásra kapcsolunk. Mekkora a kapocsfeszültség és az áramerősség a külső ellenálláson?

VIII/19.24. feladat:
Mely pontok között zérus a feszültség az ábra szerinti kapcsolásokban?





VIII/19.33. feladat:
Egy 10 Ω-tól 100 Ω-ig változtatható ellenállású feszültségosztót párhuzamosan kapcsolunk egy 50 Ω-os ellenállással. Ha az A és a B pontok között állandóan 100 V a feszültség, akkor a C és a D pontok között mekkora a feszültség az egyik és a másik szélső helyzetben?



A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

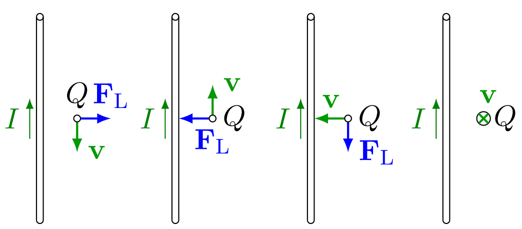
Bevezető fizika (infó), 9. feladatsor
Elektromágnesség

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- mágnes, pólusok
- mágneses indukcióvektor ($\mathbf{B}$, $[\mathbf{B}] = 1\,\mathrm{T}$)
- Lorentz-erő $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ vagy $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, jobbkézszabály
- forgatónyomaték $\mathbf{M} = I\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
- mágneses fluxus $\Phi_B = \int \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{A}$
- tekercs/szolenoid tere bent: nagysága $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$, ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ a vákuum permeabilitása (anyag jelenlétében μ_r), iránya a jobbkézszabály szerint.
- egyenes vezető tere $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$
- Ampère-féle gerjesztése törvény $\int \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum I$
- indukció, Lenz-törvény $U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, tekercsre ...
- mágneses térerősség $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$

Órai feladatok:

IX/20.5. feladat:
Egyenes vezető mágneses terében pozitív, pontszerű töltés mozog. Határozzuk meg a töltésre ható erő (Lorentz-erő) irányát az ábrán látható négy esetben!



Először meg kell határoznunk, hogy az egyenes vezető körül milyen mágneses indukció alakul ki. Az egyenes vezető körül körkörös mágneses indukció jön létre, melynek irányát a jobbkézszabályt adja meg. Ha a jobb kezünk hüvelykujja mutat az áram irányába, akkor jobb kezünk többi ujja mutatja a kialakuló mágneses indukció irányát.

a) A töltés helyén a mágneses indukció befelé mutat, a sebesség lefelé, tehát a keresztszorzat alapján az erő jobbra.

b) A töltés helyén a mágneses indukció befelé mutat, a sebesség felfelé, tehát az erő balra.

c) A töltés helyén a mágneses indukció befelé mutat, a sebesség balra, tehát az erő lefelé.

d) A töltés helyén a mágneses indukció befelé mutat, a sebesség is befelé, így e két vektor párhuzamos, vagyis nem hat erő.

IX/20.9. feladat:
Mekkora forgatónyomaték hat a $A = 100\,\mathrm{cm}^2$ felületű vezetőkeretre, ha benne $I = 2\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik, és a $B = 2\,\mathrm{Vs/m}^2$ indukciójú homogén mágneses térben úgy helyezkedik el, hogy síkjának normálisa az indukcióvektorokkal $\alpha = 30°$-os szöget zár be?

A forgatónyomaték nagysága:

$$M = IBA\sin\alpha = 2\,\mathrm{A} \cdot 2\,\mathrm{T} \cdot 0{,}01\,\mathrm{m}^2 \cdot \sin 30° = 0{,}02\,\mathrm{Nm}.$$

IX/20.11. feladat:
Mekkora erővel hat a $B = 0{,}5\,\mathrm{Vs/m^2}$ indukciójú homogén mágneses tér az egyenes vezető $l = 1\,\mathrm{m}$ hosszú szakaszára, ha abban $I = 10\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik, és

a) a vezető merőleges az indukcióvonalakra;

b) a vezető párhuzamos az indukcióvektorral;

c) a vezető $\alpha = 30°$-os szöget zár be az indukcióvonalakkal?

a)

$$F = IlB\sin\alpha = 10\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{T}\cdot\sin 90° = 5\,\mathrm{N}$$

b)

$$F = IlB\sin\alpha = 10\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{T}\cdot\sin 0° = 0\,\mathrm{N}$$

c)

$$F = IlB\sin\alpha = 10\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{T}\cdot\sin 30° = 2{,}5\,\mathrm{N}$$

IX/20.17. feladat:
Egy kör alakú vezetőben I áram folyik. Változik-e a az áram által keltett mágneses tér, ha a vezető kört a síkjára merőleges tengely körül ω szögsebességgel forgatjuk?

Nem, a pozitív és negatív töltések ugyanúgy mozdulnak el, így az áram nem változik, és így $\mathbf{B}$ sem.

IX/20.19. feladat:
Toroid tekercs középkörének sugara $r = 10\,\mathrm{cm}$, a menetek száma $N = 1500$, a tekercsben folyó áramerősség $I = 1\,\mathrm{A}$ és a tekercs keresztmetszetének területe $A = 4\,\mathrm{cm^2}$. Mekkora a tekercs belsejében a mágneses indukció és az indukciófluxus, ha

a) a tekercs belsejét levegő tölti ki

b) a tekercs belsejét lágyvas tölti ki? ($\mu_r = 200$)

A gerjesztési törvény értelmében:

$$\int \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu\sum I,$$

és nézzünk egy olyan görbét, amely a toroid menetek közepén megy végig (középkör!). Ekkor a következőt kapjuk:

$$B 2\pi r = \mu N I$$

$$B = \frac{\mu N I}{2\pi r}$$

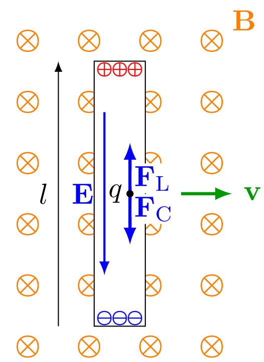
Ha csak levegő van benne:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 1500\cdot 1\,\mathrm{A}}{2\pi\cdot 0{,}1\,\mathrm{m}} = 0{,}003\,\mathrm{T}.$$
$$\Phi_B = BA = 0{,}003\,\mathrm{T}\cdot 0{,}0004\,\mathrm{m^2} = 1{,}2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{Wb}\,.$$

Lágyvassal:

$$B = \frac{\mu_0\mu_r N I}{2\pi r} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 200\cdot 1500\cdot 1\,\mathrm{A}}{2\pi\cdot 0{,}1\,\mathrm{m}}$$
$$= 0{,}6\,\mathrm{T}.$$
$$\Phi_B = BA = 0{,}6\,\mathrm{T}\cdot 0{,}0004\,\mathrm{m^2} = 2{,}4\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}\,.$$

IX/20.20. feladat:
Homogén, $\mathbf{B}$ indukciójú mágneses térben az indukcióra merőleges, l hosszúságú vezetőszakasz mozog állandó, a hosszára és a mágneses indukcióra merőleges v sebességgel. Mekkora és milyen irányú elektromos térerősség lép fel a vezetőben? Mekkora a vezető két vége között a feszültség?



A vezető belsejében lévő töltések v sebességgel mozognak a sebességre merőleges B nagyságú mágneses térben, így azokra hat a Lorentz-erő. A pozitív és a negatív töltésekre az erő ellentétes irányba hat, így alakul ki a töltésszétválasztódás. Ez a szétválasztódás azonban nem lehet tetszőlegesen nagy, hiszen az azonos töltések taszítják egymást. Bizonyos mennyiségű töltés felhalmozódása után akkora térerősség jön létre a vezetőben, hogy az abban található töltésekre ható Coulomb-erő és a Lorentz-erő kiegyenlíti egymást, vagyis megszűnik a szétválasztódás.

Az állandósult állapotban:

$$0 = \mathbf{F}_\mathrm{C} + \mathbf{F}_\mathrm{L}$$
$$0 = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$
$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,.$$

Mivel a **B** indukció homogén, és a töltések sebessége is ugyanaz mindenhol (hiszen a vezetőt mozgatjuk), így a térerősség is homogén lesz a vezetőben. A feszültség a vezető két vége között, felhasználva, hogy **B** és **v** merőlegesek:

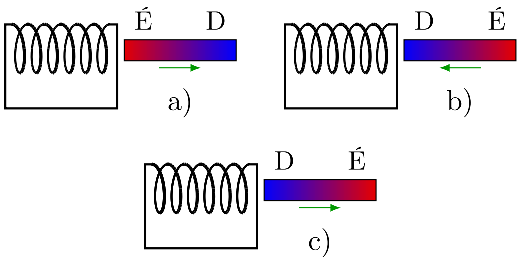
$$U = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} = vBl\ .$$

IX/20.22. feladat:
Milyen irányú áram indukálódik a tekercsben, ha a mágneses rúd

a) északi sarkát húzzuk ki a tekercsből;

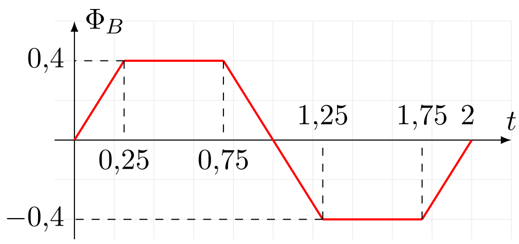
b) déli sarkát toljuk be a tekercsbe;

c) déli sarkát húzzuk ki a tekercsből?

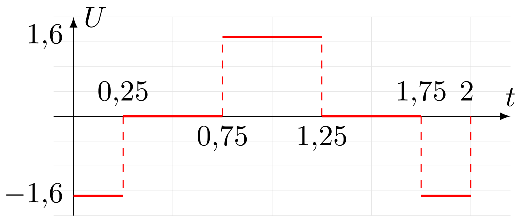


Ha a északi sarkot kihúzzuk, akkor Lenz-törvényének értelmében olyan áram fog indukálódni, amely a gyengülő fluxust próbálja ellensúlyozni. Még arra kell emlékeznünk, hogy az északi pólusból kifelé, a délibe befelé mennek a térerősség vonalak. Tehát az a) esetben az indukálódott térnek balra kell mutatnia, így az áramnak lent jobbra kell folynia. A b) esetben az erősödő jobbra irányított teret kell balra irányú térrel kompenzálni, amely ugyancsak lent jobbra folyó áramot jelent. Végezetül a c) eset az a) megfordítottja, tehát ott azzal ellentétesen folyik az áram, tehát az alsó ágban balra.

IX/20.23. feladat:
Változzék a fluxus egy vezetőkörben a diagramon látható módon. Ábrázoljuk az indukált feszültséget az idő függvényében!



Az indukció törvény értelmében az indukálódott feszültség, a fluxusváltozás függvény meredekségének mínusz egyszerese:



IX/20.13. feladat:
Igen hosszú egyenesen méterenként $Q = 2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ töltés helyezkedik el egyenletesen. Mekkora a mágneses térerősség, az egyenestől $r = 10\,\mathrm{cm}$ távolságban, ha az $v = 20\,\mathrm{m/s}$ sebességgel mozog hosszirányban?

Egyenes vezető mágneses tere:

$$H = \frac{I}{2\pi}\frac{1}{r} = \frac{Q/t}{2\pi}\frac{1}{r} = \frac{Qv/l}{2\pi}\frac{1}{r}$$
$$= \frac{(Q/l)v}{2\pi}\frac{1}{r} = \frac{(2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}/1\,\mathrm{m}) \cdot 20\,\mathrm{m/s}}{2\pi} \cdot \frac{1}{0{,}1\,\mathrm{m}}$$
$$= 6{,}4 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

IX/20.44. feladat:
Az ábrán egy forgótekercses árammérő vázlatos rajza látható. Az állandó mágnes sarkainál elhelyezett saruk és a tekercs hengeres lágyvasmagja közötti légrésben előállított mágneses tér B indukciója állandó nagyságú és sugárirányú. Ha a tekercsben áram folyik, a mágneses tér forgatónyomatékot fejt ki a tekercsre, melynek hatására az elfordul addig, amíg a forgástengelyhez rögzített csavarrugó visszatérítő forgatónyomatéka az áram okozta nyomatékot kiegyensúlyozza. Mekkora a műszerrel mérhető áram legnagyobb értéke, ha a mutató teljes kitérése esetén a csavarrugó $M = 3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Nm}$ forgatónyomatékot fejt ki? (Az $N = 300$ menetű tekercs $a = 2\,\mathrm{cm}$ oldalú négyzet, és a mágneses tér indukciója a légrésben $B = 0{,}25\,\mathrm{T}$.)

A mágnese indukció és a forgatónyomaték közötti kapcsolat:

$$M = IBA\sin\alpha,$$

amelyből kifejezhető I, amely $\alpha = 90°$ esetben maximális:

$$I = \frac{M}{BA\sin\alpha} = \frac{3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Nm}}{0{,}25\,\mathrm{T} \cdot (0{,}02\,\mathrm{m})^2 \cdot 1}$$

$= 0{,}001\,\mathrm{A}$.

Otthoni gyakorlásra:

IX/20.18. feladat:
Egy 6 cm hosszú, 300 menetű tekercsben 1 A erősségű áram folyik. Mekkora a mágneses térerősség és az indukció a tekercs belsejében?

IX/20.27. feladat:
A 0,1 m oldalhosszúságú, négyzet alakú vezetőhurok normálisa 30° -os szöget zár be az $1{,}5\,\mathrm{Vs/m^2}$ indukciójú mágneses tér indukcióvektorával. A hurokra ható forgatónyomaték 0,05 Nm. Mekkora a hurokban folyó áramerősség?

IX/20.30. feladat:
Végtelen hosszú egyenes vezetőben I áram folyik. Egy tőle d távolságban elhelyezkedő, vele párhuzamos vezetőben az előzővel egyező irányú nI erősségű áram folyik. Az első vezetőtől milyen távolságban lesz az eredő H mágneses térerősség nulla?

IX/20.38. feladat:
Egy áramkör 10 cm hosszú egyenes vezetőből álló része $0{,}5\,\mathrm{Vs/m^2}$ indukciójú homogén mágneses térben van úgy, hogy az áram iránya 30°-os szöget zár be a tér irányával. Mekkora erővel hat a mágneses tér erre az egyenes vezetőre, ha benne 10 A erősségű áram folyik?

IX/20.41. feladat:
Egy 20 cm hosszú, 1,5 cm átmérőjű, 300 menetes tekercsben 5 A erősségű áram folyik. Az áramkört hirtelen megszakítva az áram 0,01 s alatt nullára csökken. Mekkora feszültség indukálódik a tekercsben, ha az áram csökkenését egyenletesnek tekintjük?

IX/20.42. feladat:
Egy 500 menetű, $80\,\mathrm{cm^2}$ keresztmetszetű vezetőhurok percenként 300 fordulatot tesz a forgástengelyre merőleges $10^5/2\pi\,\mathrm{A/m}$ erősségű homogén mágneses erőtérben. Számítsuk ki a tekercsben indukált feszültséget, amikor a tekercs síkja
a. 0°;
b. 30°;
c. 60°;
d. 90°-os szöget zár be a térerősséggel!

IX/20.45. feladat:
Az ábra szerinti elrendezésben a homogén mágneses mezőben felfüggesztett vezetőben $I = 2\,\mathrm{A}$ erősségű áram folyik. A CD egyenes vezető súlya $G = 0{,}1\,\mathrm{N}$ és a mágneses mezőbe merülő része $l = 20\,\mathrm{cm}$ hosszú.
Hány fokkal lendülnek ki a függőlegestől az A és B pontokban rögzített felfüggesztőhuzalok, ha a mágneses tér indukciója $B = 0{,}25\,\mathrm{Vs/m^2}$?

IX/?. feladat:
Hosszú egyenes vezetőben I erősségű áram folyik. Az egyenes vezetőt rá merőleges síkban, szimmetrikusan egy N menetszámú R középkörsugarú toroid veszi körül. Mekkora a toroidban az áram, ha középköre mentén a mágneses térerősség zérus? ($I = 10\,\mathrm{A}$; $N = 100$)

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.

Bevezető fizika (infó), 10. feladatsor
Váltakozó áram

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

Változó áram, ha a U és I időben változik és *váltakozó*, ha valamilyen periódusra az időátlaguk 0, például:

$$U = U_\mathrm{m} \sin(\omega t) \qquad I = I_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi)$$

Teljesítmény/munka egyenérték alapján definiálható effektív érték. Például a fenti szinuszos áramra:

$$U_\mathrm{eff} = \frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \qquad I_\mathrm{eff} = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}.$$

Ohm törvény igaz, de most új tagok is vannak:

R	ohmikus ellenállás,
$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$	kapacitív reaktancia,
$X_L = \omega L$	induktív reaktancia.

Impedancia

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Az áram és feszültség közötti fázis az ábra!!!! alapján:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad \text{teljesítménytényező,}$$

mert a teljesítmény:

$$P = U_\mathrm{eff} U_\mathrm{eff} \cos\varphi.$$

Transzformátor: két tekercs (N_1 és N_2 menet), kapcsolat a kölcsönös indukció, következmény:

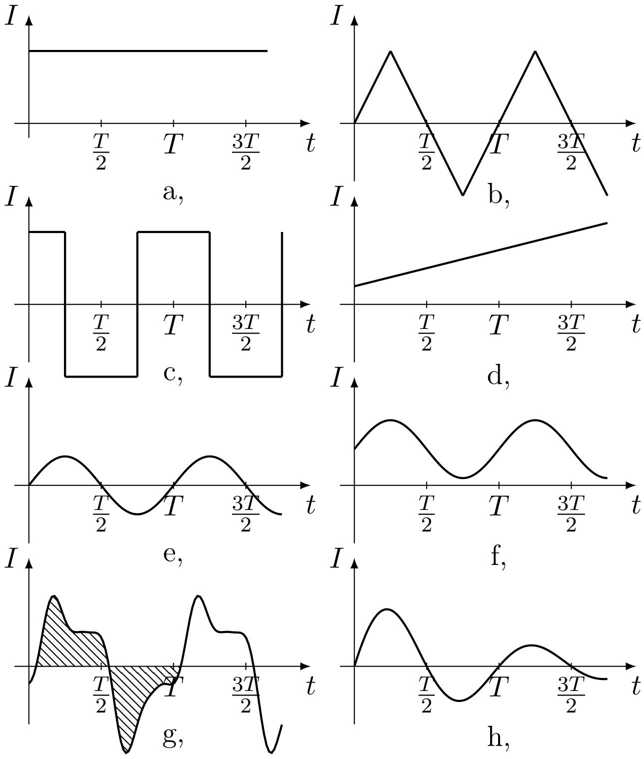
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Általában feltesszük, hogy veszteségmentes, azaz a teljesítmény a két oldalon ugyanaz, vagyis igaz, hogy:

$$U_1 I_1 = U_2 I_2.$$

Órai feladatok:

X/21.1. feladat:
A túloldali ábrán látható diagramok közül melyik ábrázol váltakozó áramot?



a, Nem, mert időben állandó.

b, Igen, időben változik, átlaga 0 T periódusra.

c, Igen, időben változik, átlaga 0 T periódusra.

d, Nem, mert időátlaga nem 0.

e, Igen, időben változik, átlaga 0 T periódusra.

f, Nem, mert időátlaga nem 0.

g, Igen, időben változik, átlaga 0 T periódusra.

h, Nem, mert időátlaga nem 0.

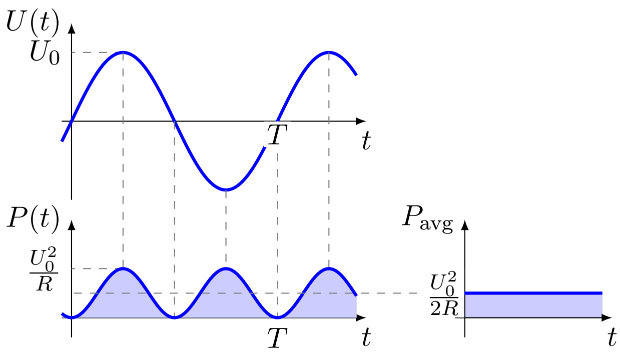
X/21.4. feladat:
Írjuk le, hogyan változik a dugaszoló aljzat (a „konnektor”) feszültsége a 230 V-os (effektív érték) váltakozó feszültségű hálózatban. Mekkora a feszültség egy periódusának időtartama?

A konnektorban $f = 50\,\mathrm{Hz}$-es frekvenciájú, $U_{\mathrm{eff}} = 230\,\mathrm{V}$ effektív értékű szinuszos feszültség van. Ennek a jelnek a periódusideje: $T = \frac{1}{f} = 0{,}02\,\mathrm{s}$[1].

A jel amplitúdójának számolásához ismernünk kell az effektív érték fogalmát. Ehhez meg kell vizsgálnunk azt, hogy mekkora teljesítményt ad le egy szinuszosan változó áramú forrás egy R ellenálláson. Legyen a feszültség amplitúdója U_0, vagyis $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$. A leadott teljesítmény:

$$P(t) = I(t) \cdot U(t) = \frac{U^2(t)}{R} = \frac{U_0^2}{R} \sin^2(\omega t)\ .$$

Láthatjuk, hogy az ellenálláson eső teljesítmény időről időre változik. Mivel ezeknek a váltakozó áramoknak gyors a jele, így ennek a teljesítménynek az átlagát látjuk.



Le lehet vezetni, hogy a $\sin^2(\omega t)$ átlaga egy periódusra $1/2$, vagyis egy U_0 amplitúdójú váltakozó áramú jel teljesítménye megfelel egy $U_0/\sqrt{2}$ állandó feszültségű jel teljesítményének.

A váltakozó feszültségét effektív értékén azt az állandó feszültségértéket értjük, melynek teljesítménye megegyezik a váltakozó jel effektív teljesítményével. Tehát a $230\,\mathrm{V}$ effektív értékű jel amplitúdója $U_0 = 230\,\mathrm{V} \cdot \sqrt{2} = 325{,}3\,\mathrm{V}$.

X/21.6. feladat:
Változhat-e a váltóáramú ellenállása egy
a. adott önindukciós együtthatójú tekercsnek,
b. adott kapacitású kondenzátornak?

Adott tekercs rögzített L-et jelent. A reaktancia értéke:

$$X_L = L\omega = L2\pi f,$$

amely változhat, ha különböző frekvenciájú áramkörbe helyezzük be.

[1]Megjegyzés: A váltakozó feszültségű jeleknél meg szokás különböztetni a jel *frekvenciáját* és a jel *körfrekvenciáját*. A frekvencia a periódusidő reciproka $\left(f = \frac{1}{T}\right)$, míg a körfrekvencia a megszokott $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$ képlettel számítható.

Hasonlóan egy adott kondenzátor rögzített C, de mivel:

$$X_L = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C2\pi f},$$

is frekvenciafüggő a kapacitív reaktancia is áramkörfüggő mennyiség.

X/21.7. feladat:
$U_{\mathrm{eff}} = 230\,\mathrm{V}$-os (effektív érték) hálózatról táplált berendezésen átfolyó áram erőssége $I_{\mathrm{eff}} = 2\,\mathrm{A}$; a felvett teljesítmény $P = 300\,\mathrm{W}$.
a. Mekkora az áram és feszültség fáziskülönbsége?
b. Mekkora a berendezés váltóáramú ellenállása (impedanciája)?
c. Mekkora a berendezés ohmikus ellenállása?

A teljesítményre vonatkozó összefüggésből a teljesítménytényező:

$$\cos\varphi = \frac{P}{U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}}} = \frac{300\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V} \cdot 2\,\mathrm{A}} = 0{,}65,$$

a fázisszög $\varphi = 49{,}23°$.

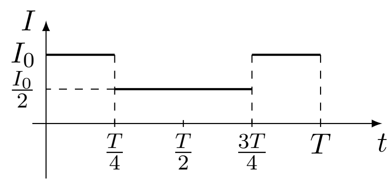
Az impedancia:

$$Z = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{2\,\mathrm{A}} = 115\,\Omega.$$

Az ohmikus ellenállás:

$$R = Z\cos\varphi = 115\,\Omega \cdot 0{,}65 = 75\,\Omega.$$

X/21.9. feladat:
R ellenálláson átfolyó áram erőssége az ábrán látható módon periodikusan változik. Határozzuk meg az áram effektív értékét!



Egy R ellenállásra a munkavégzés egy periódusra:

$$W = I_0^2 R\frac{T}{4} + \left(\frac{I_0}{2}\right)^2 R\frac{T}{2} + I_0^2 R\frac{T}{4} = \frac{5}{8} I_0^2 RT,$$

míg egy egyenáram munkavégzése:

$$W_{\mathrm{e}} = I_{\mathrm{eff}}^2 RT.$$

A kettő összevetéséből:

$$I_{\mathrm{eff}}^2 = \frac{5}{8} I_0$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{5}{8}} I_0 .$$

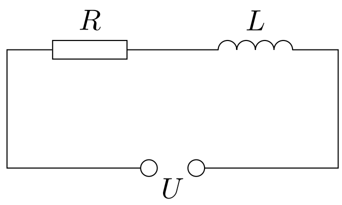
X/21.14. feladat:
Sorosan kapcsoltunk egy elhanyagolható ohmikus ellenállású, $L = 0{,}5\,\text{H}$ önindukciójú tekercset $R = 50\,\Omega$-os ohmikus ellenállással, majd rákapcsoljuk a $U_{\text{eff}} = 230\,\text{V}$-os (effektív érték) ($f = 50\,\text{Hz}$-es) váltakozó feszültségű hálózatra.

a) Mekkora a kör ellenállása (impedanciája)?

b) Mekkora áram folyik a körben?

c) Mekkora az ohmikus ellenállásra, illetve a tekercsre jutó feszültség?

d) Mekkora az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség?



a) A kör impedanciája:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$
$$= \sqrt{(50\,\Omega)^2 + (2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 0{,}5\,\Omega\text{s})^2} = 164{,}8\,\Omega\ .$$

b) Az áramkörben folyó áram effektív értéke:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{230\,\text{V}}{164{,}8\,\Omega} = 1{,}4\,\text{A}\ .$$

c) Az ellenállásra és a tekercsre jutó feszültség:

$$U_R = I_{\text{eff}} R = 1{,}4\,\text{A} \cdot 50\,\Omega = 69{,}8\,\text{V}\ ,$$
$$U_L = I_{\text{eff}} X_L = 1{,}4\,\text{A} \cdot 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 0{,}5\,\Omega\text{s} = 219{,}2\,\text{V}\ .$$

d) A fáziskülönbség:

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{X_L}{R} = \text{arctg}\,\frac{2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 0{,}5\,\Omega\text{s}}{50\,\Omega} = 72{,}3^\circ\ .$$

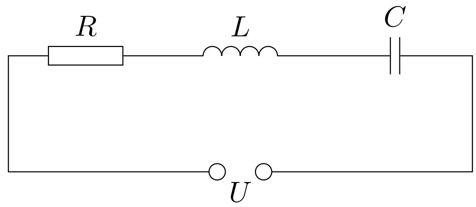
X/21.18. feladat:
$U_{\text{eff}} = 110\,\text{V}$ (effektív érték) feszültségű, $f = 50\,\text{Hz}$ frekvenciájú hálózatra sorba kapcsolunk egy $R = 50\,\Omega$-os ohmikus ellenállást, egy $C = 100\,\mu\text{F}$-os kondenzátort és egy $L = 0{,}5\,\text{H}$ önindukciójú, elhanyagolható ohmikus ellenállású tekercset.

a) Mekkora ez eredő ellenállás?

b) Mekkora a körben folyó áram effektív értéke?

c) Mekkora az egyes elemekre jutó feszültség effektív értéke?

d) Mekkora az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség?



a) A kör impedanciája:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\Omega\text{s}}} = 31{,}83\,\Omega\ ,$$
$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 0{,}5\,\Omega\text{s} = 157{,}1\,\Omega\ ,$$
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$= \sqrt{(50\,\Omega)^2 + (157{,}1\,\Omega - 31{,}83\,\Omega)^2}$$
$$= 134{,}86\,\Omega\ .$$

b) Az áramkörben folyó áram effektív értéke:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{110\,\text{V}}{134{,}86\,\Omega} = 0{,}82\,\text{A}\ .$$

c) Az egyes elemekre jutó feszültség:

$$U_R = I_{\text{eff}} R = 0{,}82\,\text{A} \cdot 50\,\Omega = 40{,}8\,\text{V}\ ,$$
$$U_C = I_{\text{eff}} X_C = 0{,}82\,\text{A} \cdot 31{,}83\,\Omega = 26{,}0\,\text{V}\ ,$$
$$U_L = I_{\text{eff}} X_L = 0{,}82\,\text{A} \cdot 157{,}1\,\Omega = 128{,}1\,\text{V}\ .$$

d) A fáziskülönbség:

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{X_L - X_C}{R}$$
$$= \text{arctg}\,\frac{157{,}1\,\Omega - 31{,}83\,\Omega}{50\,\Omega} = 68{,}2^\circ\ .$$

X/21.22. feladat:
Veszteség nélküli transzformátor primer tekercsén $N_1 = 600$, szekunder tekercsén $N_2 = 1000$ menet van. A primer tekercset $U_1 = 230\,\mathrm{V}$-ra kötjük. Mekkora ellenállással terheltük a szekunder kört, ha a primer tekercsen $I_1 = 25\,\mathrm{mA}$ erősségű áram folyik?

A szekunder kör feszültsége:

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 = \frac{1000}{600} \cdot 230\,\mathrm{V} = 383{,}\dot{3}\,\mathrm{V}.$$

A szekunder kör árama:

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1 = \frac{600}{1000} \cdot 25\,\mathrm{mA} = 15\,\mathrm{mA}.$$

Az ellenállás:

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} \left(= \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \cdot \frac{U_1}{I_1} \right) = \frac{383{,}\dot{3}\,\mathrm{V}}{0{,}015\,\mathrm{A}} = 25560\,\Omega.$$

X/21.46. feladat:
Sorba kapcsolt veszteséges tekercset és veszteségmentes változtatható kapacitású kondenzátort $U_{\mathrm{eff}} = 230\,\mathrm{V}$ feszültségű (effektív érték), $f = 50\,\mathrm{Hz}$ frekvenciájú hálózatról táplálunk. A kondenzátor kapacitását változtatva a felvett legnagyobb áramerősség $I_C^{\max} = 150\,\mathrm{mA}$. Ekkor a tekercs kapcsain $U_L = 350\,\mathrm{V}$ (effektív érték) feszültséget mérhetünk. Mekkora a tekercs ellenállása és önindukciós együtthatója?

A veszteséget egy R ellenállás behelyezésével tudjuk figyelembe venni. A teljes impedancia így:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

amely akkor adja a maximális $I_{\mathrm{eff}} = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{Z}$ áramot, ha Z minimális, azaz $X_L = X_C$. Ilyenkor $Z = R$, tehát

$$R = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_C^{\max}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}} = 1533\,\Omega.$$

A tekercsre igaz, hogy:

$$Z_L = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$
$$\frac{U_L}{I_{\mathrm{eff}}} = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2},$$

amelyből:

$$L = \sqrt{\frac{\left(\frac{U_L}{I_{\mathrm{eff}}}\right)^2 - R^2}{(2\pi f)^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{350\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}}\right)^2 - (1533\,\Omega)^2}{(2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz})^2}}$$

$$= 5{,}6\,\mathrm{H}$$

X/A.5. feladat:
Egy váltakozó áramú kör teljesítménye $P = 500\,\mathrm{W}$, feszültsége $U_{\mathrm{eff}} = 1000\,\mathrm{V}$, árama $I_{\mathrm{eff}} = 0{,}8\,\mathrm{A}$.
a. Mekkora a fázisszög?
b. Mekkora az impedancia?
c. Mekkora az ohmos ellenállás?

A teljesítményre vonatkozó összefüggésből a teljesítménytényező:

$$\cos\varphi = \frac{P}{U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}}} = \frac{500\,\mathrm{W}}{1000\,\mathrm{V} \cdot 0{,}8\,\mathrm{A}} = 0{,}625,$$

a fázisszög $\varphi = 51{,}28°$.

Az impedancia:

$$Z = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{1000\,\mathrm{V}}{0{,}8\,\mathrm{A}} = 1250\,\Omega.$$

Az ohmikus ellenállás:

$$R = Z\cos\varphi = 1250\,\Omega \cdot 0{,}625 = 781\,\Omega.$$

Otthoni gyakorlásra:

X/21.3. feladat:
Az $I = 300[\mathrm{A}] \sin\left(314\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] t[\mathrm{s}] + \frac{\pi}{3}\right)$ tiszta szinuszos váltakozó áramnak mennyi a
(a) csúcsértéke, (b) körfrekvenciája, (c) frekvenciája, (d) periódusideje, (e) kezdőfázisa?

X/21.23. feladat:
Szinuszosan váltakozó feszültség periódusideje 0,02 s; csúcsértéke 500 V.
a. Mekkora a frekvencia?
b. Mekkora a körfrekvencia?
c. Mekkora a pillanatnyi feszültség értéke 0,001 s-mal azután, hogy 0 volt?
d. Mekkora a pillanatnyi feszültség értéke 0,001 s-mal a csúcsérték felvétele után?

X/21.25. feladat:
Határozzuk meg az ábrán látható váltakozó feszültség effektív értékét!

X/21.26. feladat:
Az ábra szerint változó árammal mennyi idő alatt lehet feltölteni egy 8 amperóra töltési kapacitású akkumulátort?

X/21.31. feladat:
Valamely tekercs egyenáramú ellenállása $25\,\Omega$. $230\,\mathrm{V}$ hálózati feszültség ($50\,\mathrm{Hz}$) esetén az átfolyó áram $8\,\mathrm{A}$. Mekkora a tekercs önindukciós együtthatója?

X/21.36. feladat:
$230\,\mathrm{V}$-os hálózati váltakozó feszültségre sorba kapcsolunk egy ohmos ellenállást, melynek nagysága $50\,\Omega$, és egy kondenzátort, melynek ellenállása $50\,\mathrm{Hz}$ frekvenciánál $100\,\Omega$.
a. Mekkora a kondenzátor kapacitása?
b. Mekkora a feszültség az egyes elemeken?
c. Mekkora a feszültség és az áram közötti fáziskülönbség?

X/21.37. feladat:
Transzformátor primer körét $120\,\mathrm{V}$ hálózati feszültségre kapcsoljuk. Az 1000 menetű terheletlen szekunder tekercs sarkain $600\,\mathrm{V}$ a feszültség. Hány menetből áll a primer tekercs?

X/21.52. feladat:
Egy transzformátornak, amely a váltakozó feszültséget $100\,\mathrm{V}$-ról $3300\,\mathrm{V}$-ra növeli, gyűrű alakú zárt vasmagja van. A gyűrűt egy vezeték veszi körül, amelynek végei feszültségmérőhöz kapcsolódnak. A műszer $0{,}5\,\mathrm{V}$-ot mutat. Hány menete van a transzformátor primer és szekunder tekercsének?

X/E.6. feladat:
Egy 50 ohmos ellenállást egy ismeretlen önindukciójú tekerccsel sorba kötve és a $230\,\mathrm{V}$, $50\,\mathrm{Hz}$ periódusú hálózatra kapcsolva $2\,\mathrm{A}$ áramot mérünk. Ha még egy kondenzátort is sorba iktatunk, az áramerősség akkor is $2\,\mathrm{A}$ marad.
a. Mekkora a tekercs önindukciója és a kondenzátor kapacitása?
b. Mekkora teljesítményt vesz fel az áramkör kondenzátor nélkül, illetőleg kondenzátorral?

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.