

Bevezető fizika (infó), 6. feladatsor

Elektrosztatika

2014. november 10., 15:36

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- töltés (Q , $[Q] = 1 \text{ C}$), tapasztalat (azonos taszít, ellentétes vonz), Coulomb-törvény

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{r}}{r^2 r},$$

$9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

vákuum permittivitása $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$, relatív permittivitás ϵ_r

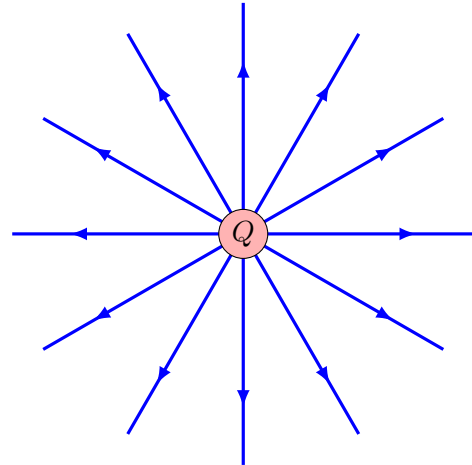
- q próbatöltésre ható erő \rightarrow elektromos tér ($\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$)
- erővonalkép, homogén erőtér
- munkavégzés $W = \mathbf{F}\mathbf{s} = q\mathbf{E}\mathbf{s}$, feszültség/potenciálkülönbség ($U = \mathbf{E}\mathbf{s}$, $[U] = 1 \text{ V}$)
- kondenzátor $C = \frac{Q}{U}$, $[C] = 1 \text{ F}$, síkkondenzátor $C = \epsilon \frac{A}{l}$, energia, $U = \frac{1}{2} C U^2$

Órai feladatok:

17.2. feladat: Mekkora az elektromos térerősség a pontszerű $Q = 10^{-5} \text{ C}$ pozitív töltéstől $d = 1 \text{ m}$ távolságban vákuumban? Milyen felületen vannak azok a pontok, amelyekben a térerősség ugyanakkora? Milyen irányú a térerősség?

A vákuumban \mathbf{r}' helyen lévő Q töltés elektromos térerőssége:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$



Itt ϵ_0 a vákuum permittivitása, egy állandó. Az utolsó tag egy egységvektor, az $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ vektor le van osztva annak hosszával. Ez az egységvektor adja meg a térerősség irányát, ez mindig a töltés helyétől az \mathbf{r} megfigyelési pontba mutat. A térerősség nagysága:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2},$$

mely csak a töltéstől mért távolságtól függ. Tehát a ponttöltés körüli térerősség nagysága gömbfelületeken állandó, hiszen annak pontjai vannak ugyanakkora távolságban a töltéstől.

A térerősség nagysága a töltéstől 1 m távolságban:

$$\begin{aligned} E(1 \text{ m}) &= \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}} \cdot \frac{10^{-5} \text{ C}}{(1 \text{ m})^2} \\ &= 8,99 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}. \end{aligned}$$

17.5. feladat: Két pontszerű töltés egymástól $d = 0,5 \text{ m}$ távolságban van rögzítve. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség a töltések összekötő egyenesében, a Q_2 töltéstől $x = 2 \text{ m}$ távolságban jobbra? (balra $Q_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$; jobbra $Q_2 = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$)

Rögzítsük a jobb oldali töltést az $x'_1 = 0$ helyen. A bal oldali töltés így az $x'_2 = -d$ koordinátájú helyen

van. A térerősségek nagysága az egyenes mentén:

$$|E_{\text{bal}}(x)| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_1|}{(x-x'_b)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_1|}{(x+d)^2}$$

$$|E_{\text{jobb}}(x)| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_2|}{(x-x'_j)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_2|}{x^2}.$$

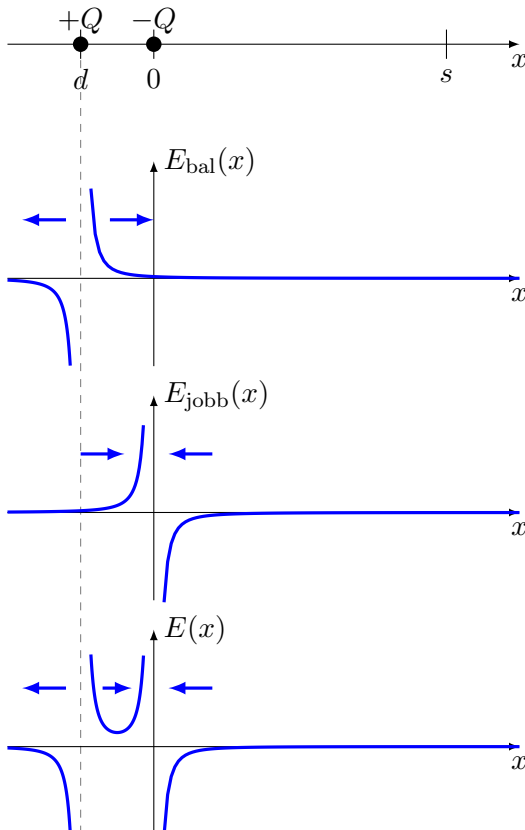
A teljes térerősség nagysága ezek összege, azonban ehhez figyelembe kell venni a térerősségek előjelét is. A bal oldali töltés pozitív, így a pozitív ponttöltést az taszítja. Emiatt ennek térerősség járuléka attól balra negatív, jobbra pedig pozitív. A jobb oldali töltés negatív, vagyis attól jobbra annak a térerőssége negatív, balra pedig pozitív előjelű. Jelöljük $Q_1 = |Q_2| = Q$, mellyel:

$$E(x) = E_{\text{bal}}(x) + E_{\text{jobb}}(x) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{(x+d)^2} + \frac{1}{x^2} \right) & x < -d \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{(x+d)^2} + \frac{1}{x^2} \right) & -d < x < 0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{(x+d)^2} - \frac{1}{x^2} \right) & 0 < x \end{cases}$$

A térerősség a jobb oldali töltéstől $s = 2\text{ m}$ -re jobbra:

$$E(s) = \frac{2 \cdot 10^{-6} Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{-2 \cdot 0,5 \text{ m} \cdot \left(2 \text{ m} + \frac{0,5 \text{ m}}{2} \right)}{(2 \text{ m})^2 \cdot (2 \text{ m} + 0,5 \text{ m})^2} \right) = -1,62 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

A térerősség nagysága negatív, vagyis a térerősség balra mutat.



17.6. feladat: Homogén elektrosztatikus tér pontjaiban a térerősség $E = 10^5 \text{ V/m}$. Mekkora erő hat a térben levő $q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ töltésű kicsi fémgolyóra? Mennyi a golyó gyorsulása, ha tömege $m = 5 \text{ g}$?

A testre a Coulomb-erő hat, amely felírható a térerősséggel:

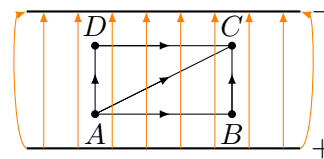
$$F = qE = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C} \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Newton törvénye értelmében az erő alapján a gyorsulás:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ N}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

17.7. feladat: Síkkondenzátor homogén elektromos terében a térerősség $E = 1000 \text{ N/C}$. Az ábra szerinti elrendezés esetén, az AD és BC szakaszok 1 cm hosszúságúak.

- Mennyi munkát végeznek az elektromos erők, ha $Q = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ pozitív töltés az A pontból a C pontba: az ABC ; vagy az ADC ; vagy közvetlenül az AC úton mozdul el?
- Mennyivel kisebb a B ; C ; D ; pontban a potenciál, mint az A pontban?
- Mennyi a kondenzátor lemezei között a feszültség, ha a lemezek távolsága 3 cm ?



A töltésre ható erő: $F = QE = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 1000 \text{ N/C} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$, melynek iránya megegyezik az elektromos térerősség irányával, vagyis felfelé mutat. Az erő állandó: annak nagysága és iránya független a töltés helyétől.

Az AB és a DC egyenesek mentén végzett munka nulla, hiszen itt az elmozdulás és az erő egymásra merőleges, így a skalárszorzat nulla. Az AD és a BC egyenesek mentén pedig az elmozdulás párhuzamos az erő irányával, így a munka:

$$W_{AD} = W_{BC} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AD} = F \cdot |\overrightarrow{AD}| = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot 1 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

Az AC úton végzett munkát hasonlóan számolhatjuk:

$$W_{AC} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AC} = F \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \alpha = F \cdot \frac{|\overrightarrow{AD}|}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha = W_{AD}.$$

A feszültség homogén térerősség esetében:

$$V = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = -\frac{W}{Q},$$

vagyis az AB szakaszon nem esik feszültség, az AD és az AC szakaszokon pedig

$$V_{AC} = V_{AD} = -\frac{5 \cdot 10^{-5} \text{ J}}{5 \cdot 10^{-6} \text{ C}} = -10 \text{ V}.$$

A kondenzátor lemezei közötti feszültség nagysága

$$V = 1000 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ cm} = 30 \text{ V}.$$

17.8. feladat: Mekkora sebességre gyorsul fel vákuumban, homogén elektrosztatikus térben, s úton az eredetileg nyugvó elektromos részecske? ($m = 10^{-6} \text{ g}$; $Q = 10^{-7} \text{ C}$, $E = 10^4 \text{ V/m}$; $s = 10 \text{ cm}$)

Használjuk a munkatételt! Az egyik oldalon külső gyorsító erőként ott van az elektromos tér, míg a másikon a mozgási energia változásából kijön a sebesség:

$$QEs = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

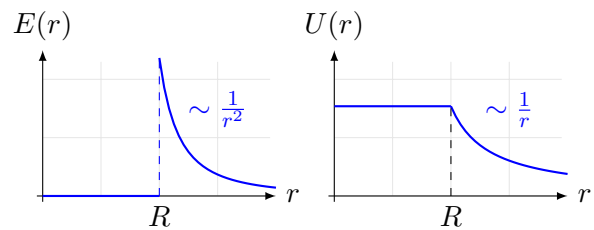
$$v = \sqrt{\frac{2QEs}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 0,1 \text{ m}}{10^{-9} \text{ kg}}}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 10^5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 447,21 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

17.10. feladat: Mekkora a térerősség és a potenciál egy tömör, töltött fémgömb belsejében?

Mivel a gömb ideális vezető, így annak belsejében nem lehet térerősség. Ennek az az oka, hogy ha lenne, akkor a fém belsejében lévő többi töltésre azonnal hatna a Coulomb erő, és azok elmozdulnának, és azok egészen addig mozognának, míg olyan állapot áll be, hogy nem hat már rájuk erő.

A gömbön belül a potenciál pedig állandó. Ennek oka, hogy a gömb belsejében a térerősség nulla, abban sehhol sem eshet feszültség, vagyis semelyik két pont között nincs potenciálkülönbség.



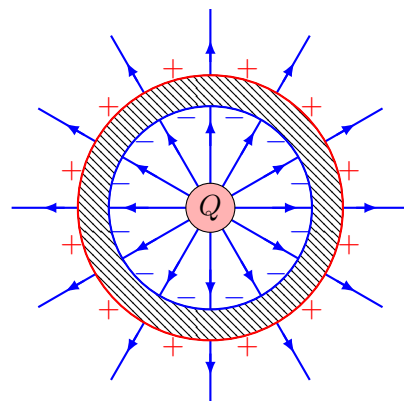
17.11. feladat: Fémből készült, töltetlen gömbhéj középpontjában $+Q$ pontszerű töltés helyezkedik el.

- Hogyan helyezkednek el a megosztott töltések a gömbhéjon?
- Rajzoljuk meg vázlatosan az erővonalakat a gömbön belül és kívül!
- Hat-e erő a gömbön kívül levő töltésre?
- A gömböt lefödve, hogyan változik meg a töltések eloszlása?

a) A gömbhéj külső és belső felületére töltések fognak felhalmozódni. A belső töltésfelhalmozódásnak az oka a gömb közepén található töltés megosztó hatása, a gömbhéj negatív töltései ahhoz közel, míg annak pozitív töltései attól távol szeretnének elhelyezkedni. Kérdés még, hogy a gömbhéj belsejében található-e szabad töltés. Mivel a gömbhéj ideális vezető, így annak belsejében nem lehet térerősség. Ennek az az oka, hogy ha lenne, akkor a fém belsejében lévő többi töltésre azonnal hatna a Coulomb erő, és azok elmozdulnának, és azok egészen addig mozognának, míg olyan állapot áll be, hogy nem hat már rájuk erő.

Ezek mellett még azt is tudjuk, hogy a töltések irány szerinti eloszlása egyenletes lesz, melynek oka, hogy a probléma gömbszimmetrikus.

b) Az erővonalat párhuzamosak az elektromos térerősség irányával, és az erővonalak sűrűsége arányos a térerősség nagyságával.



c) Igen.

d) A gömbhéj külső felületén az ott felhalmozódó pozitív töltések taszítják egymást. Ha földeljük azt a felületet, akkor ezek a töltések már el tudnak távolodni egymástól, így a felületen megszűnik a töltésfelhalmozódás: a felület semleges lesz.

17.13. feladat: Sorosan kapcsolunk egy $C_1 = 4 \mu\text{F}$ -os és egy $C_2 = 6 \mu\text{F}$ -os kondenzátort. Mekkora töltéstől töltődik fel a rendszer $U = 220 \text{ V}$ -ra?

Sorosan kapcsolt kapacitások esetén az eredő nagysága:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-6} \text{ F}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-6} \text{ F}},$$

az eredő $C = 2,4 \mu\text{F}$. A kondenzátorokra jutó töltés:

$$Q = CU = 2,4 \mu\text{F} \cdot 220 \text{ V} = 5,28 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$$

17.25. feladat: Mennyi annak a kondenzátornak a kapacitása, amelyet $Q = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ töltés $U = 20 \text{ V}$ feszültségre tölt fel?

A kapacitás definíció szerint:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{20 \text{ V}} = 1,25 \cdot 10^{-9} \text{ F}.$$

17.26. feladat: Mekkora eredő kapacitást kapunk, ha $C_1 = 2 \mu\text{F}$ és $C_2 = 3 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátort

a) sorba, b) párhuzamosan kapcsolunk?

a, Sorba kapcsolás esetén:

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-6} \text{ F}} + \frac{1}{3 \cdot 10^{-6} \text{ F}} \right)^{-1} = 1,2 \mu\text{F}.$$

b, Ha párhuzamosan kapcsoljuk őket:

$$C = C_1 + C_2 = 2 \mu\text{F} + 3 \mu\text{F} = 5 \mu\text{F}.$$

Megj. Ez a példa előrevehető első kondenzátoros példának, aztán a levezetést hozzá el lehet közben mondani.

17.27. feladat: Két sorba kötött kondenzátorra, amelyek kapacitása $C_1 = 2 \mu\text{F}$ és $C_2 = 4 \mu\text{F}$; $U = 120 \text{ V}$ feszültséget kapcsolunk. Mekkora az egyes kondenzátorokra jutó feszültség?

A soros kapcsolás miatt mindkét kondenzátorra ugyanakkora töltés jut, azaz:

$$\begin{aligned} C_1 U_1 &= C_2 U_2 = C_2 (U - U_1) \\ (C_1 + C_2) U_1 &= C_2 U \\ U_1 &= \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{4 \mu\text{F}}{2 \mu\text{F} + 4 \mu\text{F}} \cdot 120 \text{ V} \\ &= 80 \text{ V}. \end{aligned}$$

A másik kondenzátorra $U_2 = U - U_1 = 120 \text{ V} - 80 \text{ V} = 40 \text{ V}$ jut.

Otthoni gyakorlásra:

17.4, 17.12, 17.14, 17.21, 17.23, 17.24, K6

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.