Bevezető fizika (infó), 3. feladatsor
Dinamika 2. és Statika

2014. október 25., 14:50

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- impulzus, impulzusmegmaradás
- forgatónyomaték
- egyensúly és feltétele

Órai feladatok:

2.15. feladat: $F = 50\,\mathrm{N}$ nagyságú erő hat egy testre $t = 10\,\mathrm{s}$-ig. A test erő irányú sebessége közben $v = 5\,\mathrm{m/s}$-mal növekszik. Mekkora a test tömege? A feladatot az impulzustétel segítségével oldjuk meg.

Az impulzustétel: $\mathbf{F}t = \mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Az erő és sebesség egy egyenesbe esik, így a vektor jelzés elhagyása, és átrendezés után a test tömege:

$$m = \frac{Ft}{v} = \frac{50\,\mathrm{N} \cdot 10\,\mathrm{s}}{5\,\mathrm{m/s}} = 100\,\mathrm{kg}.$$

3.6. feladat: A rakománnyal együtt $M = 1$ tonna tömegű vasúti pályakocsi vízszintes pályán $v = 10\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad. Mozgás közben a kocsin ülő emberek lelöknek egy $m = 100\,\mathrm{kg}$ tömegű síndarabot, amely függőlegesen esik a talpfákra. Mekkora sebességgel halad tovább a pályakocsi, ha a súrlódástól eltekinthetünk?

Oldjuk meg impulzusmegmaradással. Kezdetben az egész rendszerben van $p = Mv$, a ledobás után $p' = (M - m)v' + m \cdot 0$. A kettő egyenlőségéből a sebesség:

$$v' = \frac{M}{M - m}v = \frac{1000\,\mathrm{kg}}{1000\,\mathrm{kg} - 100\,\mathrm{kg}} 10\,\mathrm{m/s} = \\ = 11{,}\dot{1}\,\mathrm{m/s}.$$

3.14. feladat: A $m_1 = 120\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_1| = 40\,\mathrm{cm/s}$ sebességű és a $m_2 = 80\,\mathrm{g}$ tömegű, $|v_2| = 100\,\mathrm{cm/s}$ sebességű két test egymással szembe mozog egy egyenes mentén. Teljesen rugalmatlan ütközés után mekkora és milyen irányú sebességgel mozognak tovább?

Jelöljük ki a pozitív irányt úgy, hogy az első test mozgásával megegyező legyen. Az ütközés előtt az összimpulzus:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

utána:

$$p' = (m_1 + m_2)v',$$

és persze tudjuk, hogy a kettőnek meg kell egyeznie. Ezért a sebesség:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ = \frac{0{,}12\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}4\,\mathrm{m/s} + 0{,}08\,\mathrm{kg} \cdot (-1\,\mathrm{m/s})}{0{,}12\,\mathrm{kg} + 0{,}8\,\mathrm{kg}} = \\ = -0{,}16\,\mathrm{m/s}.$$

A sebesség előjele alapján a második test sebességének irányában mozognak együttesen.

3.32. feladat: Az $H = 1000\,\mathrm{m}$ magasan lebegő léggömbről $m = 80\,\mathrm{kg}$ tömegű bombát ejtenek le. A bomba $h = 600\,\mathrm{m}$ esés után két részre robban szét. Az egyik, $m_1 = 30\,\mathrm{kg}$ tömegű rész a robbanás pillanatában vízszintes irányban $v_1 = 200\,\mathrm{m/s}$ sebességet kap. Hol éri el a talajt a másik rész? (A légellenállástól tekintsünk el.)

Kövessük a bomba mozgását. Az első szakasz h hosszú, és egyenletesen gyorsulva tesszük meg, azaz

$$h = \frac{g}{2}t_1^2 \qquad \rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

A teljes magasság leeséséhez:

$$H = \frac{g}{2}t^2 \qquad \rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

így a robbanás után még

$$t_2 = t - t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = $$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1000\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m/s^2}}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 600\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m/s^2}}} = 3{,}19\,\mathrm{s}$$

időt mozog.

A robbanásra felírhatunk egy impulzusmegmaradást, azaz előtte $p = m \cdot 0$, utána $p' = m_1 v_1 + (m - m_1)v_2$. Az egyenlőség alapján:

$$v_2 = -\frac{m_1}{m - m_1} v_1 = -\frac{30\,\mathrm{kg}}{80\,\mathrm{kg} - 30\,\mathrm{kg}} 200\,\mathrm{m/s} =$$
$$= -120\,\mathrm{m/s}.$$

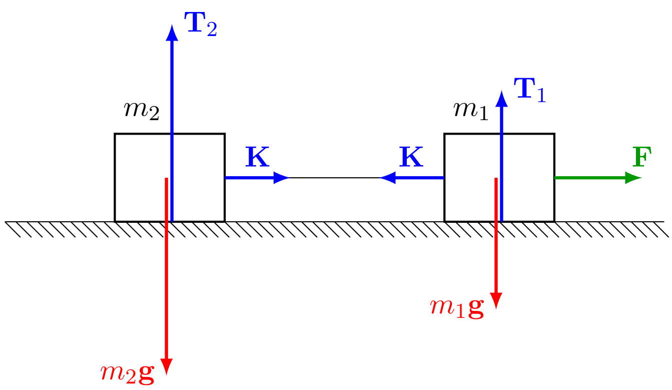
Az elmozdulás az eltelt idő és a fenti sebesség szorzata:

$$s_2 = t_2 v_2 = -382{,}5\,\mathrm{m}.$$

3.1. feladat: Ha az erő és az ellenerő egyenlő nagyságú és ellenkező irányú erők, miért nem „semmisítik meg” egymást?

Mert nem ugyanarra hatnak.

3.2. feladat: Vízszintes irányú, $F = 8\,\mathrm{N}$ nagyságú erővel hatunk az $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ tömegű testre, amely egy fonállal az $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ tömegű testhez van kötve az ábrán látható elrendezésben. Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a fonál tömegétől és a súrlódástól eltekintünk?



Itt is először felírjuk az egyes testekre a Newton-törvényt függőleges és vízszintes irányban:

$$\begin{aligned} 1{,}x: &\quad m_1 a_{1x} = F - K \\ 1{,}y: &\quad m_1 a_{1y} = T_1 - m_1 g \\ 2{,}x: &\quad m_2 a_{2x} = K \\ 2{,}y: &\quad m_2 a_{2y} = T_2 - m_2 g\,. \end{aligned}$$

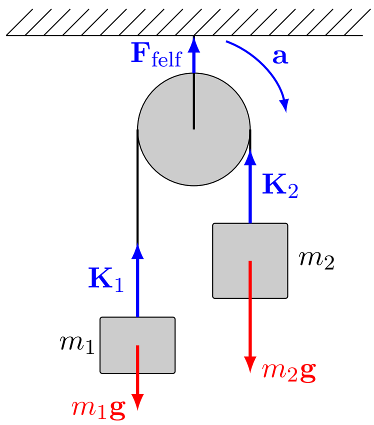
Mivel függőleges elmozdulás nincs, így $a_{1y} = a_{2y} = 0$. A két testet összekötő kötél nyújthatatlan, így a két test gyorsulása minden pillanatban ugyanakkora: $a_{1x} = a_{2x} = a$. Ezt egyszerűen meghatározhatjuk, ha összeadjuk a két x irányú egyenletet:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{8\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg} + 3\,\mathrm{kg}} = 1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Ezt felhasználva a kötelet feszítő erő 2,x egyenlet alapján:

$$K = m_2 a = 3\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4{,}8\,\mathrm{N}\,.$$

3.3. feladat: Állócsigán átvetett fonál végein m_1 illetve m_2 tömegű test van. Mekkora gyorsulással mozog az egyik, illetve a másik test, és mekkora erő hat a mennyezetre, ahová a csigát felfüggesztették? A fonál és a csiga tömege elhanyagolható, a fonál nem nyúlik meg, a tengely nem súrlódik, a közegellenállás és a levegőben a felhajtó erő elhanyagolható.



Írjuk fel a testekre a kötél mentén, illetve a csigára függőleges irányban a Newton-törvényt:

$$\begin{aligned} 1: &\quad m_1 a = K_1 - m_1 g \\ 2: &\quad m_2 a = m_2 g - K_2 \\ \mathrm{cs}: &\quad 0 = F_{\mathrm{felf}} - K_1 - K_2\,. \end{aligned}$$

Mivel a kötél és a csiga ideális, ezért a két kötélerő nagysága megegyezik, $K_1 = K_2 = K$. Az első két egyenletből adódik:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g\,.$$

Ha az m_2 test a nehezebb, akkor arra fog mozogni a rendszer, ha pedig a másik, akkor visszafelé. A kötélerő:

$$K = m_1 \cdot (a + g) = m_1 \cdot \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + 1 \right) g$$

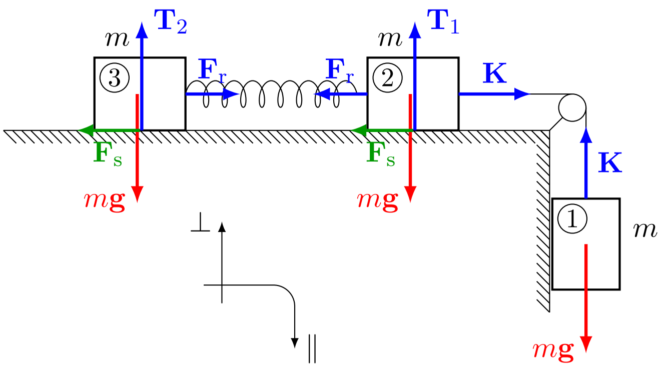
$$= \frac{2m_1m_2}{m_2+m_1}g \ ,$$

vagyis a csiga a felfüggesztést

$$F_{\text{felf}} = 2K = \frac{4m_1m_2}{m_2+m_1}g$$

erővel húzza.

3.12. feladat: Mennyivel nyúlik meg az ábra szerinti elrendezésben a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? A csiga, a rugó és a fonál tömegét ne vegyük figyelembe. Legyen $m = 1\,\text{kg}$, a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$, a rugóállandó $D = 4\,\text{N/cm}$.



Itt is felírjuk a Newton-törvényeket, figyelembe véve azt, hogy a rendszer csak az asztal felülete mentén mozog.

$$\begin{aligned}
1,\ \|:& \qquad ma = mg - K \\
1,\ \perp:& \qquad 0 = 0 \\
2,\ \|:& \qquad ma = K - F_{\text{r}} - F_{\text{s},1} \\
2,\ \perp:& \qquad 0 = T_1 - mg \\
3,\ \|:& \qquad ma = F_{\text{r}} - F_{\text{s},2} \\
3,\ \perp:& \qquad 0 = T_2 - mg \ ,
\end{aligned}$$

ahol $F_{\text{s},1} = \mu T_1$ és $F_{\text{s},2} = \mu T_2$. A merőleges egyenletekből a T tartóerőket meghatározva, majd behelyettesítve a párhuzamos irányokra felírt egyenletekbe:

$$\begin{aligned}
1,\ \|:& \qquad ma = mg - K \\
2,\ \|:& \qquad ma = K - F_{\text{r}} - \mu mg \\
3,\ \|:& \qquad ma = F_{\text{r}} - \mu mg \ .
\end{aligned}$$

A három egyenlet összegéből:

$$a = \frac{1-2\mu}{3}g \ ,$$

melyet visszahelyettesítve az utolsóba:

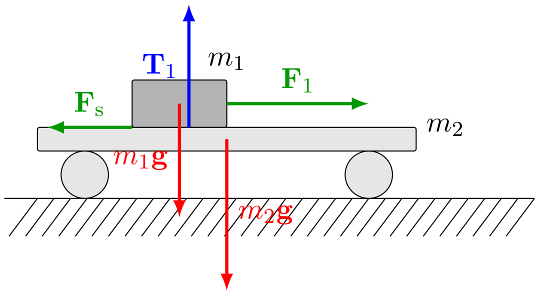
$$m \cdot \frac{1-2\mu}{3}g = F_{\text{r}} - \mu mg$$

$$F_{\text{r}} = \frac{1+\mu}{3} \cdot mg \ .$$

Vagyis a rugó megnyúlása:

$$\Delta l = \frac{F_{\text{r}}}{D} = \frac{1+\mu}{3}\frac{mg}{D} = \frac{1+0{,}2}{3}\frac{1\,\text{kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 0{,}01\,\text{m} \ .$$

3.29. feladat: A $m_2 = 2\,\text{kg}$ tömegű kiskocsi vízszintes síkon súrlódás nélkül mozoghat. A kocsira $m_1 = 0{,}5\,\text{kg}$ tömegű hasábot helyeztünk, és a hasábot $F_1 = 1\,\text{N}$ vízszintes irányú erővel húzzuk. Mekkora a hasáb, illetve a kocsi gyorsulása, ha közöttük a tapadási súrlódási együttható $\mu_{\text{tap}} = 0{,}25$, csúszó súrlódási együttható pedig $\mu_{\text{cs}} = 0{,}01$? Mekkora a gyorsulás $F_1' = 10\,\text{N}$-os húzóerő esetén? ($g \approx 10\,\text{m/s}^2$)



Számoljuk ki a maximális tapadási erőt. Ebből kiderül, hogy a kocsi és a test összetapadva marad, vagy egymáshoz képest elmozdul. Tehát:

$$F_{\text{tap}} = \mu_{\text{tap}}T_1 = \mu_{\text{tap}}m_1g = 0{,}25\cdot 0{,}5\,\text{kg}\cdot 10\,\text{m/s}^2 = \\ = 1{,}25\,\text{N},$$

azaz az első esetben $F_1 < F_{\text{tap}}$, így egyben maradnak.

A talajon nincsen súrlódás, így csak az F_1 gyorsító erő számít: $F_1 = (m_1+m_2)a$, amelyből:

$$a = \frac{F_1}{m_1+m_2} = \frac{1\,\text{N}}{0{,}5\,\text{kg}+2\,\text{kg}} = 0{,}4\,\text{m/s}^2.$$

A második esetben $F_1' > F_{\text{tap}}$, azaz külön mozognak. A test mozgásegyenlete: $F_1' - F_s = m_1a_1'$, azaz:

$$\begin{aligned}
a_1' = \frac{F_1'-F_s}{m_1} &= \frac{F_1'-\mu_{\text{cs}}m_1g}{m_1} = \\
&= \frac{10\,\text{N} - 0{,}01\cdot 0{,}5\,\text{kg}\cdot 10\,\text{m/s}^2}{0{,}5\,\text{kg}} = \\
&= 19{,}9\,\text{m/s}^2.
\end{aligned}$$

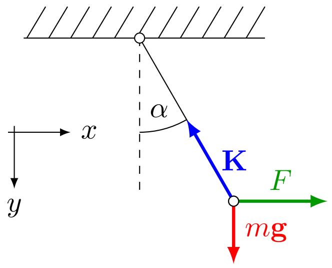
A kocsira $-F_{\text{s}} = m_2a_2'$, amelyből:

$$a_2' = \frac{-F_s}{m_2} = \frac{-\mu_{\text{cs}}m_1g}{m_2} =$$

$$= \frac{-0{,}01 \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{2\,\mathrm{kg}} =$$
$$= -0{,}025\,\mathrm{m/s^2},$$

A kocsi lassan elindul hátrafelé.

5.1. feladat: Fonálra függesztett $mg = 20\,\mathrm{N}$ súlyú golyót vízszintes irányban oldalt húzunk. Mekkora erővel húzza a fonál a testet, ha az a függőlegessel $\alpha = 30°$-os szöget zár be?



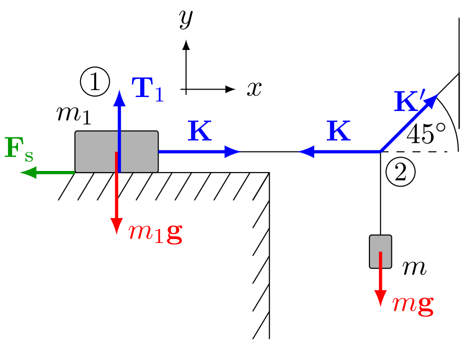
Az egyensúly feltétele:

$$x: \qquad F - K_x = F - K\sin\alpha = 0$$
$$y: \qquad mg - K_y = mg - K\cos\alpha = 0$$

A másodikból kifejezhető a kötélerő:

$$K = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{20\,\mathrm{N}}{\cos 30°} = 23{,}09\,\mathrm{N}.$$

5.26. feladat: Az m tömegű testet két fonál segítségével, az ábrán látható módon függesztünk fel. Az asztallapon fekvő test tömege $m_1 = 72\,\mathrm{kg}$, az asztal és közötte a súrlódási együttható $\mu = 0{,}25$. Mekkora m tömeg esetén van egyensúly?



Az egyensúly feltétele a testre (1):

$$x: \qquad K - F_s = 0,$$
$$y: \qquad T_1 - m_1 g = 0,$$

illetve tudjuk, hogy $F_s = \mu T_1$. A rögzítési pontra (2):

$$x: \qquad K'_x - K = K'\cos\alpha - K = 0,$$
$$y: \qquad K'_y - mg = K'\sin\alpha - mg = 0.$$

Az elsőből kifejezhető $K = F_s = \mu m_1 g$, amely beírható a második párba. Így $K'\cos\alpha - \mu m_1 g = 0$, azaz

$$K' = \frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha},$$

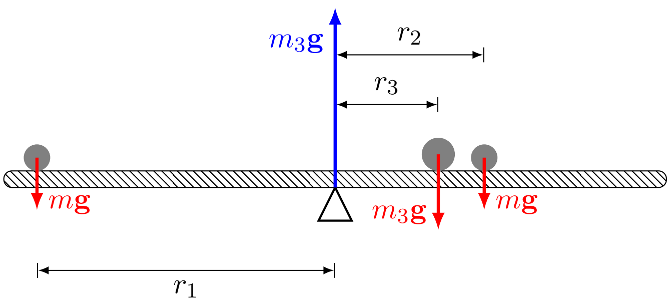
és az y-ra vonatkozó egyenlet:

$$\frac{\mu m_1 g}{\cos\alpha}\sin\alpha - mg = 0.$$

Ebből a keresett tömeg:

$$m = \mu m_1 \mathrm{tg}\alpha = 0{,}25 \cdot 72\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{tg}45° = 18\,\mathrm{kg}.$$

5.10. feladat: Mérleghinta két oldalán egy-egy $mg = 450\,\mathrm{N}$ súlyú gyerek ül. Egyikük $|r_1| = 3\,\mathrm{m}$, másikuk $|r_2| = 1{,}5\,\mathrm{m}$ távolságra van a forgástengelytől.
a) Hová üljön még egy $m_3 g = 650\,\mathrm{N}$ súlyú gyerek ahhoz, hogy a hinta egyensúlyban legyen?
b) Mekkora ebben az esetben az alátámasztási pontra ható erő? (A hintát tekintsük súlytalannak!)



Az egyensúly feltétele, hogy a testre ható erők eredője, illetve a testre ható forgatónyomatékok eredője nulla legyen. Az első feltétel itt úgy fog teljesülni, hogy amekkora erővel húzzák a gyerekek a mérleghintát lefelé, az alátámasztás akkora erővel fogja azt felfelé nyomni. Tehát a b) kérdésre a válasz:

$$K = 2 \cdot mg + m_3 g = 2 \cdot 450\,\mathrm{N} + 650\,\mathrm{N} = 1550\,\mathrm{N}\,.$$

Az adott pontra vonatkoztatott forgatónyomaték $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, ahol $\mathbf{r}$ a pont és az erő támadáspontját összekötő vektor, és $\mathbf{F}$ az adott erő. Válasszuk ki az alátámasztási pontot vonatkoztatási pontnak. A mérleghintára négy erő hat: a három gyerek, és az alátámasztás. Az utóbbi forgatónyomatéka nulla, hiszen annak támadáspontja és a vonatkoztatási pont egybeesik, vagyis $\mathbf{r} = 0$. A súlyerők forgatónyomatéka egyszerűen számítható, mivel azok iránya merőleges az $\mathbf{r}$ vektorokra: a forgatónyomatékok nagysága egyenlő az erő és a távolság szorzatával. A forgatónyomatékok irányát a jobbkézszabály segítségével adhatjuk meg, az előjelek innen adódnak.

Ezek alapján az egyensúly második feltétele:

$$0 = -|r_1| \cdot mg + |r_2| \cdot mg + r_3 \cdot m_3 g \,.$$

amelyből:

$$r_3 = \frac{mg(|r_1| - |r_2|)}{m_3 g} = \frac{450\,\mathrm{N}(3\,\mathrm{m} - 1{,}5\,\mathrm{m})}{650\,\mathrm{N}} = \\ = 1{,}038\,\mathrm{m}$$

Otthoni gyakorlásra:

3.10. feladat: Egy 0,2 kg tömegű labdát 4 m magasról leejtünk. A labda 4 s-ig pattog a padlón, míg végül nyugalomban marad. Mennyi a labda által a padlóra kifejtett erő átlaga ezen 4 másodperc idő alatt alatt? (A légellenállás elhanyagolható.)

3.16. feladat: Géppuskából percenként 240 db 20 gramm tömegű lövedéket lőnek ki 1000 m/s kezdősebességgel vízszintes irányban egy céltárgyra. A golyók becsapódnak és lefékeződnek a céltárgyban.

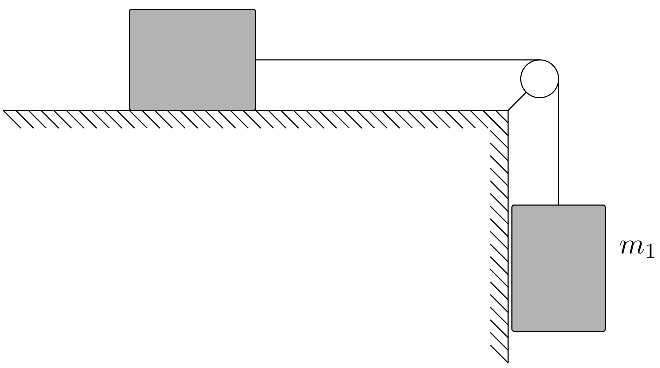
a) Mennyi a golyók által a céltárgyra kifejtett átlagos erő?

b) Mennyi a géppuskára ható átlagos (visszalökő) erő?

3.5. feladat: Mekkora az ábra szerinti fonállal egymáshoz kötött $m_1 = 0{,}5$ kg és $m_2 = 2$ kg tömegű testek gyorsulása és a fonalat feszítő erő, ha

a) az m_2 test a vízszintes síkon súrlódásmentesen csúszhat;

b) az m_2 test és a sík között a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$?

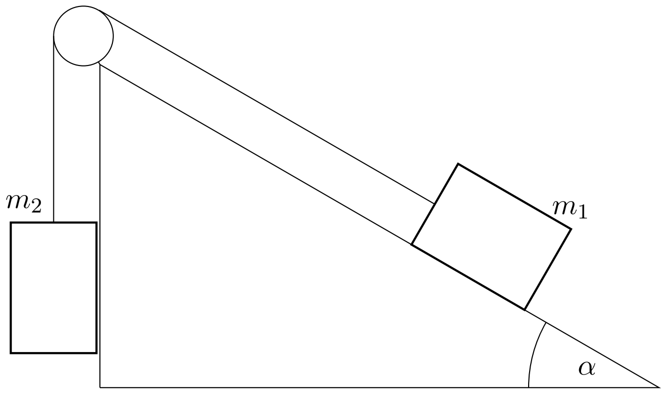


3.13. feladat: Határozzuk meg az ábrán látható rendszer gyorsulását, ha

a) a súrlódástól eltekintünk;

b) az m_1 tömegű test és a lejtő között a súrlódási együttható μ.

A lejtő rögzített helyzetű, a fonál és a csiga tömege elhanyagolható, a fonál nem nyúlik meg, a tengely nem súrlódik.



5.17. feladat: Egy rendszer n darab részecskéből áll. Mindegyik részecske az összes többire erőt gyakorol. Mutassuk meg, hogy a rendszerben $n(n-1)$ erő lép fel!

A feladatok forrása a Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.