

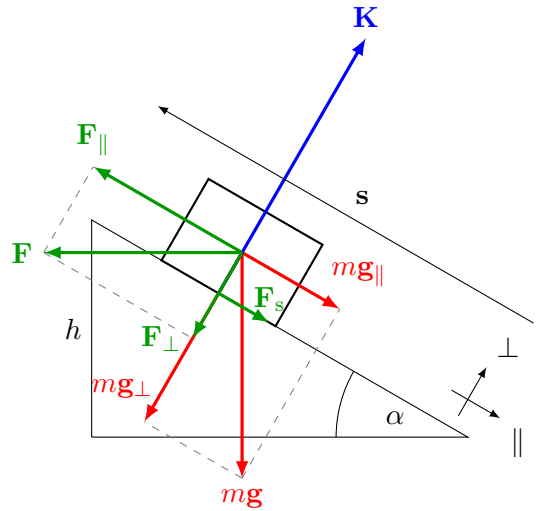
# Bevezető fizika (infó), 4. feladatsor

## Munka, energia, teljesítmény

2014. október 16., 10:03

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- munka  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \alpha$  skalárszorzat (számít az irány!).  $[W] = 1 \text{ J}$
- szakaszokra bontás, határesetben integrálás ( $W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} d\mathbf{s}$ ), azaz a görbe alatti terület!
- nehézségi erőtér  $\rightarrow$  helyzeti energia:  $E_h = mgh$ , ami negatív is lehet (pl. talajszint alatt)
- kinetikus/mozgási energia:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
- rugó:  $E_r = \frac{1}{2}Dx^2$  ( $x$  a megnyúlás,  $D$  a rugóállandó)
- munkatétel  $\Delta E_k = W$
- teljesítmény ( $P = \frac{W}{t}$ ), hatásfok ( $\eta = \frac{\text{hasznos}}{\text{összes}}$ ),  
1 kWh = 3600 kJ



Mivel állandó erők hatnak, így a munkát ki lehet számítani az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként. A feladat megoldásához először határozzuk meg, hogy mekkora  $F$  erőre van szükség. A Newton-egyenleteket felírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \perp : \quad 0 &= K - mg \cos \alpha - F \cdot \sin \alpha \\ \parallel : \quad 0 &= F \cdot \cos \alpha - mg \sin \alpha - F_s, \end{aligned}$$

ahol  $F_s = \mu \cdot K$ , és  $K$  az első egyenletből kifejezhető:

$$K = mg \cos \alpha + F \sin \alpha,$$

melyet a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} 0 &= F \cdot \cos \alpha - mg \sin \alpha - \mu \cdot (mg \cos \alpha + F \sin \alpha) \\ F &= \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \cdot mg. \end{aligned}$$

Szükségünk lesz még a többi erő nagyságára is:

$$\begin{aligned} K &= mg \cos \alpha + F \sin \alpha \\ &= mg \cos \alpha + \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \cdot mg \sin \alpha \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \mu \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \mu \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \cdot mg \\ &= \frac{1}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \cdot mg, \\ F_s &= \mu K = \frac{1}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \cdot \mu mg. \end{aligned}$$

### Órai feladatok:

**4.7. feladat:**  $\alpha = 30^\circ$ -os lejtőn valaki egy  $m = 20$  kilogrammos bőröndöt tol fel vízszintes irányú erővel  $h = 2$  méter magasra. A mozgási súrlódási együttható  $\mu = 0,2$ . A bőrönd mozgása egyenletes. Mennyi munkát végez:

- a) az ember,
- b) a súrlódási erő,
- c) a bőröndre ható nehézségi erő,
- d) a lejtő nyomóereje,
- e) a bőröndre ható erők eredője?

( $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ )

a) Az ember által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_{\text{ember}} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \alpha \\ &= \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \cdot mg \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{\sin 30^\circ + 0,2 \cdot \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0,2 \cdot \sin 30^\circ} \cdot 20 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{2 \text{ m}}{\sin 30^\circ} \cdot \cos 30^\circ \\ &= 608,87 \text{ J} . \end{aligned}$$

b) A súrlódási erő által végzett munka:

$$\begin{aligned} W_s &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = -F_s \cdot s \\ &= -\frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \\ &= -\frac{0,2 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 30^\circ - 0,2 \cdot \sin 30^\circ} \cdot \frac{2 \text{ m}}{\sin 30^\circ} \\ &= -208,87 \text{ J} . \end{aligned}$$

c) A nehézségi erő munkája

$$\begin{aligned} W_{mg} &= mg \cdot \mathbf{s} = -mg_{\parallel} \cdot s = -mg \sin \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \\ &= -20 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m} = -400 \text{ J} . \end{aligned}$$

d) A lejtő nyomóereje nem végez munkát, hiszen az merőleges az  $\mathbf{s}$  elmozdulásra.

e) A bőrröndre ható erők eredője nulla, hiszen a bőrrönd összgyorsulása nulla. Ennek munkája természetesen nulla.

Vegyük észre, hogy ezt a korábbi eredményekből is megkapjuk, hiszen ha összeadjuk az összes erő munkáját, akkor is nullát kapunk.

**4.11. feladat:** Rugós erőmérőt  $\Delta l = 10 \text{ cm}$ -rel kihúztunk. Mekkora munkát végeztünk a megnyújtáskor, ha a mutató  $F = 50 \text{ N}$  nagyságú erőt jelez?

Először számoljuk ki a rugó állandóját:

$$D = \frac{F}{\Delta l} = \frac{50 \text{ N}}{0,1 \text{ m}} = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} .$$

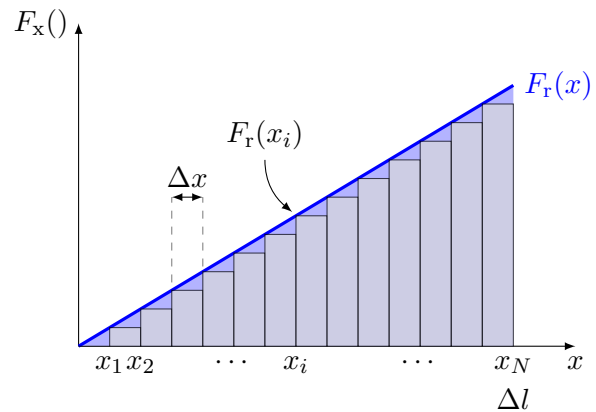
Ennek a munkának a kiszámolásánál az a probléma, hogy az általunk kifejtett erő nem állandó, hiszen tudjuk, hogy a rugóerő  $F_r(x) = D \cdot x$ , ahol  $x$  a megnyúlás, és a mi erőnk ennek az ellenereje.

A munka kiszámolásához először tekintsünk azt a pillanatot, mikor éppen  $x_i$ -vel van megnyújtva a rugó. Próbáljuk ekkor a rugót még egy nagyon kicsi  $\Delta x$

hosszal még jobban megnyújtani. Ez olyan kis távolság, hogy ez alatt az erő gyakorlatilag nem változik, végig  $F_r(x) = D \cdot x_i$ . Ekkor a munkánk erre a kis  $\Delta x$  szakaszra:

$$\Delta W(x_i) = F_r(x) \cdot \Delta x = D \cdot x_i \cdot \Delta x .$$

A teljes megnyújtásra számolt munkát úgy kapjuk, hogy a  $\Delta l$  távolságot felosztjuk sok ilyen kicsi  $\Delta x$  szakaszra, kiszámoljuk a munkát az egyes szakaszokra, majd összeadjuk őket. Vegyük észre, hogy az így számított összeg, éppen az  $F_r(x)$  függvény alatti terület téglalapösszege.



Ha egyre finomítjuk a felosztást, akkor az  $F_r(x)$  függvény alatti területet kapjuk a  $x \in [0, \Delta l]$  tartományon. A téglalapösszeg pedig egy integrálásba megy át:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta W(x_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N D \cdot x_i \cdot \Delta x \\ &= \int_0^{\Delta l} dW(x) = \int_0^{\Delta l} D \cdot x \cdot dx = \left[ \frac{1}{2} D x^2 \right]_0^{\Delta l} \\ &= \left( \frac{1}{2} D \cdot (\Delta l)^2 \right) - \left( \frac{1}{2} D \cdot 0^2 \right) = \frac{1}{2} D \cdot (\Delta l)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,1 \text{ m})^2 = 2,5 \text{ J} . \end{aligned}$$

**4.32. feladat:** Oldjuk meg a munkatétellel a következő feladatot:  $v_0 = 500 \text{ m/s}$  sebességű puska golyó  $s_{\text{max}} = 5 \text{ cm}$  mélyen hatol be a fába. Mekkora volt a sebessége  $s = 2 \text{ cm}$  mélységben? Tételizzük fel, hogy a fa fékező ereje állandó.

A munkatétel szerint  $\Delta E_{\text{kin}} = W$ , kifejtve  $W = F_{\text{fék}} \cdot s_{\text{max}}$ , míg  $\Delta E_{\text{kin}} = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$ . Így a fékezőerő:

$$F_{\text{fék}} = -\frac{\frac{1}{2} m v_0^2}{s_{\text{max}}} .$$

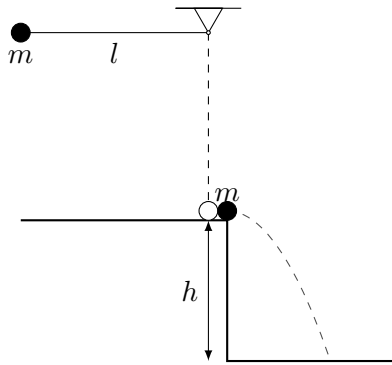
Ha csak 2 cm-t haladunk, akkor a mozgási energia megváltozása  $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ , míg a munka  $W = F_{\text{fék}} \cdot s$ , azaz a munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_{\text{fék}} \cdot s = -\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{s_{\text{max}}} \cdot s$$

Amelyből fejezzük ki a sebességet:

$$v = \sqrt{\left(1 - \frac{s}{s_{\text{max}}}\right) v_0^2} = 387,3 \text{ m/s.}$$

**4.39. feladat:** Az ábrán látható ingát  $90^\circ$ -kal kitérítjük és elengedjük. Az asztal szélén levő, vele egyenlő tömegű golyóval teljesen rugalmasan ütközik. Határozzuk meg, hogy az asztaltól milyen távol ér a padlóra a lelökött golyó!



A mozgás több részre bontható. Először az inga lelendül (1–2), majd megtörténik az ütközés (2–3), végül pedig a második test leesik (3–4). Ezeket a speciális állapotokat mind összeköti a munkatétel, melyet használhatunk.

**1–2:** Az ingatest lelendül. Válasszuk a helyzeti energia nullszintjét az asztal szintjének. Ekkor a testnek az (1) pontban van helyzeti energiája, ám nincs mozgási energiája, ezzel szemben a (2) helyzetben helyzeti energiája nincs, cserébe viszont mozgási energiája lett, hiszen  $v_2$  sebességgel mozog. A testre a kötélerő hat, ami sosem véggez munkát, illetve hat rá a nehézségi erő, annak a munkáját viszont helyzeti energiában vettük figyelembe.

Ez alapján a munkatörvény:

$$\begin{aligned} W &= \Delta(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) \\ 0 &= \left(\frac{1}{2}mv_2^2\right) - (mgl) \\ v_2 &= \sqrt{2gl} . \end{aligned}$$

**2–3:** Itt történik meg az ütközés. Mivel az ütközés teljesen rugalmas, így az ütközés során az energia megmarad. Szintén mivel a külső erők munkája nulla, így az impulzusmegmaradást is lehet használni. A két törvény:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 &= \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}mu_3^2 \\ mv_2 + 0 &= mv_3 + mu_3 , \end{aligned}$$

ahol az  $u$ -val jelölt tagok a kezdetben álló golyó jellemzői.

A két egyenlet egyszerűsítve:

$$\begin{aligned} v_2^2 &= v_3^2 + u_3^2 \\ v_2 &= v_3 + u_3 , \end{aligned}$$

majd a második egyenlet négyzetre emelve:

$$v_2^2 = v_3^2 + u_3^2 + 2v_3u_3 ,$$

és ebből az első egyenletet kivonva:

$$0 = 2v_3u_3 ,$$

tehát vagy az első vagy a második test állni fog az ütközés után. Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletre pillantva láthatjuk, hogy ha az egyik sebesség nulla, akkor a teljes kezdeti sebességet a másik test kapja meg. Innen adódik, hogy a kezdetben mozgó golyónak kell megállnia, és a másikkal ugyanakkora sebességgel továbbhaladnia, hiszen a fordított eset nem lehetséges.

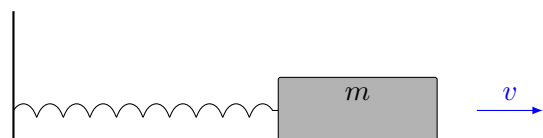
Tehát  $v_3 = 0$ ,  $u_3 = v_2 = \sqrt{2gl}$ .

**3–4:** A mozgás utolsó szakaszában egy vízszintes hajítás történik. A leesés ideje  $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ , mely alatt a test

$$s = T \cdot u_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \sqrt{2gl} = 2\sqrt{lh}$$

utat tesz meg.

**D6. feladat:** Az ábrán látható  $m = 0,01 \text{ kg}$  tömegű testtel  $\Delta l = 7,5 \text{ cm}$ -rel összenyomtuk a  $D = 4 \text{ N/m}$  rugóállandójú rugót, majd a testet elengedtük. A test és a vízszintes felület közti mozgási súrlódási együttható értéke  $\mu = 0,25$ . Mekkora utat tesz meg a test a megállásig?



A megoldást a munkatétel alapján fogjuk megadni. Tekintsük a rugót és a testet egy rendszernek. Vegyük sorra a rendszer energiájának megváltozását és a rendszeren végzett munkákat. Kezdetben a test állt, illetve a rugó meg volt feszítve, a végállapotban pedig a rugó egyenes, illetve a test áll. A rendszeren csak a súrlódási erő végez munkát. Ez alapján a munkatétel:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{rug}} &= W_s \\ (0 - 0) + \left(0 - \frac{1}{2}D \cdot (\Delta l)^2\right) &= -\mu mgs \\ \frac{1}{2}D \cdot (\Delta l)^2 &= \mu mgs,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy a  $\Delta l$ -lel összenyomott rugóban tárolt energia  $E_{\text{rug}} = \frac{1}{2}D(\Delta l)^2$ . Innen

$$\begin{aligned}s &= \frac{1}{2}D \cdot \frac{(\Delta l)^2}{\mu mg} = \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{(0,075 \text{ m})^2}{0,25 \cdot 0,01 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= 0,45 \text{ m}.\end{aligned}$$

**4.24. feladat:**  $mg = 100 \text{ N}$  súlyú testet  $F = 120 \text{ N}$  nagyságú erővel emelünk. Mekkora a teljesítmény az indulás után  $T = 2$  másodperccel? Mekkora az átlagteljesítmény az első 2 másodperc alatt?

A pillanatnyi teljesítmény  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . A testre ható erők eredője  $F_e = 120 \text{ N} - 100 \text{ N} = 20 \text{ N}$ , vagyis a test gyorsulása  $a = \frac{20 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Kezdetben a test állt,  $T$  idő elteltével a test sebessége:  $v(T) = a \cdot T = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Mivel ez a sebesség felfelé mutat, így egy irányba esik az emelőerővel. A teljesítményünk tehát:

$$P(2 \text{ s}) = 120 \text{ N} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 480 \text{ W}.$$

Az átlagteljesítmény kiszámításához tudnunk kell, hogy hogyan változik a pillanatnyi teljesítmény az időben. Az időfüggés a sebességen keresztül történik:

$$P(t) = F \cdot v(t) = F \cdot a \cdot t.$$

Mivel a teljesítmény az idővel lineáris kapcsolatban áll, így az átlagteljesítmény számolható, mint a kezdeti és a végállapotban lévő pillanatnyi teljesítmény számtani közepe:

$$P_{\text{átl}} = \frac{P(2 \text{ s}) + P(0)}{2} = \frac{480 \text{ W} + 0}{2} = 240 \text{ W}.$$

**4.31. feladat:** Egy ládát állandó sebességgel húzunk vízszintes talajon. Mozgás közben  $F_s = 250 \text{ N}$  a fellépő súrlódási erő. Milyen messzire húzhatjuk el a ládát  $W_{\text{mi}} = 0,001 \text{ kWh}$  munka árán?

A munkatételt használjuk ismét. A mozgás során a testen csak az általunk kifejtett erő és a súrlódási erő végez munkát. Mivel a test állandó sebességgel halad, így a mozgási energiája nem változhat meg:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin}} &= W_s + W_{\text{mi}} \\ 0 &= -F_s \cdot s + W_{\text{mi}} \\ s &= \frac{W_{\text{mi}}}{F_s} = \frac{0,001 \text{ kWh}}{250 \text{ N}} = \frac{1 \cdot 3600 \text{ W} \cdot \text{s}}{250 \text{ N}} = 14,4 \text{ m}.\end{aligned}$$

#### Otthoni gyakorlásra:

**4.16. feladat:** Mekkora átlagos teljesítménnyel lehet egy 1000 kg tömegű személyautót 10 másodperc alatt, álló helyzetből 100 km/h sebességre gyorsítani?

**4.28. feladat:** A ferdén eldobott 0,5 kg tömegű kő kezdeti mozgási energiája 87 joule. A kő 30 m messze esik le a vízszintes talajra. Milyen szög alatt hajítottuk el? (A légellenállást ne vegyük figyelembe!)

**4.30. feladat:**  $v_0 = 5 \text{ m/s}$  kezdősebességgel függőlegesen lefelé hajítunk egy követ. Mennyi idő alatt négyszereződik meg a mozgási energiája?

**4.40. feladat:**  $M = 10 \text{ kg}$  tömegű homokzsák  $l = 2 \text{ m}$  hosszú fonálon függ. Egy  $m = 10 \text{ g}$  tömegű puskagolyó behatol a homokzsákba, és ennek hatására a fonál  $\alpha = 10^\circ$ -os szöggel kitér. Mekkora volt a golyó sebessége? ( $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ )

**4.29. feladat:**  $h_0 = 10$  méter mély kútból, méterenként  $F_{\text{lánc}} = 10 \text{ N}$  súlyú lánccal vizet húzunk fel. A vödör súlya vízzel együtt  $F_{\text{vödör}} = 120 \text{ N}$ . Mekkora munka árán tudunk egy vödör vizet felhúzni?

**4.23. feladat:** Egy ejtőernyős kiugrik egy 2000 m magasságban szálló repülőgépből. (A gép vízszintesen repül, sebessége 100 m/s.) Az ejtőernyős sebessége földet éréskor 5 m/s. Tömege az ernyővel együtt 100 kg. Mennyi munkát végzett a közegellenállás?

**4.9. feladat:** Mekkora munkavégzéssel jár egy  $m = 4 \text{ kg}$  tömegű test felgyorsítása vízszintes talajon  $v_v = 3 \text{ m/s}$  sebességre  $s = 2$  méter úton, ha a talaj és a test közötti súrlódás együtthatója  $\mu = 0,3$ ? ( $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ )

A feladatok forrása Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.