Fizika BK3

László István

Budapest, 2003. őszi félév

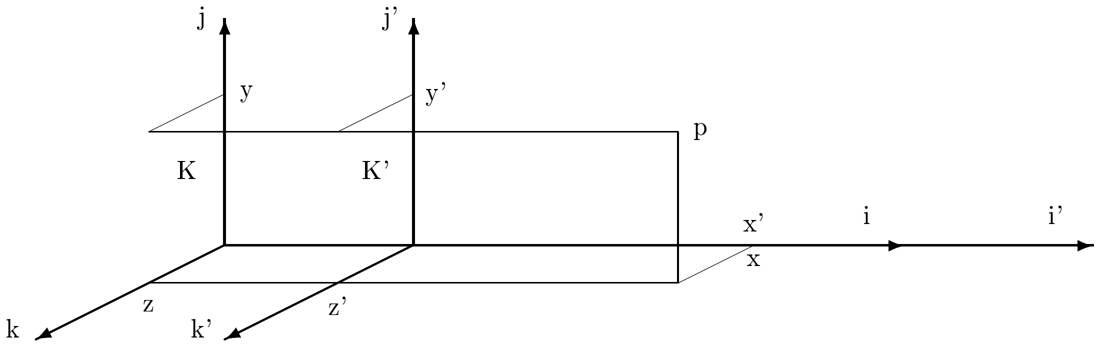
1. fejezet

A relativitáselmélet alapjai

1.1. A Galilei-transzformáció és a relativitás elve a mechanikában

A Newton-egyenletek csak bizonyos vonatkoztatási rendszerekben, az inerciarendszerekben írhatók fel. Ezt fejezi ki a Galilei-féle relativitás elve, amely a következő.

A Galilei-féle relativitás elve: Az egymáshoz képest egyenesvonalú, egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerek teljesen egyenértékűek a mechanikai jelenségek szempontjából. Ha az egyik rendszer inerciarendszer, akkor a másik is az.



1.1 Ábra

Tegyük fel, hogy a K és K' inerciarendszerek tengelyei párhuzamosak, és a K' állandó v sebességgel mozog a K x temgelyének irányában (1.1 Ábra). Ekkor a két inerciarendszer hely- és időkoordinátái között a következő összefüggések írhatók fel:

$$x' = x - vt \tag{1.1}$$
$$y' = y \tag{1.2}$$
$$z' = z \tag{1.3}$$
$$t' = t \tag{1.4}$$

A Newton egyenletek a K inerciarendszerben az

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = F_x(x_i - x_1, , ...) \tag{1.5}$$

alakot veszik fel és nem változnak a K' rendszerben sem.

$$m\frac{d^2x'_i}{dt^2} = F'_{x'}(x'_i - x'_1, ...) = F_{x'}(x'_i - x'_1, , ...) \tag{1.6}$$

A fenti Galilei-transzformációk idő szerinti deriválásával kapjuk a sebességek transzformációját.

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \tag{1.7}$$
$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \tag{1.8}$$
$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} \tag{1.9}$$

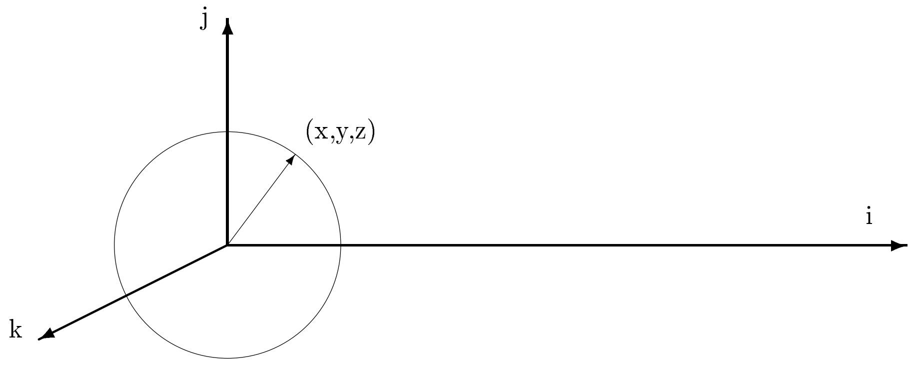
azaz

$$u_{x'} = u_x - v_x \tag{1.10}$$
$$u_{y'} = u_y \tag{1.11}$$
$$u_{z'} = u_z \tag{1.12}$$

Általános alakban **u' = u - v**. Összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy a mechanika Newton-i törvényei szerint nincsen abszolút mozgás. Általános esetben a K' inerciarendszerről csak azt tételezik fel, hogy állandó v sebességgel mozog a K-hoz képest. A továbbiakban, ha csak nem említjük meg, hogy a két inerciarendszer tengelyei milyen irányítottságúak, azt tételezzük fel, fogy a tengelyek párhuzamosak a v x-tengely irányú és a kezdeti időpillanatban az origók egybeesnek.

1.2. A relativitás elve az elektromosságtanban

Az elektromosságtan alapegyenletei a Maxwell-egyenletek. Mivel ezen egyenletek megváltoznak a Galilei-transzformáció hatására, kezdetben éternek nevezték azt a vonatkoztatási rendszert, amelyben érvényesek. Úgy tűnt, hogy az elektromosság tulajdonságainak a segítségével mégis csak ki lehet mérni az éterhez viszonyított abszolút mozgást. Ezen program végrehajtására a fényterjedés tulajdonságainak a vizsgálata tűnt a legmegfelelőbbnek, mert a fény is elektromágneses hullám aminek a léte és tulajdonságai következnek a Maxwell-egyenletekből.



1.2 Ábra

Tekintsünk egy olyan K vonatkoztatási rendszert, amelyben érvényesek a Maxwell-egyenletek, és vizsgáljuk meg a fény terjedését ezen rendszerben. Indítsunk el az O origóból egy fényjelet, amely c fázissebességgel terjed. A fényjel t idő mulva egy $R = \sqrt{x^2 + y^2 + y^2} = ct$ sugarú origó középpontú gömbfelületre fog érkezni, így azon pontok x, y, z koordinátái, amelyekbe t idő múlva érkezik, kielégítik a

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{1.13}$$

egyenletet (1.2 Ábra).

1.3 Ábra

Tekintsünk egy olyan K vonatkoztatási rendszert, amelyben

Nézzük ugyanezt a fényjelet abból a K' vonatkoztatási rendszerből, amely v sebességgel halad az x tengely irányában (1.3 Ábra). A két rendszer tengelyei legyenek párhuzamosak. Ebben a rendszerben a fényjel t idő múlva egy, az $R = \sqrt{(x' + vt)^2 + y'^2 + y'^2} = ct$ összefüggés által meghatározott gömbfelületre fog elérni. A K'-ben a fénygömb középpontja -v sebességgel mozog az x' tengelyen, ezért

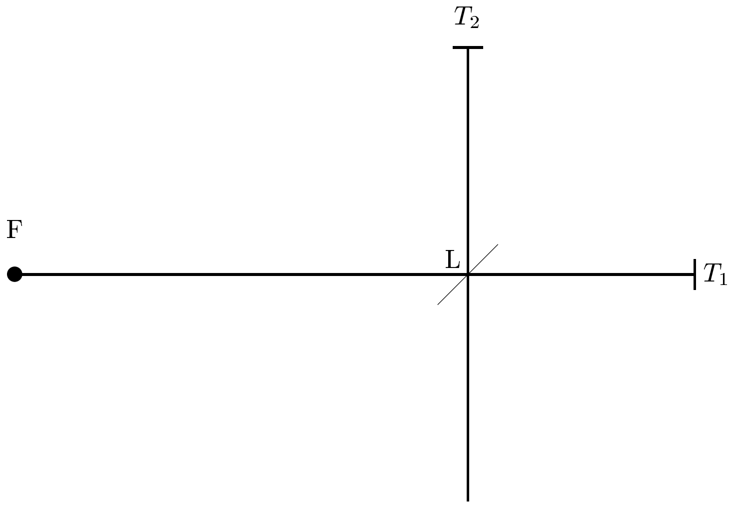
$$c^2t^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \neq 0 \tag{1.14}$$

és

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \neq c^2t^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{1.15}$$

Ezek szerint úgy tűnik, hogy lehetőségünk van a Föld éterhez vizsonyított sebességének a meghatározására. Ezt próbálta meg Michelson és Morley 1887-ben kezdett kísérleteikkel.

1.3. A Michelson-Morley kísérlet



1.4 Ábra

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2l}{c}(1+\frac{v^2}{c^2}) \tag{1.16}$$

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l}{c}(1-\frac{v^2}{c^2}) \approx \frac{2l}{c}(1+\frac{v^2}{2c^2}) \tag{1.17}$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c}\frac{v^2}{c^2} \tag{1.18}$$

1.4. A Lorentz-transzformáció és a specális relativitás elve

A Michelson-Morley kísérletből következik, hogy azon pontok helykordinátái amelyekbe egyszerre érkezik az origóból kibocsátott fényjel, mind a két inerciarendszerben kielégítik a következő egyenletet.

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \tag{1.19}$$

Ugyanis nem tudjuk kísérletekkel megmérni a Földhöz rögzített K' inerciarendszer sebességét az éterhez rögzített K-hoz képest. Ismét feltesszük, hogy a két koordinátarendszer tengelyei párhuzamosak, és v is x tengely irányú.

Be lehet látni, hogy az

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.20}$$

$$y' = y \tag{1.21}$$

$$z' = z \tag{1.22}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.23}$$

Lorentz-transzformáció kielégíti a 1.19 egyenleteket. Belőlük jól látható, hogy a c fénysebesség határsebesség. Ugyanezen egyenleteket kapjuk, ha azt nézzük, hogy milyen transzformációk hagyják változatlanul a Maxwell-egyenleteket. Itt megjegyezzük, hogy a 1.23 formulák a speciális Lorentz-transzformáció képletei. Az általános Lorentz-transzformációt akkor kapjuk, ha a K és K' inerciarendszerek egymáshoz képest általános helyzetűek és a v relatí v sebességük sem tengelyirányú.

Most már megfogalmazhatjuk a speciális relativitás elvét.

A speciális relativitás elve: Valamely leszármaztatott fizikai mennyiséget egy formula csakis akkor értelmez helyesen, valamely törvényt pedig egy egyenlet (vagy egyenlőtlenség) csakis akkor ír le hűen, ha a formulának, egyenletnek (vagy egyenlőtlenségnek) alakját a Lorentz-transzformáció nem változtatja meg. Vagyis a formula Lorentz-kovariáns.

1.5. Az ívhossz

Tekintsünk két eseményt a K inerciarendszerben. Az egyiket a t_1, x_1, y_1 és z_1 koordináták jellemzik, a másik koordinátái pedig t_2, x_2, y_2 és z_2. Az

$$s_{12} = (c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.24}$$

mennyiséget ezen két esemény ívhosszának nevezzük. Ha ugyanezen két eseményre felírjuk az ívhosszat a K' inerciarendszerben, akkor azt kapjuk, hogy

$$s_{12} = s'_{12} \tag{1.25}$$

lesz. Az ívhossz Lorentz-transzformációra invariáns mert a számértéke nem függ az inerciarendszertől, és kovariáns is, mert mindegyik inerciarendszerben ugyanazon formulával kell kiszámítani.

Az $s_{12}^2 > 0$ ívhosszat időszerű ívhossznak nevezzük. Időszerű ívhosszakra lehet találni olyan inerciarendszert, amelyben a két esemény ugyanazon a helyen történik. Ha pedig $s_{12}^2 < 0$, akkor térszerű ívhosszról beszélünk. Ekkor pedig olyan inerciarendszert lehet találni, amelyben a két esemény egyidejű. Ivelemnégyzetnek nevezzük azon ívhossz négyzetét, amelyre a kordinátakülönbségek infinitezmálisan kicsik, vagyis

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.26}$$

1.6. Sajátidő

Mint említettük, időszzerű ívhosszakra mindig található olyan inerciarendszer, amelyben a két esemény ugyanazon a helyen történik. Egy a K inerciarendszerhez képest állandó v sebességgel mozgó testhez rögzzített K' inerciarendszeer például ilyen. A test K-ban v sebességgel mozog, K'-ben pedig nyugalomban van. Ekkor:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 = c^2d\tau^2 \tag{1.27}$$

Ebből

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2} \tag{1.28}$$

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.29}$$

Az 1.29 egyenlet szerint az állandó v sebességgel mozgó testen történt események $d\tau$ ideje rövidebbnek tűnik, ha a hozzá képest nyugalomban lévő K inerciarendszerből mérjük ugyanezen események dt idejét. Ezt a jelenséget hívják idődilatációnak.

Ha a K inerciarendszerhez képest tetszőleges, esetleg változó v sebességgel mozgó testhez rögzített órán mérjük a τ időt, akkor

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.30}$$

Azt a τ időt, amelyet valamely adott tárggyal együtt mozgó óra mér, a szóbanforgó tárgy sajátidejének nevezzük.

1.7. Sajáthossz

A rúd sajáthosszának nevezzük a rúdnak abban a koordinátarendszerben mért hosszúságát, amelyben az nyugalomban van. Legyen egy adott rúd sajáthossza $l_\circ$. Helyezük a K inerciarendszer x tengelyére.

Vagyis $l_\circ = \Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = \Delta z = 0$. A K' rendszerben úgy tudjuk megmondani a hosszát hogy egy adott t' időpillanatban megnézzük a két végének a koordinátáit. Ezeket könnyen kifejezhetjük a 1.23 transzformáció segítségével.

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.31}$$

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.32}$$

Ezekből jön hogy:

$$l_\circ = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.33}$$

vagyis

$$l = l_\circ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.34}$$

A 1.34 összefüggést hívják Lorentz-kontrakciónak. Ami azt jelenti, hogy a mozgó rudakat rövidebbnek látjuk, mint a nyugalomban lévőket.

1.8. A sebességek transzformációja

A Lorentz-transzformáció 1.23 képletéből következik, hogy

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.35}$$

$$dy = dy' \tag{1.36}$$

$$dz = dz' \tag{1.37}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{vdx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.38}$$

Ezekből rendezéssel kapjuk az $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$, $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$, $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$ és $u'_z = \frac{dz'}{dt'}$ összefüggések alapján hogy:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \tag{1.39}$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \tag{1.40}$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \tag{1.41}$$

1.9. Távolság- és időmérés

A Lorentz-transzformáció tanulmányozásakor azt tapasztaltuk, hogy a távolságok és időtartamok függenek a mérésekhez használt inerciarendszerektől. Ezen jelenség megnyilvánulását már láttuk az idődilatáció és Lorentz-kontrakció tanulmányozásánál. Nézzük meg, hogy ezen tények tudatában hogyan lehet inerciarendszerekben a távolságokat és az időt megmérni. Azt a tényt fogjuk felhasználni, hogy a fény inerciarendszerekben ugyanazon sebességgel és izotróp módon terjed, vagyis számértéke rendszertől és iránytól függetlenül c.

A K inerciarendszer P_1 és P_2 pontjainak r_{12} távolságát a következő módon határozzuk meg. Helyezzünk egy órát a P_1 pontba és egy tükröt a P_2-be. Ha a P_1 -ből a P_2 felé kibocsátott fényjel a P_2-be helyezett tükörről visszaverődve t idő múlva ér vissza P_1-be, akkor legyen $r_{12} = \frac{ct}{2}$. Igy a K inerciarendszer bármely két pontja között meg tudjuk mérni a távolságot.

Miután a távolságokat meghatároztuk, térjünk rá az órák szinkronizálására. Igaz hogy a távolság mérésére is használtunk órákat, de nem volt szükségünk azok szinkronizálására. Válasszuk ki a P_0 pontba helyezett órát, és állítsuk be a t_0 időpontra, anélkül hogy elindítanánk. Ehhez az órához fogjuk igazítani a többit. Vigyünk mindegyik pontba egy-egy álló órát és a P_i-be vittet állítsuk $t_i = t_0 + \frac{r_{0i}}{c}$-re. Indítsunk el egy fényjelet a P_0 pontból és ugyanebben a pillanatban indítsuk el az idehelyezett órát is. A többi pont óráit pedig akkor indítsuk el, amikor megérkezik oda a fényjel. Hasonló módon szinkronizálhatjuk a K' óráit is.

1.10. Négyesvektorok

A mechanika Newton-törvényeit a Galilei-transzformáció, az elektromosság Maxwell-egyenleteit pedig a Lorentz-transzformáció hagyja változatlanul. A Lorentz-transzformáció az általánosabb, mert belőle a fénysebességhez képest kis sebességek eseetén megkapható a Galilei-transzformáció. Ebből azt sejthetjük, hogy a Newton-törvények is valamilyen, csak kis sebességeknél érvényes változatai olyan törvényeknek, amelyek nem változnak meg Lorentz-transzformációra. Keressük meg ezeket a törvényeket. Ezen program végrehajtása céljából célszerű bevezetni a négyesvektorokat.

Egy esemény (ct, x, y, z) koordinátáit úgy foghatjuk fel, mint a négydimenziós tér egy helyzetvektorának négy komponensét. A t időkoordináta helyett a hosszúságdimenziójú ct mennyiséget vezettük be. E vektor komponenseit x^i -vel jelöljük , ahol i lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$, és

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z \tag{1.42}$$

Ezen négyes helyzetvektor hosszának négyzete 1.24 és 1.25 miatt

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{1.43}$$

Általánosságban az A^i négyesvektornak nevezzük az A^0, A^1, A^2, A^3 négy mennyiség összességét, ha azok a négydimenziósi koordinátarendszer transzformációi során úgy transzformálódnak, mint az x^i négyes helyzetvektor komponensei. Lorentz-transzffformáció esetén tehát:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{vA'^1}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.44}$$

$$A^1 = \frac{A'^1 + \frac{vA'^0}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.45}$$

$$A^2 = A'^2 \tag{1.46}$$

$$A^3 = A'^3 \tag{1.47}$$

Az A^i négyesvektor négyzetét az

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \tag{1.48}$$

összeg adja. Az írásmód egyszerűsítése érdekében célszerű bevezetni a következő lent indexelt mennyiségeket:

$$A_0 = A^0,\ A_1 = -A^1,\ A_2 = -A^2,\ A_3 = -A^3 \tag{1.49}$$

Az A^i az A négyesvektor kontravariáns, az A_i a kovariáns felírását jelenti. Ezen négyesvektor négyzete pedig:

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = A^i A_i \tag{1.50}$$

Az összeget célszerű $A^i A_i$ alakban írni. Ha egy adott kifejezésben valamely index kétszer szerepel, akkor aszerint az index szerint összegezni kell, az összegezés jelét peddig elhagyhatjuk. (Einstein konvenció)
Az A és B négyesvektorok skaláris szorzata pedig:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \tag{1.51}$$

Például, ha $x^i = (ct, \mathbf{r})$ akkor $x_i = (ct, -\mathbf{r})$ és $x^i x_i = c^2 t^2 - \mathbf{r^2}$.
Ha bevezetjük a

$$g^{ik} = g_{ik} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{1.52}$$

metrikus tenzorokat amelyeknek csak a diagonális elemei különböznek nullától, akkor

$$g_{ik} A^k = A_i \tag{1.53}$$

$$g^{ik} A_k = A^i \tag{1.54}$$

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k \tag{1.55}$$

1.11. A négyessebesség

Korábban beláttuk, hogy az $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$, $u_x' = \frac{dx'}{dt'}$, $u_y' = \frac{dy'}{dt'}$ és $u_z' = \frac{dz'}{dt'}$ formulákkal definiált sebességek nem Lorentz-kovariánsak. Mivel $x^i = (ct, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ négyesvektor, $dx^i = (cdt, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, dx, dy, dz)$ is az. Ha egy négyesvektort egy Lorentz-invariáns mennyiséggel osztunk, akkor az négyesvektor marad és az igy kapott mennyiség Lorentz-kovariáns lesz. Tudva, hogy a sajátidő is Lorentz-invariáns, az $u_i = \frac{dx^i}{d\tau}$ formulával definiált négyessebesség is Lorentz-kovariáns lesz. Tehát

$$ds^2 = dx^i dx_i = c^2 d\tau^2 \tag{1.56}$$

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{dx^i dx_i} = \frac{1}{c}\sqrt{dc^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \tag{1.57}$$

$$= dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{1.58}$$

és

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\frac{dx^i}{dt} = \tag{1.59}$$

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right) \tag{1.60}$$

Ha $\mathbf{u}$ sokkal kisebb mint a c fénysebesség, akkor u^i -ből egy olyan négykomponensű mennyiséget kapunk, amelynek az első komponense a fénysebesség, az utolsó három komponense pedig a klasszikus $\mathbf{u}$ sebesség.

1.12. A négyesimpulzus

Legyen m_0 egy adott részzecske nyugalmi tömege és u^i a négyessebessége. Mivel m^0 invariáns Lorentz-transzformáció határa, a

$$p^i = m_0 u^i = \tag{1.61}$$

$$\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right) \tag{1.62}$$

vektor is négyesvektor és négyesimpulzusnak nevezzük.

Legyen $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ az $\mathbf{u}$ sebességgel mozgó részecske tömege. Ekkor $p^i = m_0 u^i = (mc, m\mathbf{u}) = (mc, \mathbf{p})$, ahol $\mathbf{p}$ az $\mathbf{u}$ sebeségű és m tömegű részecske impulzusa. Annak érdekében, hogy megtudjuk, mivel egyenlő mc, végezzük el a következő átalakításokat $u << c$ feltételezésével.

$$mc = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = m_0 c(1-\frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = \tag{1.63}$$

$$= m_0 c(1+\frac{u^2}{2c^2}+...) = \frac{1}{c}(m_0 c^2 + \frac{m_0}{2}u^2 + ...) = \tag{1.64}$$

$$= \frac{1}{c}(m_0 c^2 + E_{kinetikus} + ...) = \frac{E}{c} \tag{1.65}$$

Azaz $p^i = m_0 u^i = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$ ahol E a részecske energája és $\frac{E}{c} = mc$ adja Einstein híres $E = mc^2$ formuláját a tömeg és az energia közöti összefüggésről.

A fentiekből könnyen belátható, hogy $p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p^2} = m_0^2 c^2$.

1.13. A négyeserő

Az erő szokásos definíciójából kapjuk a K^i négyeserőt.

$$K^i = \frac{dp^i}{d\tau} \tag{1.66}$$

Ez Newton II-ik axiómája relativisztikus alakban. Mivel $p^i p_i = m_0^2 c^2$, kapjuk, hogy $\frac{dp^i}{d\tau} p_i + p^i \frac{dp_i}{d\tau} = o$. Azaz $2\frac{dp^i}{d\tau} p_i = o$, és így $K^i u_i = 0$.
De

$$K^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(\frac{dm}{dt}c, \frac{d\mathbf{p}}{dt}) = \tag{1.67}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(\frac{dm}{dt}c, \mathbf{F}) \tag{1.68}$$

és így

$$0 = K^i u_i = \tag{1.69}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(c\frac{dm}{dt}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{\mathbf{Fu}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}) \tag{1.70}$$

Ebből kapjuk, hogy $\frac{dm}{dt} = \frac{\mathbf{Fu}}{c^2}$, és így

$$K^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(\frac{\mathbf{Fu}}{c}, \mathbf{F}) \tag{1.71}$$

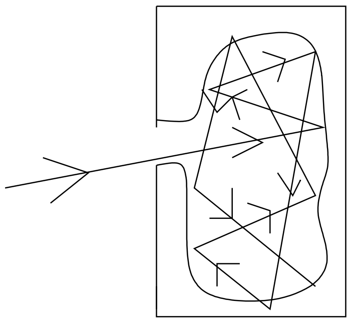
2. fejezet

A hőmérsékleti sugárzás

2.1. A fekete test fogalma

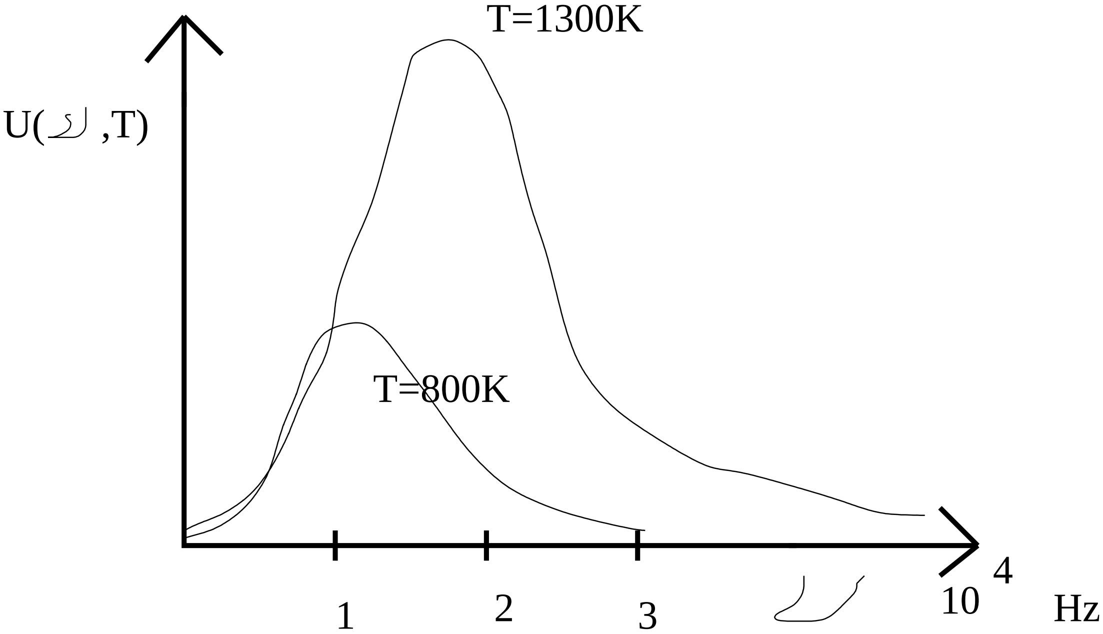
Az anyagi testek hőmérsékletüktől függően hősugárzást bocsátanak ki magukból. Ezt a hősugárzást érezzük, ha kezünket egy befűtott kályha fölé tesszük. A hőmérsékleti sugárzás valójában elektromágneses sugárzás, amit a melegített testek bocsátanak ki magukból. Igy érkezik hozzánk az energia a Napból is.

Ezen jelenség tanulmányozása céljából vezették be a fekete test fogalmát. Definíció szerint fekete testnek nevezzük azt a testet, amely a ráeső sugárzást teljes egészében elnyeli. Sugárzása pedigteljesen független az anyagi minőségtől és csak a T hőmérséklettől függ. Legjobban egy kormozott falú üveg falán lévő lyukkal lehet modellezni (2.1 Ábra). A lyukra érkező sugárzás behatol az üregbe. Egyáltalán nincs visszaverődés.



2.1 ábra

Legyen $dw(\nu, T) = u(\nu, T)d\nu$ az elektromágneses sugárzás energiája az üreg egységnyi térfogatában és a $(\nu, \nu + d\nu)$ frekvencia intervallumában, ha a fekete testet alkotó üreg T hőmérsékletű anyagban van. Ezt nevezzük a hőmérsékletének. A sugárzás spektrális energiasűrűsége pedig $u(\nu, T)$.

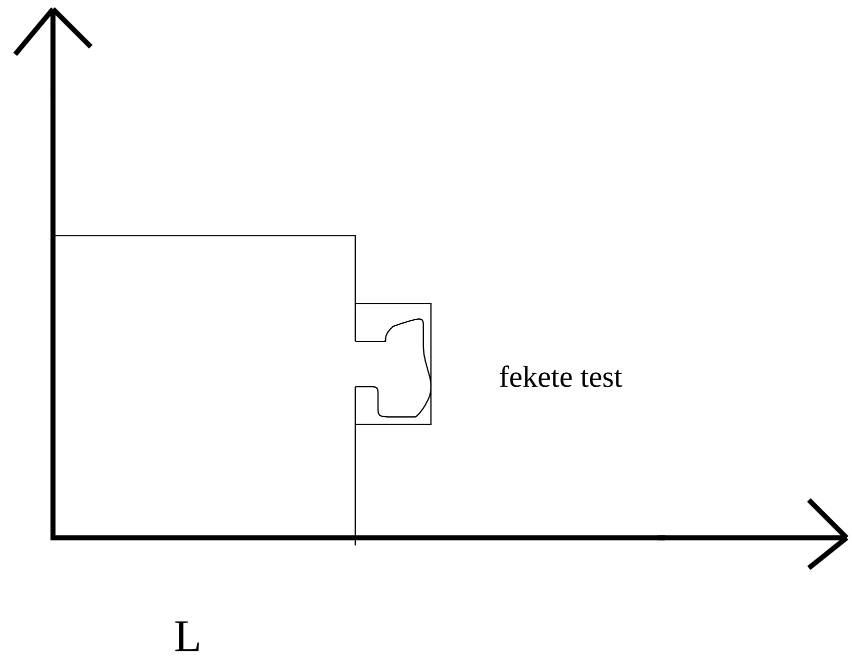


2.2 ábra

A XIX-ik század végén a fizika egyik megoldatlan problémája volt ezen spektrális energiasűrűségnek a magyarázata. Tudjuk, hogy a hőmérsssékleti sugárzást atomi oszcillátorok sugárzása hozza létre. Planck azzal a posztulátummal tudta megmagyarázni az $u(\nu, T)$-re kapott kísérleti eredményeket, hogy feltette hogy ezen atomi oszcillátorok energiája csak a következő kvantált értékeket veheti fel: $\epsilon_n(\nu) = nh\nu$, ahol $n = 0, 1, 2, ...$, és $h = 6.626176 \star 10^{-34} Js$ a Planck-állandó.

2.2. A spektrális energiaeloszlás

Először azzal a problémával foglalkozzunk, hogy egy L élhosszúságú kockában milyen elektromágneses állóhullámok jöhetnek létre, ha feltesszük, hogy a kocka fala tökéletesen visszaveri azokat (2.3 Ábra).



2.3 ábra

A

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 (\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}) \tag{2.1}$$

hullámegyenlet $\xi(x, y, z, t)$ megoldásait keressük a

$$\xi(0, y, z, t) = \xi(L, y, z, t) = 0 \tag{2.2}$$

$$\xi(x, 0, z, t) = \xi(x, L, z, t) = 0 \tag{2.3}$$

$$\xi(x, y, 0, t) = \xi(x, y, L, t) = 0 \tag{2.4}$$

peremfeltételekkel. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy a

$$\xi = q(t) \sin(n_x \frac{\pi}{L} x) \sin(n_y \frac{\pi}{L} y) \sin(n_z \frac{\pi}{L} z) \tag{2.5}$$

függvény megoldása a hullámegyenletnek, ha

$$\dot{q}(t) = -\omega^2 q(t) \tag{2.6}$$

és

$$\omega^2 = c^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2}{L^2} \tag{2.7}$$

Ahol $n_x = 1, 2, ...,$ $n_y = 1, 2, ...$ és $n_z = 1, 2, ...$ egész számok. Az $\omega = \frac{2\pi}{T}$ segítségével kapjuk, hogy

$$\nu = \frac{c}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \tag{2.8}$$

Most írjuk fel a$(\nu, \nu + d\nu)$ frekvenciatartományba eső $dw(\nu, T)$ energiasűrűséget.

$$\begin{aligned} dw(\nu,T) &= \frac{dN(\nu)}{V}\langle\epsilon(\nu,T)\rangle = \\ &= \frac{1}{V}\frac{dN(\nu)}{d\nu}d\nu\langle\epsilon(\nu,T)\rangle = \\ &= \frac{1}{V}\frac{dN(\nu)}{d\nu}\langle\epsilon(\nu,T)\rangle d\nu = \\ &= u(\nu,T)d\nu \end{aligned} \tag{2.9}$$

Itt $V = L^3$ az üreg térfogata és $N(\nu)$ azon állóhullámok száma, amelyek 2.8 frekvenciája kisebb mint egy adott ν érték. Az $\langle\epsilon(\nu,T)\rangle$ jelöli a ν frekvenciájú hullám átlagenergiáját T hőmérsékleten. Ezért $N(\nu)$ meghatározása céljából a

$$\frac{c}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \leq \nu \tag{2.10}$$

egyenlőtlenség megoldásainak $N^*(\nu)$ számát kell meghatároznunk pozitív egész n_x, n_y és n_z számértékekre. Egyszerű algebrai átalakításokkal 2.10-ből adódik, hogy

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \leq \frac{4L^2\nu^2}{c^2} = R^2 \tag{2.11}$$

Mivel a 2.11 egyenlőtlenség egy $R = \frac{2L\nu}{c}$ sugarú gömbre is értelmezhető és minden pozitív egész n_x, n_y, n_z számhármashoz hozzárendelhető egy egységnyi élhosszúságú kocka, a megoldások száma jó közelítéssel megegyezik az R sugarú gömb térfogatának a nyolcadával. Azaz

$$N^*(\nu) = \frac{1}{8}\frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}\pi\frac{L^3\nu^3}{c^3} \tag{2.12}$$

figyelembe véve, hogy két polarizációs irány van, adódik hogy

$$N(\nu) = 2N^*(\nu) = \frac{8}{3}\frac{\pi V\nu^3}{c^3} \tag{2.13}$$

Ebből pedig jön hogy,

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi V\nu^2}{c^3} \tag{2.14}$$

Ezt behelyettesítve 2.9-be megkapjuk, hogy

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\langle\epsilon(\nu,T)\rangle \tag{2.15}$$

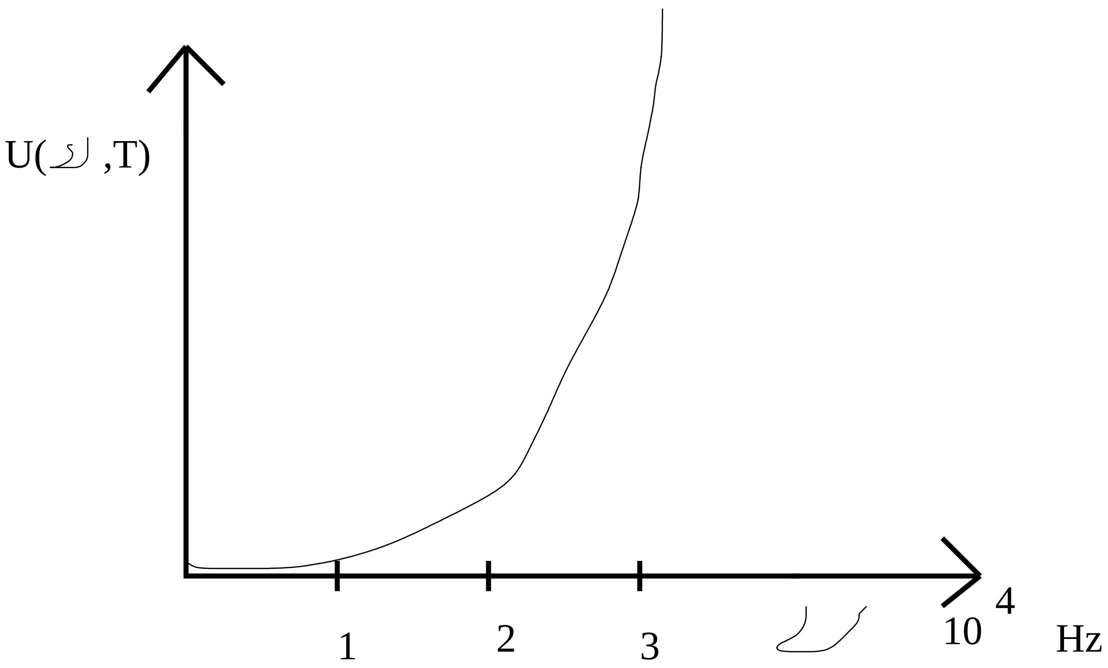
2.3. A Rayleigh-Jeans törvény

Az ekvipartíció törvénye szerint hőmérsékleti egyensúlyban a teljes energia minden négyzetes tagja $\frac{kT}{2}$ értékkel járul hozzá a teljes energiához, ahol $k = 1.380662 * 10^{-23} JK^{-1}$ a Boltzmann-állandó.

A harmonikus oszcillátorra $E = \frac{m}{2}v^2 + \frac{D}{2}x^2$. A négyzetes tagok száma 2, így $\langle\epsilon(\nu,T)\rangle = 2\frac{kT}{2} = kT$. Ezzel 2.2-ből adódik a Rayleigh-Jeans-törvény (2.4 Ábra):

$$u(\nu,T) = \frac{kT8\pi}{c^3}\nu^2 \tag{2.16}$$

Ez a formula kis frekvenciákra írja le helyesen a hőmérsékleti sugárzást.



2.4 ábra

2.4. A Wien-féle sugárzási törvény

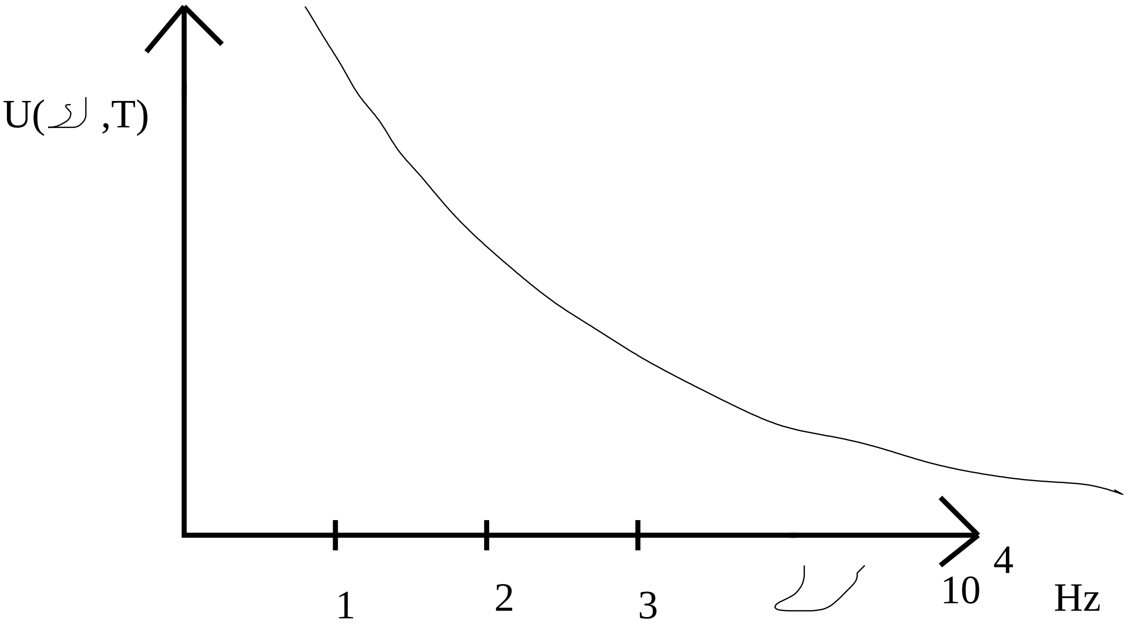
Termodinamikai megfontolásokból be lehet látni, hogy $u(\nu,T) = \nu^3 F(\frac{\nu}{T})$. Wien feltételezte, hogy F egy exponenciális függvény. A Wien-féle sugárzási törvény tehát (2.5 Ábra):

$$u(\nu,T) = a\nu^3 e^{-b\frac{\nu}{T}} \tag{2.17}$$

Ez a formula pedig csak nagy frekvenciákon írja le a kísérleti eredményeket és az

$$\langle\epsilon(\nu,T)\rangle = \frac{ac^3}{8\pi}\nu e^{-\frac{b\nu}{T}} \tag{2.18}$$

átlagenergiának felel meg.



2.5 ábra

2.5. A Planck-féle sugárzási törvény

Planck posztulálta, hogy az egyes oszcillátorok energiája csak $\epsilon_n(\nu) = n\epsilon_0(\nu)$ diszkrét értékeket vehet fel. Számoljuk ki a $\langle\epsilon(\nu,T)\rangle$ átlagenergiát az $e^{-\frac{\epsilon_n(\nu)}{kT}}$ Boltzmann-féle sújfaktorok segítségével.

$$
\begin{aligned}
\langle\epsilon(\nu,T)\rangle &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n(\nu)e^{-\frac{\epsilon_n(\nu)}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\epsilon_n(\nu)}{kT}}} = \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}n\epsilon_0(\nu)e^{-\frac{n\epsilon_0(\nu)}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\epsilon_n(\nu)}{kT}}} = \frac{A}{B} \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Bevezetve a $\beta = \frac{1}{kT}$ jelölést, a számláló és a nevező között a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$\frac{dB}{d\beta} = -\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_0(\nu)e^{-n\beta\epsilon_0(\nu)} = -A \qquad (2.20)$$

Mivel a nevező egy végtelen geometriai sor,

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\epsilon_0(\nu)} = \frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_0(\nu)}} \qquad (2.21)$$

Ezt β szerint lederiválva kapjuk, hogy:

$$\frac{dB}{d\beta} = \frac{-\epsilon_0(\nu)e^{-\beta\epsilon_0(\nu)}}{(1-e^{-\beta\epsilon_0(\nu)})^2} = -A \tag{2.22}$$

Igy

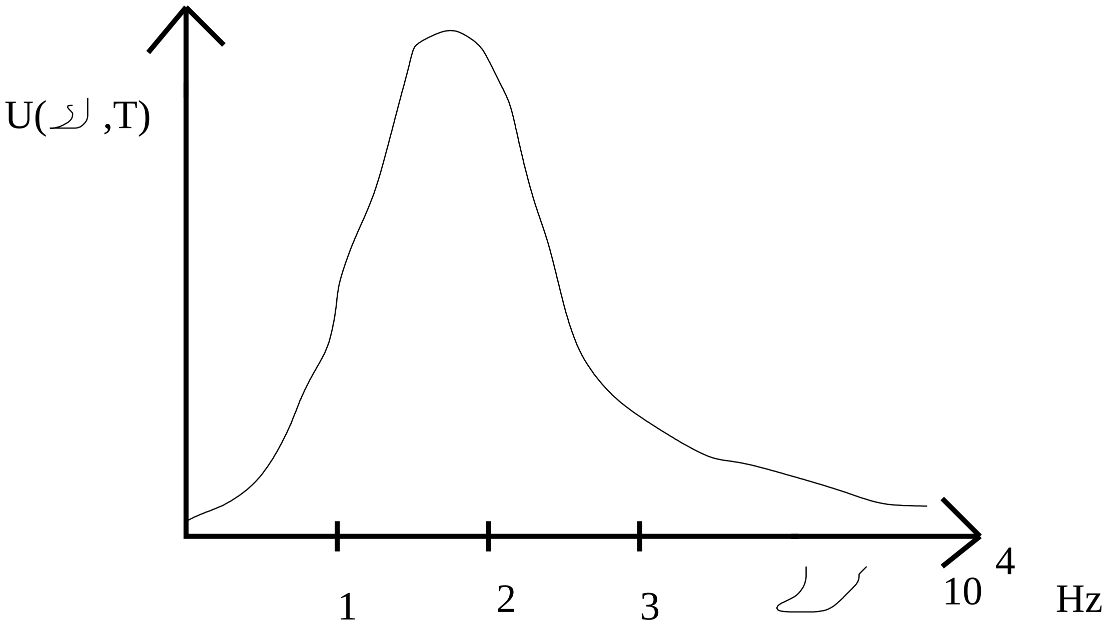
$$\langle\epsilon(\nu,T)\rangle = \frac{A}{B} = \frac{\epsilon_0(\nu)}{e^{\frac{\epsilon_0(\nu)}{kT}}-1} \tag{2.23}$$

Ezt behelyettesítve 2.2-be adódik hogy:

$$\begin{aligned} u(\nu,T) &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\langle\epsilon(\nu,T)\rangle = \\ &= \frac{8\pi}{c^3}\nu^2\frac{\epsilon_0(\nu)}{e^{\frac{\epsilon_0(\nu)}{kT}}-1} = \\ &= \frac{8\pi}{c^3}\nu^3\frac{\frac{\epsilon_0(\nu)}{\nu}}{e^{\frac{\epsilon_0(\nu)}{kT}}-1} \end{aligned} \tag{2.24}$$

A $u(\nu,T) = \nu^3 F(\frac{\nu}{T})$ alakot akkor kapjuk meg a legegyszerűbben, ha feltesszük, hogy $\epsilon_0(\nu) = h\nu$, ahol h egy konstans (a Planck-állandó) . Ezzel adódik a Planck-féle sugárzási törvény (2.6 Ábra)

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{2.25}$$



2.6 ábra

Ez a formula már helyesen írja le a kísérleti eredményeket. Az oszcillátorok energiájára végül is azt tételeztük fel, hogy $\epsilon_n(\nu) = n\nu h$ alakú.

3. fejezet

Elektronok és fotonok

3.1. A fényelektromos hatás

Fényelektromos hatásnak nevezzük azt a jelenséget, hogy fény hatására elektronok lépnek ki fémfelületből. A tapasztalat szerint a fémből kilépő elektronok energiája nem függ a fény intenzitásától. Ezzel szemben lineáris összefüggés van a fémfelületre eső fény frekvenciája és a kiszabadult elektronok energiája között. Ha azonban a sugárzás frekvenciája kisebb egy adott küszöbfrekvenciánál, nincs elektronkilépés. Nehézségek adódnak, ha ezt a jelenséget az elektromágneses hullámok segítségével akarjuk megmagyarázni.

Einstein adta meg a magyarázatot fotonhipotézise segítségével. Általánosította Planck elméletét, és feltette, hogy nem csak a termikus egyensúlyban lévő elektromágneses hullámok energiája kvantált. Magyarázata a következő lépéseket tartalmazza:

1. A fénysugár energiája a térben hullámcsomagokban terjed, amelyeket fotonoknak nevezünk.
2. Egy foton energiája $E = h\nu$, ahol h a Planck állandó és ν a fény frekvenciája.
3. A fényelektromos hatás során a foton átadja teljes energiáját az elektronnak. Ezen energia egy része az elektron kilépési munkáját fedezi, a többi a mozgási energiát adja. Igy ha A a kilépési munka, m az elektron tömege és v a fémből való kilépés utáni sebessége, akkor az energiamegmaradás törvénye alapján felírhatjuk, hogy

$$h\nu = A + \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.1}$$

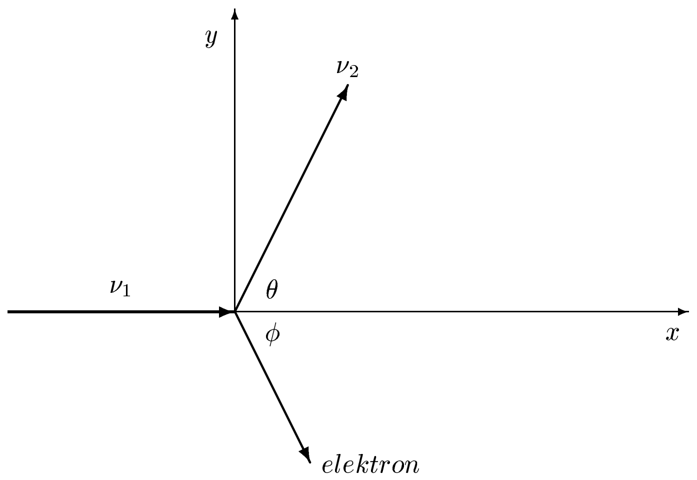
Ezen formula alpján jól megérthető a küszöbenergia. Ugyanis ha a foton $h\nu$ energiája nem elégséges az A kilépési munka biztosítására, az elektron nem képes kilépni a fémből.

3.2. A Compton-effektus

Compton monokromatikus ν_1 frekvenciájú röntgensugarat szóratott grafiton, és azt tapasztalta, hogy a szóródott röntgensugár az eredeti frekvencia mellett tartalmazott egy attól különböző ν_2 frekvenciát is. A kísérleti eredmények a következő összefüggést adták:

$$\nu_2 - \nu_1 = -\frac{h\nu_1^2}{mc^2}(1 - \cos\theta) \tag{3.2}$$

ahol m az elektron tömege, c a vákuumbeli fénysebesség és θ a szórási szög (3.1 Ábra).



3.1 Ábra

A ν_2 frekvenciájú röntgensugarat ismét Einstein fotonhipotézise alapján tudjuk megmagyarázni, feltéve hogy a fotonnak $E = h\nu$ energiája mellett $\mathbf{p} = \frac{h\nu}{c}\mathbf{n}$ impulzusa is van.($\mathbf{n}$ jelöli a foton terjedési irányába mutató egységvektort.) Az ütközés előtt a foton p_f^i és a nyugalomban lévő elektron p_e^i négyesimpulzusai a következő alakot veszik fel:

$$p_f^i = (h\nu, \frac{h\nu}{c}\mathbf{n}) \tag{3.3}$$

$$p_e^i = (m_0c^2, \mathbf{0}) \tag{3.4}$$

ugyanezen négyesinpulzusok az ütközés után pedig:

$$p_f'^i = (h\nu', \frac{h\nu'}{c}\mathbf{n}') \tag{3.5}$$

$$p_e'^i = (m'c^2, \mathbf{p}) = (\sqrt{m_0^2c^4 + c^2p^2}, \mathbf{p}) \tag{3.6}$$

Most már felírhatjuk a négyesimpulzus megmaradásának a törvényét:

$$p_f^i + p_e^i = p_f'^i + p_e'^i \tag{3.7}$$

Ennek felírva az energia és a hármas impulzus komponenseit kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h\nu + m_0c^2 &= h\nu' + \sqrt{m_0^2c^4 + c^2p^2} \\ \frac{h\nu}{c}\mathbf{n} &= \frac{h\nu'}{c}\mathbf{n}' + \mathbf{p} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Majd rendezés után jön

$$\begin{aligned} \sqrt{m_0^2c^4 + c^2p^2} &= h\nu - h\nu' + m_0c^2 \\ \mathbf{p} &= \frac{h\nu}{c}\mathbf{n} - \frac{h\nu'}{c}\mathbf{n}' \end{aligned} \tag{3.9}$$

Emeljük négyzetre mind a ket egyenletet, úgy, hogy a vektoregyenlet esetén a vektor önmagával való skaláris szorzata jelenti a négyzetet. Ha kihasználjuk, hogy $\mathbf{nn}' = \cos\theta$, adódnak a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} m_0^2c^4 + c^2p^2 &= (h\nu - h\nu')^2 + 2m_0c^2(h\nu - h\nu') + m_0^2c^4 \\ p^2 &= \frac{h^2\nu^2}{c^2} + \frac{h^2\nu'^2}{c^2} - 2\frac{h^2\nu\nu'}{c^2}\cos\theta \end{aligned} \tag{3.10}$$

Az első egyenlet rendezése után kapjuk hogy,

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{h^2\nu^2}{c^2} + \frac{h^2\nu'^2}{c^2} - 2\frac{h^2\nu\nu'}{c^2} + 2m_0(h\nu - h\nu') \\ p^2 &= \frac{h^2\nu^2}{c^2} + \frac{h^2\nu'^2}{c^2} - 2\frac{h^2\nu\nu'}{c^2}\cos\theta \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ezen két egyenlet egymásból való kivonása adja hogy

$$0 = 2\frac{h^2\nu\nu'}{c^2}\cos\theta - 2\frac{h^2\nu\nu'}{c^2} + 2m_0(h\nu - h\nu') \tag{3.12}$$

majd rendezés után jön

$$\frac{h\nu\nu'}{c^2}(1 - \cos\theta) = m_0(h\nu - h\nu') \tag{3.13}$$

Felhasználva a ν frekvencia és a λ hullámhossz közötti $\nu = \frac{c}{\lambda}$ összefüggést adódik hogy

$$\frac{h}{m_0c^2}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda'}{c} - \frac{\lambda}{c} \tag{3.14}$$

Ez adja a hullámhosszakra vonatkozó pontos Compton-effektust

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) \tag{3.15}$$

és a $\nu \approx \nu'$ feltétel kihasználásával felírt, a frekvenciára vonatkozó Compton-effektust

$$\nu' - \nu = -\frac{h\nu^2}{mc^2}(1 - \cos\theta) \tag{3.16}$$

4. fejezet

Az interferencia

4.1. Általános fogalmak

Tekintsünk két monokromatikus fényforrást S_1 és S_2. Legyen egy p pont r_1 távolságra S_1-től és r_2 távolságra S_2-től. Ezen fényforrásokból kiinduló gömbhullámok megfelelő komponenseire felírhatjuk:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01}\sin(kr_1-\omega t) = E_{01}\sin\theta_1 \\ E_2 &= E_{02}\sin(kr_2-\omega t) = E_{02}\sin\theta_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Gömbfügvények esetén $E_{0i} \approx \frac{1}{r}$. Vezessük be a következő jelölést:

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \tag{4.2}$$

Pithagorasz-tétele alapján

$$\begin{aligned} E_{0p}^2 &= E_{01}^2 + E_{02}^2 - 2E_{01}E_{02}\cos(\pi-\delta) = \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\delta) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Igy

$$\begin{aligned} E_p &= E_{0p}\sin(\theta_p) = E_{0p}\sin(\theta_2+\alpha) = \\ &= E_{0p}\sin(kr_2+\alpha-\omega t) \end{aligned} \tag{4.4}$$

A $\cos(\delta)$ interferencia tag miatt

$$E_{01} + E_{02} \geq E_{0p} \geq |E_{01} - E_{02}| \tag{4.5}$$

Ha n egész számot jelöl, akkor az interferencia maximumok és a minimumok a következő δ és $r_1 - r_2$ útkülönbségek esetén fordulnak elő.

$$\delta = \begin{cases} 2n\pi & \text{interferencia maximum} \\ (2n+1)\pi & \text{interferencia minimum} \end{cases} \tag{4.6}$$

és

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} n\lambda & \text{interferencia maximum} \\ (2n+1)\frac{\lambda}{2} & \text{interferencia minimum} \end{cases} \tag{4.7}$$

4.2. A Young-féle kísérlet

Young egy nagyon egyszerű kísérlettel mutatta ki a XIX-ik században a fény hullámtermészetét. Monokromatikus (egyszínű fénnyel világított meg két egymáshoz közel eső kis nyílást. Fényforrása egy gyertya volt, és a két nyílást gombossstűvel fúrta egy ónlemezbe. Az ónlemez mögé D távolságra egy ernyőt helyezett, amelyen interferencia csíkokat figyelt meg. A történeti hűség kedvéért itt megjegyezzük, hogy a gyertya fénye nem monokromatikus és ezért Young világos, sötét és különböző színű csíkokat kapott.

Az előbbi rész jelöléseit használva feltesszük, hogy $E_{01} = E_{02}$, Tehát

$$E_{0p} = \sqrt{E_{01}^2 + E_{01}^2 + 2E_{01}E_{01}\cos(\delta)} =$$
$$= E_{01}\sqrt{2(1+\cos(\delta))} = 2E_{01}\cos(\frac{\delta}{2}) \tag{4.8}$$

Ha az ernyő x pontjában akarjuk kiszámolni az interferenciát, akkor mivel $x \ll D$ igaz, hogy $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{x}{D}$. Azaz

$$r_1 - r_2 = a\sin(\theta) = a\frac{x}{D} \tag{4.9}$$

és

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta) = \frac{2\pi a x}{D\lambda} \tag{4.10}$$

Az enyő egy pontjában a fényintenzitás