Bevezető fizika (infó), 2. feladatsor
Kinematika 2. és Dinamika 1.

2014. október 4., 13:30

A mai órához szükséges **elméleti anyag**:

- Röviden beszéljük meg az otthoni felkészülés során felmerült kérdéseket.
- szabadesés, hajítások (kb. 10 perc)
- Az erő, az erők összegezése; Newton törvényei; testek egyensúlya; tömeg, nehézségi erő, súly, súlytalanság. súrlódás

Órai feladatok:

1.13. feladat: A talaj fölött $h_0 = 30$ méter magasságból $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel kavicsot dobunk függőlegesen fölfelé. Mekkora a kavics sebessége, elmozdulása és a megtett út $t_1 = 1\,\mathrm{s}, t_2 = 3\,\mathrm{s}; t_3 = 5\,\mathrm{s}$ múlva.

A kavics útja a következő. Először felfelé megy, eléri a maximális magasságot, majd elindul lefelé és eléri a talajt. Ez két nevezetes időpontot jelent, egyet a csúcson (t_{fel}), és az út végén ($t_{\mathrm{össz}}$). t_{fel} meghatározható a kezdeti sebességtől, és a lassulásból:

$$t_{\mathrm{fel}} = \frac{v_0}{g} = \frac{20\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 2\,\mathrm{s}.$$

Ez alapján az első időpontban még emelkedett. A sebessége $v_1 = v_0 - gt = 20\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m/s}$. A megtett út

$$\begin{aligned} s_1 =& v_0 t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} - \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(1\,\mathrm{s})^2 \\ =& 15\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

és végig azonos irányban haladt, így az elmozdulás megegyezik az úttal. A maximális magasság:

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{fel}} =& v_0 t_{\mathrm{fel}} - \frac{g}{2} t_1^2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 2\,\mathrm{s} - \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(2\,\mathrm{s})^2 \\ =& 20\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

tehát összesen $H = h_0 + s_{\mathrm{fel}} = 50\,\mathrm{m}$ magasra jutott, ahonnan a leeséshez szükséges idő meghatározható a $H = \frac{g}{2} t_{\mathrm{le}}^2$ összefüggésből:

$$t_{\mathrm{le}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{10}\,\mathrm{s} > 3\,\mathrm{s},$$

azaz az ötödik másodpercben még repülni fog. Tehát 2 másodpercig emelkedett, így t_2-ig még 1-et zuhant. A megtett út:

$$s_{22} = \frac{g}{s}(t_2 - t_{\mathrm{fel}})^2 = \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s})^2 = 5\,\mathrm{m},$$

összesen $s_2 = s_{\mathrm{fel}} + s_{22} = 25\,\mathrm{m}$. Az elmozdulás $r_2 = s_{\mathrm{fel}} - s_{22} = 15\,\mathrm{m}$. A sebessége ekkor $v_2 = -g(t_2 - t_{\mathrm{fel}}) = -10\,\mathrm{m/s}$, ahol figyelembe vettük, hogy a pozitív irány függőlegesen felfelé választottuk.

t_3 időpillanatig $t_3 - t_{\mathrm{fel}}$-t zuhan. A keresett értékek:

$$s_{32} = \frac{g}{s}(t_3 - t_{\mathrm{fel}})^2 = \frac{10\,\mathrm{m/s^2}}{2}(5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s})^2 = 45\,\mathrm{m},$$

összesen $s_3 = s_{\mathrm{fel}} + s_{32} = 65\,\mathrm{m}$. Az elmozdulás $r_2 = s_{\mathrm{fel}} - s_{32} = -25\,\mathrm{m}$. A sebessége ekkor $v_3 = -g(t_3 - t_{\mathrm{fel}}) = -30\,\mathrm{m/s}$.

1.19. feladat: Az esőcseppek függőleges irányban esnek $v_{\mathrm{eső}} = 6\,\mathrm{m/s}$ sebességgel. Az esőcseppek nyomai a vonatablakon a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró csíkok. Milyen gyorsan megy a vonat?

A vonatablakon lévő csíkok az esőcseppek látszólagos sebességvektorával egy irányba mutatnak. Az esőcseppek függőleges sebességvektora, illetve a vonat vízszintes sebességvektora egy derékszögű háromszöget határoz meg, ahol a háromszög átfogójának hossza megegyezik a cseppek látszólagos, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró sebességvektorának hosszával. A háromszögben a megfelelő szögfüggvényt felírva:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\alpha &= \frac{v_{\mathrm{eső}}}{v_{\mathrm{vonat}}} \\ v_{\mathrm{vonat}} &= \frac{v_{\mathrm{eső}}}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{tg}\,30°} = 10{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \end{aligned}$$

1.15. feladat: Határozzuk meg a $v_0 = 120\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel $\alpha = 30°$-os szögben kilőtt test helyzetét a kilövés után 3 másodperccel!

A test vízszintes irányban egyenletes mozgást végez:

$$x(t) = v_{0x}t + x_0 \ ,$$

ahol v_{0x} a kezdősebesség vízszintes komponense: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$. Az x_0 a $t = 0$ pillanatban a test helye. Helyezzük a koordináta-rendszerünket oda, ahonnan elhajítjuk a testet, így $x(t = 0) = 0$, vagyis $x_0 = 0$.

Függőleges irányban a test egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Az y tengely felfelé mutat, így a gyorsulás negatív:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0 \ ,$$

ahol v_{0y} a függőleges kezdősebesség: $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$, illetve az előzőekhez hasonlóan y_0 itt is nulla.

A mozgást leíró két egyenlet tehát:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t \ . \end{aligned}$$

A $t = 3\,\mathrm{s}$-ban:

$$\begin{aligned} x(3\,\mathrm{s}) &= 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 30° \cdot 3\,\mathrm{s} = 311{,}77\,\mathrm{m} \\ y(3\,\mathrm{s}) &= -\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(3\,\mathrm{s})^2 + 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 30° \cdot 3\,\mathrm{s} \\ &= 135\,\mathrm{m} \ . \end{aligned}$$

1.14. feladat: $h = 200$ méter magasságban $v_0 = 360\,\mathrm{km/h}$ sebességgel haladó repülőgépről a cél előtt milyen távolságban kellene kioldani a segélycsomagot ahhoz, hogy a célba csapódjék, ha nem lenne légellenállás? Mekkora lenne a segélycsomag sebessége a becsapódás pillanatában?

Függőlegesen a csomag egyenletes gyorsulással mozog, vagyis a magassága az idő függvényében:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h \ .$$

T idő alatt ez a magasság nullára csökken:

$$0 = -\frac{g}{2}T^2 + h \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6{,}32\,\mathrm{s}.$$

A csomag vízszintes kezdősebessége megegyezik a repülő sebességével, és ez a csomag mozgása során nem is változik. Emiatt, ha T idő alatt ér földet a csomag, akkor az vízszintesen $s = v_0 \cdot T$ távolságot tesz meg. Ez alapján

$$0 = -\frac{g}{2}\frac{s^2}{v_0^2} + h \qquad \Rightarrow \qquad s = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}} = 632{,}45\,\mathrm{m} \ .$$

A függőlegesen szerzett sebessége: $v_y = -gT = -63{,}2\,\mathrm{m/s}$, vízszintesen pedig maradt $v_x = v_0$. Az eredő sebesség nagysága:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 118{,}32\,\mathrm{m/s}.$$

2.14. feladat: Milyen erő hat az eldobott kőre? Mekkora a gyorsulása?

Nehézségi erő, közegellenállás. $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

2.3. feladat: A $v_0 = 9\,\mathrm{m/s}$ sebességgel elütött korong a jégen $s = 36\,\mathrm{m}$ út megtétele után áll meg. Mekkora a súrlódási együttható a korong és a jég között?

A korong egyenletesen lassult, átlagsebessége $v_{\text{átl}} = \frac{v_0}{2} = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$. Ez alapján a megállásig eltelt idő

$$t = \frac{s}{v_{\text{átl}}} = \frac{36\,\mathrm{m}}{4{,}5\,\mathrm{m/s}} = 8\,\mathrm{s}.$$

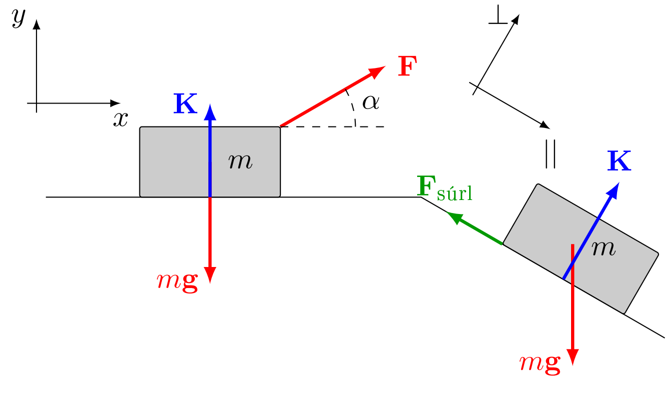
A gyorsulása

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0\,\mathrm{m/s} - 9\,\mathrm{m/s}}{8\,\mathrm{s}} = -\frac{9}{8}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Newton szerint $ma = -F_{\text{súrl}} = -\mu F_{\text{nyomó}} = -\mu m g$, azaz

$$\mu = -\frac{a}{g} = \frac{9/8}{10} = 0{,}1125.$$

2.4. feladat: Milyen erők hatnak egy vízszintes lapon és egy lejtőn nyugvó testre? (Készítsen ábrát!)
$m = 10\,\mathrm{kg}$ tömegű testet a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró $F = 20\,\mathrm{N}$ erővel húzunk. Mekkora a test gyorsulása, ha a csúszási súrlódási tényező értéke $\mu = 0{,}1$?



A Newton-törvények, figyelembe véve, hogy függőlegesen nem mozdulunk el:

$$\begin{aligned} x: \quad & ma = F\cos\alpha - F_{\text{súrl}} \\ y: \quad & 0 = F\sin\alpha - mg + K \end{aligned}$$

A második alapján a kényszererő nagysága:

$$\begin{aligned} K &= mg - F\sin\alpha = 10\,\text{kg}\cdot 10\,\text{m/s}^2 - 20\,\text{N}\cdot\sin 30^\circ \\ &= 90\,\text{N}, \end{aligned}$$

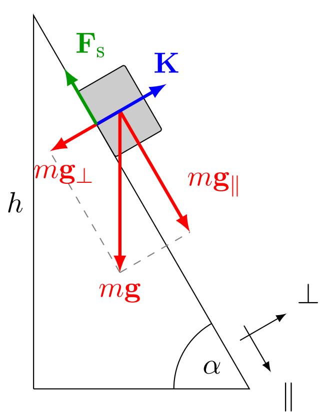
amelyet már behelyettesíthetünk az elsőbe, hiszen $F_{\text{súrl}} = \mu K$, és a gyorsulásra azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{m}\left(F\cdot\cos\alpha - \mu K\right) \\ &= \frac{1}{10\,\text{kg}}\left(20\,\text{N}\cdot\cos 30^\circ - 0{,}1\cdot 90\,\text{N}\right) = \\ &= 0{,}832\,\text{m/s}^2. \end{aligned}$$

2.12. feladat: $h = 10\,\text{m}$ magas, $\alpha = 60^\circ$-os lejtő tetejéről csúszik le egy test. Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt ér le a lejtő aljára, ha

a) a lejtő súrlódásmentes,

b) a lejtő és a test közötti súrlódási együttható $\mu = 0{,}5$?



a) Írjuk fel a Newton-törvényt a lejtőről lecsúszó testre, a lejtővel párhuzamos és arra merőleges irányban:

$$\begin{aligned} \parallel \quad & ma_{\parallel} = mg_{\parallel} = mg\sin\alpha \\ \perp \quad & ma_{\perp} = K - mg_{\perp} = K - mg\cos\alpha\,, \end{aligned}$$

Mivel a test a lejtőn csúszik, így arra merőlegesen nincsen elmozdulás, azaz $a_{\perp} = 0$. Az előző egyenletből adódik, hogy test gyorsulása a lejtő mentén $a_{\parallel} = g\cdot\sin\alpha$.

A lejtő hossza $s = \frac{h}{\sin\alpha}$, így a lecsúszás ideje:

$$\begin{aligned} s &= \frac{a}{2}T^2 \\ \frac{h}{\sin\alpha} &= \frac{a\sin\alpha}{2}T^2 \\ T &= \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\text{m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\sin^2 60^\circ}} = 1{,}63\,\text{s}\,, \end{aligned}$$

illetve a test sebessége a lejtő alján:

$$\begin{aligned} v_{\text{vég}} &= a\cdot T = g\sin\alpha\cdot T = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 60^\circ\cdot 1{,}63\,\text{s} \\ &= 14{,}14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,. \end{aligned}$$

b) Ha van súrlódás a lejtőn, akkor a Newton-egyenletek kiegészülnek:

$$\begin{aligned} \parallel \quad & ma_{\parallel} = mg_{\parallel} - F_{\text{s}} = mg\sin\alpha - \mu K \\ \perp \quad & ma_{\perp} = K - mg_{\perp} = K - mg\cos\alpha\,, \end{aligned}$$

ahol a második egyenletből kifejezhető K,

$$0 = K - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad K = mg\cos\alpha\,,$$

majd az elsőbe helyettesíthető:

$$a_{\parallel} = g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\,.$$

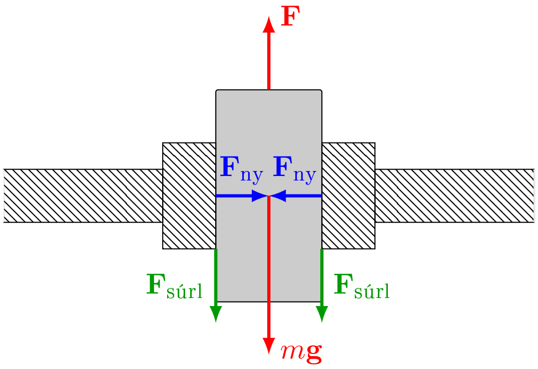
A lecsúszás ideje:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2h}{g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\cdot\sin\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\text{m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\big(\sin 60^\circ - 0{,}5\cdot\cos 60^\circ\big)\cdot\sin 60^\circ}} \\ &= 1{,}94\,\text{s}\,, \end{aligned}$$

illetve a test sebessége a lejtő alján:

$$\begin{aligned} v_{\text{vég}} &= a_{\parallel}\cdot T = g\big(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\big)\cdot T \\ &= 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\big(\sin 60^\circ - 0{,}5\cdot\cos 60^\circ\big)\cdot 1{,}94\,\text{s} \\ &= 11{,}93\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,. \end{aligned}$$

2.11. feladat: $mg = 50\,\mathrm{N}$ súlyú tégla alakú testet satuba fogunk. A satupofák $F_{ny} = 150\,\mathrm{N}$ nagyságú vízszintes erővel nyomják a testet. Az érintkező felületek között $\mu = 0{,}5$ a súrlódási tényező. Mekkora erővel lehet a testet felfelé kihúzni?



A tapadási súrlódás maximális értéke $F_{tap}^{max} = \mu F_{ny} = 0{,}5 \cdot 150\,\mathrm{N} = 75\,\mathrm{N}$. Két satuval ez 150 N erőt jelent. Ezen felül még ott van a tégla súlya, tehát a három erő összegét kell az F erőnek ellensúlyoznia. Így a kapott eredmény az, hogy

$$F \geq 2F_{tap}^{max} + mg = 200\,\mathrm{N}$$

Otthoni gyakorlásra:

A1. feladat: Egy követ függőlegesen felfelé, egy másik követ függőlegesen lefelé hajítunk $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ sebességgel, ugyanabban a pillanatban, Mennyi idő múlva lesznek egymástól $x = 60$ méter távolságban?

1.28. feladat: 20 m magas ház tetejéről 12 m/s kezdősebességgel ferdén felfelé elhajítunk egy testet. A vízszintessel bezárt szög 30°. Mennyi idő múlva és a háztól mekkora távolságban ér földet, ha a közegellenállástól eltekintünk? ($g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$)

1.50. feladat: A gravitációs gyorsulás értéke a Holdon a földi érték egyhatod része.
A; Hányszor magasabbra,
B; hányszor messzebbre száll az azonos kezdősebességgel ferdén elhajított kő a Holdon, mint a Földön?
C; Mennyi ideig repül a Holdon a földi repülési időhöz képest?

2.28. feladat: Könnyen gördülő kiskocsira szerelt állványon fonálinga függ. Milyen irányú a fonál, ha a kocsi vízszintes síkon
a. egyenletesen halad,
b. a gyorsulással mozog?

?. feladat: Egy testet 5 N állandó erővel tudunk egyenletesen felfelé húzni egy $\alpha = 30°$ hajlásszögű lejtőn. Ugyanezen a lejtőn lefelé szabadon csúszva a test 5 m/s sebességről 5 m hosszú úton áll meg. Mekkora a test tömege? Mekkora a súrlódási tényező?

2.7. feladat: Mekkora az emelődaru kötelében fellépő húzóerő egy 100 kg tömegű gépalkatrész süllyesztésekor, illetőleg emelésekor, ha a gyorsulás nagysága minden esetben $2\,\mathrm{m/s^2}$. A kötél és a végén levő horogszerkezet súlya elhanyagolható.

2.6. feladat: Egy test kelet felé mozog és nyugat felé gyorsul. Lehetséges ez? Milyen irányú az erő?

A feladatok forrása a Dér–Radnai–Soós Fizikai feladatok.