

Bevezető fizika (infó), 8. feladatsor

Egyenáram, egyenáramú áramkörök 2.

2014. november 11., 13:19

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- Kirchhoff törvényei:

I. Minden csomópontban a befolyó és kifolyó áramok előjeles összege zérus: $\sum_{\text{be}} I_i = \sum_{\text{ki}} I_i$.

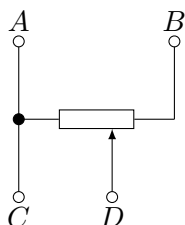
II. Minden hurokra $0 = \sum_i U_i + \sum I_i R_i$ (lásd 19.16. példa).

- Kapocsfeszültség (U_k , ami a fogyasztóhoz kijut), elektromotoros erő (ε , minden ami az feszültségforrásban van), belső ellenállás (R_b , a feszültségforrás ellenállása): $U_k = \varepsilon - IR_b$.

Órai feladatok:

19.3. feladat: A zérus ohmtól 100Ω -ig változtatható ellenállású feszültségosztó A és B pontjai között 100 V a feszültség.

- Milyen határok között változtathatjuk a feszültséget a C és D pontok között?
- Mekkora a C és D pontok közötti feszültség, ha a csúszka az ellenállás közepén áll? (A potenciométer egyenletes keresztmetszetű huzalból készült.)

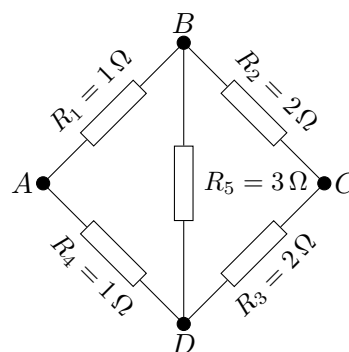


- A C pont a potenciál szempontjából megfelel az A -nak hiszen a vezeték ideális. A D -n pedig akkora a potenciál A -hoz képest, amekkora aránya az ellenállásnak van azon az oldalon. Az ellenállás 0 -tól 100Ω -ig változik, és összesen 100 V , feszültség

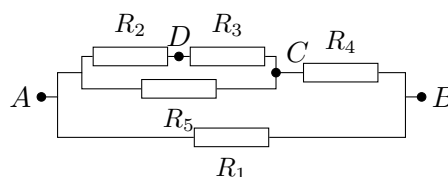
osztódik el. Ez ohmonként 1 volt , összességében C és D között 0 és 100 V között tetszőleges érték beállítható.

- Ha a csúszka középen áll, akkor 50Ω van jobbra, így az előző gondolatmenet alapján $50\Omega \cdot 1\text{ V}/\Omega = 50\text{ V}$ feszültséget mérhetünk.

19.10. feladat: Mekkora az eredő ellenállás az ábrán látható kapcsolás A – B , B – C , C – D , D – A és A – C pontjai között?



A – B : Az áramkört átrajzolhatjuk:



Melynek ellenállását azonnal számolhatjuk:

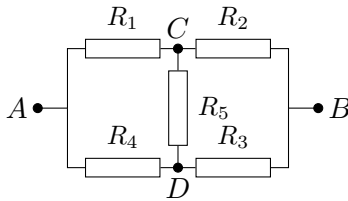
$$\begin{aligned}
 R_{23} &= R_2 + R_3 \\
 R_{235} &= \frac{1}{\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_5}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2+R_3} + \frac{1}{R_5}} \\
 &= \frac{(R_2 + R_3) \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5} \\
 R_{2345} &= R_{235} + R_4 \\
 &= \frac{(R_2 + R_3) \cdot (R_4 + R_5) + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5}
 \end{aligned}$$

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_{2345}} + \frac{1}{R_1}}$$

$$= \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3 + R_5)}{(R_2 + R_3) \cdot (R_1 + R_4 + R_5) + (R_1 + R_4) \cdot R_5}$$

B–C: Az *A–B* esethez teljesen hasonlóan lehet megoldani, úgy mint a *C–D* és a *D–A* eseteket is.

A–C: A kapcsolás átrajzolásával itt egy kicsit más kapcsolást kapunk:

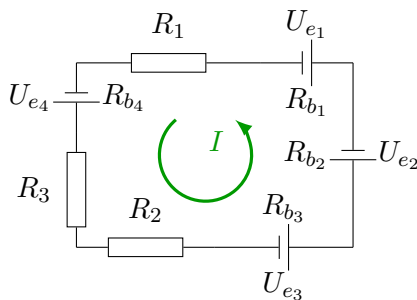


Itt, mivel az R_1 és az R_2 aránya ugyanakkora, mint az R_4 és az R_3 aránya, így ugyanakkora feszültség fog esni az R_1 és az R_4 ellenállásokon, vagyis a C és a D pont között nem lesz soha feszültség. Ennek következménye, hogy az R_5 -ös ellenálláson nem folyik áram, vagyis annak ellenállását az eredő ellenállás számításakor nem kell figyelembe venni. A többi járuléka:

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}}$$

$$= \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

19.16. feladat: Mekkora az áramerősség az ábra szerint összekapcsolt áramkörben? ($R_1 = 20 \Omega$; $R_2 = 40 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$; $U_1 = U_2 = 10 \text{ V}$; $U_3 = 6 \text{ V}$; $U_4 = 20 \text{ V}$; $R_{b,1} = 0,2 \Omega$; $R_{b,2} = R_{b,3} = 0,1 \Omega$; $R_{b,4} = 0,01 \Omega$.)



Az áramkörben folyó áram kiszámításához felhasználjuk Kirchhoff II. törvényét. Ez azt mondja ki, hogy

egy áramhurok mentén a feszültségek előjeles összegének nullát kell adnia.

Vegyünk fel az áram irányát úgy, ahogy az ábrán szerepel. Ennek az irányában fogjuk körbejárni az áramhurokot. Ebben az esetben az ellenállásokon eső feszültség $U = IR$. A telepek feszültségét pedig a következő előjelekkel kell figyelembe venni. Ha a telepen úgy haladunk át, hogy a feszültség csökken, vagyis a pozitív kivezetéséről lépünk át a negatív kivezetésére, akkor annak a feszültségét pozitív előjellel kell figyelembe venni. Ezzel szemben, ha fordítva haladunk át egy telepen, vagyis úgy, hogy alacsonyabb feszültségű helyről lépünk magasabb feszültségűre, akkor annak a feszültségét negatív előjellel kell venni.

Ebben a konkrét esetben, ha a jobb alsó sarokban kezdjük a körbejárást:

$$0 = U_2 + IR_{b,2} + U_1 + IR_{b,1} + IR_1$$

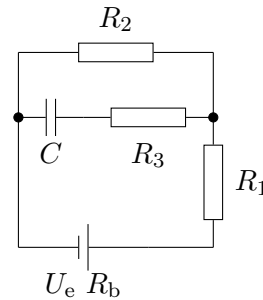
$$- U_4 + IR_{b,4} + IR_3 + IR_2 - U_3 + IR_{b,3}$$

$$I = \frac{U_3 + U_4 - U_1 - U_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{b,1} + R_{b,2} + R_{b,3} + R_{b,4}}$$

$$I = \frac{6 \text{ V} + 20 \text{ V} - 10 \text{ V} - 10 \text{ V}}{20 \Omega + 40 \Omega + 10 \Omega + 0,2 \Omega + 2 \cdot 0,1 \Omega + 0,01 \Omega}$$

$$= 0,085 \text{ A} .$$

19.18. feladat: Mekkora feszültségre töltődik fel az ábrán látható kapcsolásban a kondenzátor? ($U_e = 3,6 \text{ V}$; $R_b = 10 \Omega$; $R_1 = 40 \Omega$; $R_2 = 70 \Omega$; $R_3 = 30 \Omega$.)



A kondenzátor feltöltődése után azon már nem folyik áram, vagyis akkor az R_3 -as ellenállás is kiesik az áramkörből. Ekkor csak az R_1 , az R_2 és a telep belső ellenállása marad a körben, mind sorba kapcsolva, vagyis az eredő ellenállás

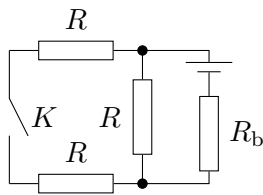
$$R_e = R_1 + R_2 + R_b = 40 \Omega + 70 \Omega + 10 \Omega = 120 \Omega ,$$

és a körben folyó áram

$$I = \frac{U_e}{R_e} = \frac{3,6 \text{ V}}{120 \Omega} = 0,03 \text{ A} .$$

Ekkor az R_2 -n eső feszültség $U_2 = R_2 I_2 = 2,1 \text{ V}$. Mivel a kondenzátor és az R_3 -as ellenállás ezzel párhuzamosan van kötve, így azokon is ekkora feszültség esik. Azonban az R_3 -as ellenálláson nem folyik áram, így azon nem eshet feszültség, tehát a $2,1 \text{ V}$ -nak mind a kondenzátoron kell esnie.

19.28. feladat: Az ábra szerinti kapcsolásban a K kapcsoló nyitott állásánál $I_{\text{ny}} = 0,1 \text{ A}$, zárt kapcsolóállás esetén pedig $I_z = 0,133 \text{ A}$ erősségű áram folyik az elemet tartalmazó ágba. Mekkora az elem elektromotoros ereje és belső ellenállása? ($R = 18 \Omega$.)



Ha a kapcsoló nyitott, akkor az áramkörben egy R és a belső ellenállás van sorba kapcsolva. Ekkor

$$I_{\text{ny}} = \frac{U}{R + R_b} .$$

Bekapcsolt kapcsolóállás esetén a belső ellenállással egy két ágból álló párhuzamos kör van sorba kapcsolva. A párhuzamos rész ellenállása:

$$R_{\parallel} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R}} = \frac{2}{3} R ,$$

mellyel az eredő ellenállás, és az áram

$$R_e = R_{\parallel} + R_b = \frac{2}{3} R + R_b .$$

$$I_z = \frac{U}{R_e} = \frac{U}{\frac{2}{3} R + R_b} .$$

A két egyenletből meg lehet határozni a keresett két mennyiséget. Behelyettesítve:

$$0,1 \text{ A} = \frac{U}{18 \Omega + R_b}$$

$$0,133 \text{ A} = \frac{U}{12 \Omega + R_b} ,$$

majd átrendezve

$$U = 1,8 \text{ V} + 0,1 \text{ A} \cdot R_b$$

$$U = 1,6 \text{ V} + 0,133 \text{ A} \cdot R_b ,$$

ahonnan

$$1,8 \text{ V} + 0,1 \text{ A} \cdot R_b = 1,6 \text{ V} + 0,133 \text{ A} \cdot R_b$$

$$0,2 \text{ V} = 0,033 \text{ A} \cdot R_b$$

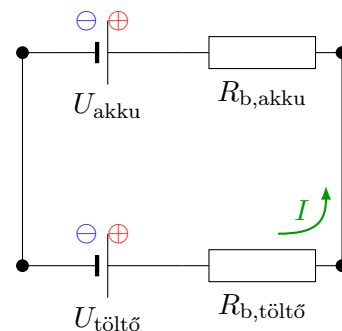
$$R_b = 6 \Omega ,$$

melyet visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$U = 1,8 \text{ V} + 0,1 \text{ A} \cdot 6 \Omega = 2,4 \text{ V} .$$

19.43. feladat: Egy autóakkumulátort töltés céljából $U_t = 13 \text{ V}$ elektromotoros erejű és $R_{t,b} = 0,09 \Omega$ belső ellenállású töltőre kapcsolunk. Az akkumulátor belső ellenállása $R_{a,b} = 0,01 \Omega$, elektromotoros ereje $U_a = 12 \text{ V}$.

- Mekkora a töltőáram?
- Mennyi a töltő által leadott teljesítmény?
- Mennyi az akkumulátor és a töltő melegítésére fordítódó teljesítmény?
- Mennyi az akkumulátor töltésére fordítódó teljesítmény?



- Az akkumulátort úgy dugjuk a töltőre, hogy annak negatív pólusát a töltő negatív pólusához, a pozitívát pedig a pozitívhoz kapcsoljuk. Az áramkör egy hurokból áll. A huroktörvény:

$$0 = -U_t + I R_{b,t} + I R_{b,a} + U_a$$

$$I = \frac{U_t - U_a}{R_{b,t} + R_{b,a}} = \frac{13 \text{ V} - 12 \text{ V}}{0,09 \Omega + 0,01 \Omega} = 10 \text{ A} .$$

- A töltő által leadott teljesítmény:

$$P_t = U_t I = 13 \text{ V} \cdot 10 \text{ A} = 130 \text{ W} .$$

- Az akkumulátor és a töltő melegedését a belső ellenállásokon termelődő Joule-hő okozza. Ez veszteségként jelenik meg:

$$P_v = I^2 \cdot R_{b,a} + I^2 \cdot R_{b,t}$$

$$= (10 \text{ A})^2 \cdot 0,01 \Omega + (10 \text{ A})^2 \cdot 0,09 \Omega = 10 \text{ W} .$$

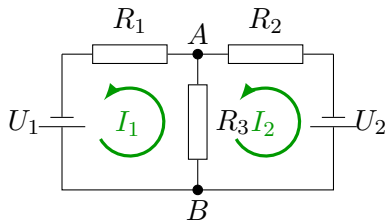
d) Az akkumulátor töltésére

$$P_a = U_a I = 12 \text{ V} \cdot 10 \text{ A} = 120 \text{ W}$$

teljesítmény fordítódik.

Vegyük észre, hogy töltő által leadott teljesítmény megegyezik a hasznos teljesítmény és a veszteség összegével: ez egy példa energiamegmaradás törvényére.

19.45. feladat: Az ábrán látható hálózatban az ellenállások értéke $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$ és $R_3 = 100 \Omega$. A telepek elektromotoros ereje $U_1 = 1,5 \text{ V}$; $U_2 = 1 \text{ V}$, és belső ellenállásuk elhanyagolható. Határozzuk meg az AB ágban folyó áram erősségét!



Írjuk fel a huroktörvényt a jobb és bal oldalra is:

$$R_1 I_1 - U_1 + (I_1 - I_2) R_3 = 0$$

$$U_2 + R_2 I_2 + (I_2 - I_1) R_3 = 0$$

majd rendezzük az áramokra:

$$I_1(R_1 + R_3) - I_2 R_3 - U_1 = 0$$

$$I_1(-R_3) + I_2(R_2 + R_3) + U_2 = 0.$$

Az elsőből $I_1 = \frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3}$, amely beírható a másodikba, amelyet így csak rendezni kell:

$$0 = -\frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3} R_3 + I_2(R_2 + R_3) + U_2$$

∴

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{U_1 R_3 - U_2(R_1 + R_3)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2} \\ &= \frac{1,5 \text{ V} \cdot 100 \Omega - 1 \text{ V} \cdot (50 \Omega + 100 \Omega)}{(50 \Omega + 100 \Omega)(80 \Omega + 100 \Omega) - (100 \Omega)^2} \\ &= 0 \text{ A}. \end{aligned}$$

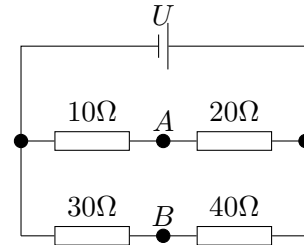
Ha visszahelyettesítjük:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1 + I_2 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{1,5 \text{ V} + 0 \text{ A} \cdot 100 \Omega}{50 \Omega + 100 \Omega} \\ &= 0,01 \text{ A}. \end{aligned}$$

Az AB szakaszon folyó áram:

$$I_{AB} = I_2 - I_1 = -0,01 \text{ A}.$$

+1. feladat: Az ábrán látható kapcsolásban mekkora az A és B pont közötti feszültség nagysága? ($U = 220 \text{ V}$)



A felső soron ágban az eredő ellenállás $R_{12} = 30 \Omega$, míg az alsóban $R_{34} = 70 \Omega$. A teljes eredő:

$$R_e = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = 21 \Omega.$$

A főágban folyó $I = \frac{U}{R_e} = 10,476 \text{ A}$ áram az ellenállások arányában fordítottan oszlik el az ágakon, azaz:

$$I_{12} R_{34} = I_{34} R_{12}$$

A fenti egyenlet alapján

$$I_{12} = \frac{R_{34}}{R_{12}} I_{34}$$

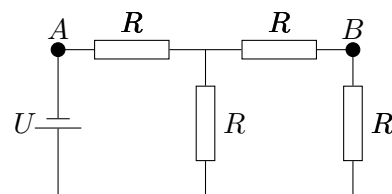
$$\left(\frac{R_{34}}{R_{12}} + 1 \right) I_{34} = I \quad \rightarrow \quad I_{34} = 3,14 \text{ A},$$

$$I_{12} = I - I_{34} = 7,3 \text{ A}.$$

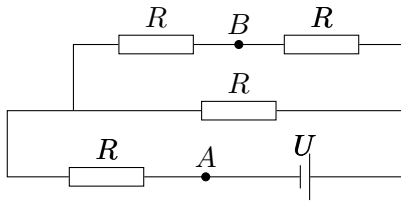
Az A pont potenciálja $U_A = R_1 I_{12} = 10 \Omega \cdot 7,3 \text{ A} = 73,3 \text{ V}$, a B ponté $U_B = R_3 I_{34} = 30 \Omega \cdot 3,14 \text{ A} = 94,2 \text{ V}$. A kettő különbsége:

$$U_{AB} = U_B - U_A = 20,9 \text{ V}.$$

+2. feladat: Az ábrán látható kapcsolásban mekkora az A és B pont közötti feszültség nagysága? ($U = 10 \text{ V}$)



Átrajzolva:



Az eredő ellenállás:

$$R_e = \frac{(R + R)R}{(R + R) + R} + R = \frac{5}{3}R.$$

Az áramerősség a főágban és így a lenti ellenálláson $I = \frac{U}{R_e}$, így az arra jutó feszültség $U_1 = IR = \frac{3}{5}U$. A párhuzamos tagra jut a maradék, és szimmetria miatt a B pont elé és mögé annak fele-fele. Azaz az AB feszültség a következő:

$$U_{AB} = U_1 + \frac{U - U_1}{2} = \frac{3}{5}U + \frac{U - \frac{3}{5}U}{2} = \frac{4}{5}U = 8 \text{ V}.$$

Otthoni gyakorlásra:

19.5, 19.12, 19.14, 19.24, 19.33

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.