

Elektrodinamika

Jakovác Antal

2010. január; May 9, 2012

Contents

1	Bevezetés	3
1.1	Rövid történeti áttekintés	3
1.2	Matematikai alapfogalmak	5
1.2.1	Mezők deriváltja	5
1.2.2	Mezők integrálja	6
2	Elektrosztatika	8
2.1	Töltésseloszlások	8
2.1.1	Töltésrendszer energiája	10
2.1.2	Kitérő: erővonal-kép	11
2.1.3	Speciális töltésseloszlások tere	11
2.2	Poisson egyenlet határfeltételekkel	12
2.2.1	Kapacitás	14
2.2.2	Tükörtlöltések módszere	14
2.2.3	Koordinátarendszerek, ortogonális függvények	16
2.2.4	Görbevonalú koordináták	18
2.2.5	Gömbi koordinátarendszer	21
2.2.6	Hengerkoordináták	28
2.2.7	Multipólus kifejtés	30
2.3	Elektrosztatika anyag jelenlétében	31
2.3.1	Határfeltételek	33
2.3.2	Tükörtlöltések módszere	34
2.3.3	Teljes függvényrendszerek	34
2.3.4	Elektrosztatikus energia anyag jelenlétében	36
2.4	Magnetosztatika	38
2.4.1	Áram	38
2.4.2	Mágneses alapjelenségek	39
2.4.3	Árameloszlások	40
2.4.4	Külső térbe helyezett árameloszlás	42
2.4.5	Mágnesség anyag jelenlétében	43
2.4.6	Határfeltételek	45
2.4.7	Magnetosztatikai feladatok megoldási módszerei	45
3	Időfüggés az elektrodinamikában	48
3.1	Maxwell egyenletek	48
3.1.1	Vektor- és skálarpotenciál	49
3.1.2	Maxwell-egyenletek anyag jelenlétében	50
3.1.3	Az elektromos és mágneses tér egyenletei	50
3.1.4	Jelenségek vezetőkben	51
3.2	Elektromágneses tér energiája	51
3.2.1	Az impulzus mérlegegyenlete	52
3.3	Kvázistacionárius eset	53

3.3.1	Indukciós együttható	53
3.3.2	Kvázistacionárius jelenségek vezetőkbén	53
3.4	Teljes időfüggés: források nélküli megoldás	54
3.4.1	Csoport- és fázissebesség	55
3.4.2	Elektrodinamikai hullámok	56
3.4.3	Frekvenciafüggő permittivitás, törésmutató	57
3.4.4	Elektromágneses hullámok közegek határán	60
3.4.5	Hullámterjedés határfeltételekkel	62
3.5	Teljes időfüggés: az inhomogén rész megoldása	64
3.5.1	Green-függvények	64
3.5.2	A Green-függvények fizikai értelmezése	65
3.5.3	Lokalizált, oszcilláló töltésrendszerek tere	66
3.5.4	Dipólsugárzás	67
3.5.5	Multipol sugárzások	68
3.6	Általános mozgást végző tömegpont sugárzása	69
3.6.1	Dipól-közelítés	69
3.6.2	Liénard-Wiechert potenciálok	70
3.6.3	Sugárzás szögeloszlása	72
3.6.4	Sugárzás spektruma	74
3.7	Elektromágneses hullámok szórása	76
3.7.1	Szórás az anyag egyenlőtlenégein	77
3.7.2	Szórás gázon és szabályos kristályon	79
3.8	Cherenkov-sugárzás és átmeneti sugárzás	82
3.9	Relativisztikus elektrodinamika	85
3.9.1	Relativisztikus koordináták	85
3.9.2	Lorentz-transzformáció	87
3.9.3	Tömegpont relativisztikus dinamikája	89
3.9.4	Alkalmazások	91
3.9.5	Sugárzások relativisztikus tárgyalása	92

A		95
A.1	A Liénard-Wiechert potenciálokból származó térerősségek	95

Chapter 1

Bevezetés

Könyvek, irodalom

- J.D Jackson: Klasszikus elektrodinamika (TypoTEX, Budapest 2004)
Ez SI-ben van (a magyar fordítás), ez adja az előadások gerincét
- L.D. Landau és E.M. Lifsic: Elméleti Fizika
 - II: Klasszikus erőterek
 - VIII: Folytonos közegek elektrodinamikája(Tankönyvkiadó, Budapest, 1976)
- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: Mai fizika 5. (Elektromágnesség, Elektrosztatika, Dielektrikumok, Magnetosztatika) (Műszaki Könyvkiadó, 1970)
- Simonyi K.: A fizika kultúrtörténete (Gondolat, 1986)
történeti vonatkozások

1.1 Rövid történeti áttekintés

- Ókori görögök: nem tudtak túl sokat az elektromágnességről. Borostyán (“elektron”) dörzsöléses elektromossága, mágneskő (“magnetic litosz”)
- Kvalitatív megismerés:
 - P. Peregrinus 1269: kísérletileg méri a máges tulajdonságait, erővonalak feltérképezése; nem volt nagy hatása kortársaira
 - W. Gilbert 1600: Föld mágnessége, iránytű, nincs mágneses monopólus; dörzsöléses elektromosság más anyagokban (pl. üveg, viasz).
 - O. Guericke 1672: dörzselektromos gép
 - XVIII. század első felében kedvelt társasági szórakozás lesz az elektromos jelenségek bemutatása
 - S. Grey 1729: vezetés/szigetelés: töltés nagy távolságokra szállítható, nem az áramon volt a hangsúly
 - C. Dufay 1733: kétfajta elektromosság (üveg, gyanta)
 - von Kleist, Musschenbroek: leideni palack (l. fig.1.1), (http://en.wikipedia.org/wiki/Leyden_jar).
⇒ kondenzátor Nagy áramütést tudott szolgáltatni (Nollet 180 gárdistát “ugrasztott meg”).
 - B. Franklin ~ 1750: légköri elektromosság (leideni palack feltöltése, villámhárító), csúcshatás, elektromos töltés fogalma (üvegben van többlet, Euler: +), töltésmegmaradás
- Kvantitatív elektrosztatika: $1/r^2$ -es erőtvény



Figure 1.1: Leideni palack

- J. Priestley 1767: elektromos töltés felületen & üreg belsejében nincs erőhatás
 - Cavendish: ue. a gondolatmenet, ki is mérte torziós mérleggel, de nem publikálta (csak 1879-ben Kelvin); ezen felül foglalkozott kapacitás méréssel, dielektikumokkal, vezetőképességgel.
 - C. Coulomb 1784: hadmérnök, torziós inga vizsgálata, torziós ingával kimérte a Coulomb törvényt
 - Poisson 1811: matematikai formalizmus
- áram
 - L. Galvani 1791: vasrácson rézhorgon békacomb megrándul – állati elektromosság?
 - A. Volta 1800: állandó áramforrás (galvánelem)
 - T.J. Seebeck 1821: termoelektromosság
 - G.S Ohm 1826: áram, ellenállás
 - G. Kirchhof 1845-ben áramkörökre terjesztette ki
 - mágnesség
 - C. Oersted 1820: áram mágneses hatása
 - Biot és Savart 1820: kimérik áramvezető körül kialakuló mágneses hatást mágnesű elfordulásából
 - A.M. Ampère 1820: áramjárta vezetők kölcsönhatása: távolhatás & erő-ellenerő \Rightarrow ezzel egy extra tagot kapott!
áramkör mágneses hatása \equiv lapos mágnes
 - elektromágnesség
 - M. Faraday több munkája
 - * elektromotor 1821
 - * indukció törvénye 1831: már többen (pl. Ampère) előtte vizsgálták az áramhurkok egymásra hatását. Faraday vette észre, hogy a változással jön létre az effektus!
 - * elektrolízis 1833
 - * dielektikumok
 - * Faraday-effektus 1845: fény polariációjának elfordulása mágneses térben
 - elektromágneses tér elképzése
 - J.C. Maxwell 1855-1873: elektromágnesség matematikai formába öntése. Vektorpotenciál bevezetése.
 - H. Hertz 1886: elektromágneses hullámok kísérleti kimutatása, fény elektromágneses hullám, Maxwell egyenletek átfoglalozása
 - H.A. Lorentz 1875: Maxwell-egyenletek anyag jelenlétében, 1891: elektron-elmélet, Lorentz-erő, Lorentz-transzformáció

1.2 Matematikai alapfogalmak

Faraday és Maxwell új fogalmat vezettek be a fizikába: a mező fogalmát. A mező a fizikai tér minden pontjában, minden időpontban létező mennyiség, az erőhatás arányos a mező nagyságával. Nincs távolhatás, hanem

$$\text{forrás} \longrightarrow \text{mező} \longrightarrow \text{erőhatás} \quad (1.1)$$

Pl. q töltés \Rightarrow \mathbf{E} elektromos mező \Rightarrow $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ erő. Az elektrodinamika feladata ezen kapcsolatok megfogalmazása, leírása.

Matematikai megfogalmazás (első verzió, később újra elővesszük): a mező egy $U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ leképezés. A mező valójában a függvény fogalmának kiterjesztése, hiszen ha $n = m = 1$, akkor $U : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 1D függvény. Az elektrodinamikában az alaptér $\mathbf{R}^3 \equiv \{\mathbf{x}\}$ fizikai tér (az idő csak egy paraméter; később átfogalmazunk majd mindent téridőre). Az m értéke lehet

- $m = 1$: skalártér, a tér minden pontjához egy valós számot rendelünk, $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x})$ (pl. hőmérséklet-eloszlás, elektromos potenciál)
- $m = 3$: vektor-mező, minden ponthoz egy 3D vektort rendelünk $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{x})$ (pl. sebesség-eloszlás áramlásnál, elektromos tér).

Komponensek: \mathbf{R}^n -ben a Descartes bázist jelöljük \mathbf{e}_i -vel. Ebben a bázisban kifejthető minden $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ vektor: így pl. $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. A szummát ezentúl el fogjuk hagyni, ismétlődő indexek automatikusan összegzést jelentenek. Ne felejtjük azonban el, hogy a komponenseknek önmagukban nincs jelentésük, csupán a bázis megadásával együtt értelmesek.

\mathbf{R}^n -ben mindig adott egy skalárszorzat $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. A Descartes-bázis erre a skalárszorzatra nézve ortonormált: $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Emiatt a Descartes komponensekkel kifejezve $u, v \in \mathbf{R}^n$ -re $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

Tenzorszorzat: $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ és $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ diadikus (tenzor) szorzata $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in \mathbf{R}^{nm}$, amely lineáris mindkét komponensében. Emiatt \mathbf{R}^{nm} -en bázist alkot $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \mid i = 1 \dots n, j = 1 \dots m\}$; ebben a bázisban a diadikus szorzat komponensei $u_i v_j$.

Az 1D függvényeknél megszokott fogalmakat kiterjeszthetjük a mezőkre is, megfelelő átfogalmazással. Mezők összege, számmal való szorzata magától értetődik.

1.2.1 Mezők deriváltja

def.: $U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ mező deriváltja $\nabla U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{nm}$ mező, egy adott pontban komponensekben kifejezve $\nabla U(\mathbf{x}) \rightarrow$

$$\partial_i U_j(\mathbf{x}) \equiv \left. \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}}, \text{ ahol } i = 1, \dots, n, j = 1 \dots m,$$

ahol $\partial/\partial x_i$ jelentése: csak az i . komponens változik, a többi állandó marad. Jelentése: U megváltozása, ha $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ pontba megyünk:

$$\delta U_j = U_j(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - U_j(\mathbf{x}) = a_i \partial_i U_j, \quad (1.2)$$

Példák:

- $n = m = 1$ esetén $\nabla f = \frac{df}{dx}$ közönséges derivált.
- $n = 3, m = 1$ skalártér esetén $\nabla \Phi \rightarrow \partial_i \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \equiv \text{grad } \Phi$, neve: Φ gradiense. Φ megváltozása \mathbf{a} irányban $\delta \Phi = \mathbf{a} \cdot \text{grad } \Phi$. Emiatt $\text{grad } \Phi$ -re merőleges irányban vannak az ekvipotenciális felületek, maga $\text{grad } \Phi$ a legnagyobb változás irányába mutat.
- $n = m = 3$, ekkor a derivált egy kétindexes mennyiség $\nabla U \rightarrow \partial_i U_j$. Ennek speciális változatai:
 - $\text{div } U = \partial_i U_i$ skalármező, U divergenciája
 - $\text{rot } U = \nabla \times U = \varepsilon_{ijk} \partial_j U_k$ vektormező, U rotációja.¹

¹Itt ε_{ijk} teljesen antiszimmetrikus mennyiség és $\varepsilon_{123} = 1$; vagyis nem nulla elemei csak $1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321}$. ε -ok szorzata: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$.

- $\text{div grad } \Phi = \Delta \Phi$, Laplace operátor. Komponensekben kifejezve $\Delta \Phi = \partial_i \partial_i \Phi$.
- $[\text{rot rot } U]_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l U_m = \partial_i \partial_j U_j - \partial_j \partial_j U_i = \text{grad div } U - \Delta U$.
- $\text{div rot } U = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j U_k = 0$, valamint $[\text{rot grad } \Phi]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0$.

1.2.2 Mezők integrálja

Az 1D függvények integrálját is kiterjeszthetjük mezőkre. Ehhez definiáljuk

- görbe: $\mathbf{R} \supset I \rightarrow \mathbf{R}^3$ függvény, komponensekben $s_i(\tau)$. Értelmezése: a görbét paraméterezzük valós számmal. Görbe érintője egy adott pontban $\frac{ds_i}{d\tau}$.
- felület: $\mathbf{R}^2 \supset A \rightarrow \mathbf{R}^3$ függvény, komponensekben $f_i(u, v)$. Egy felületnek két érintővektora van, ezeket a $\frac{df_i}{du}$ és $\frac{df_i}{dv}$ vektorok feszítik ki. A felület normálisa merőleges a felület összes érintővektorára: $N_i = \varepsilon_{ijk} \frac{df_j}{du} \frac{df_k}{dv}$, a felület normális egységvektora $\mathbf{n} = \mathbf{N}/N$. A felület-elem $df_i = N_i du dv \equiv n_i da$. Ennek da nagysága az $\mathbf{f}_u = \mathbf{f}(u + du, v) - \mathbf{f}(u, v)$ és a $\mathbf{f}_v = \mathbf{f}(u, v + dv) - \mathbf{f}(u, v)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe; valóban, ez a felület $f_u f_v \sin \phi = |\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v|$. Ez, du -ban és dv -ben első rendben megegyezik a fenti kifejezéssel.

Görbén vett integrál

$$\int_s ds_i U(s) = \int_I d\tau \frac{ds_i}{d\tau} U(s(\tau)). \quad (1.3)$$

Más paraméterezést választva $\tau(t)$ áttéréssel:

$$\int_I d\tau \frac{ds_i}{d\tau} U(s(\tau)) = \int_{I'} dt \frac{d\tau}{dt} \frac{ds_i}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} U(s(\tau(t))) = \int_{I'} dt \frac{ds_i}{dt} U(s(t)), \quad (1.4)$$

azaz paraméterezés-független.

Felületre vett integrál

$$\int_f df_i U(f) = \int_A du dv \varepsilon_{ijk} \frac{df_j}{du} \frac{df_k}{dv} U(f(u, v)). \quad (1.5)$$

Erről szintén könnyen belátható, hogy paraméterezés-invariáns.

Végül térfogatra vett integrál

$$\int_V d^3 x U(x). \quad (1.6)$$

Elvileg ezt is lehetne paraméterezni $x(a, b, c)$, ekkor a térfogatelem

$$d^3 x = \varepsilon_{ijk} \frac{dx_i}{da} \frac{dx_j}{db} \frac{dx_k}{dc}, \quad (1.7)$$

amely szintén paraméterezés-független.

1D-ban az integrálás és differenciálás között összefüggés van

$$\int_a^b dt \frac{df}{dt} = f(b) - f(a). \quad (1.8)$$

Ez szintén általánosítható magasabb dimenziós mezőkre, a forma mindig ez marad: egy magasabb dimenziós felületre vett integrálja egy deriválnak a felület határára vett alacsonyabb dimenziós integrállal egyezik meg:

$$\begin{aligned} \int_V dV \text{div } U &= \oint_{\partial V} df_i U_i && (\text{Gauss}) \\ \int_A df_i [\text{rot } U]_i &= \oint_{\partial A} ds_i U_i && (\text{Stokes}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Derékszögű tartományokra mindkettő bizonyítása egyszerű:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \partial_1 U_1(x_1, x_2, x_3) = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 [U_1(b_1, x_2, x_3) - U_1(a_1, x_2, x_3)] = \int_{B_1} df_1 U_1 + \int_{A_1} df_1 U_1, \quad (1.10)$$

mivel az irányítás ott ellentétes. Minden oldalra felösszegezve kapjuk a Gauss-tételt. Másrészt

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 [\partial_1 U_2 - \partial_2 U_1] = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 [U_2(b_1, x_2) - U_2(a_1, x_2)] - \int_{a_1}^{b_1} dx_1 [U_1(x_1, b_2) - U_1(x_1, a_2)]; \quad (1.11)$$

az irányításokat figyelembe véve ismét megkapjuk a helyes eredményt. A teljes felületet beosztva téglalpokra tetszőleges felületre bizonyítható.

Chapter 2

Elektrosztatika

2.1 Töltéseloszlások

Coulomb mérései alapján q_1 töltés által a q_2 -re ható erő

$$\mathbf{F}_2 = k \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3}. \quad (2.1)$$

A k faktor értéke SI-ben $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, ahol $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Vm/C, a vákuum permittivitása. CGS rendszerben $k = 1$. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}_2) = k \frac{q_1 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3}, \quad (2.2)$$

ahol \mathbf{E} a q_1 által létrehozott elektromos tér. A töltés mértékegysége SI-ben a Coulomb (C), igen nagy érték, hiszen két 1C-os töltés 1m-ről egymást kb. $9 \cdot 10^9$ N erővel vonzza vagy taszítja. Az elemi töltés nagysága $1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

Kísérleti tény, hogy a töltések tere összeadódik \Rightarrow ponttöltés-rendszer elektromos tere

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (2.3)$$

Nagyon sűrűn elhelyezkedő töltések terét jellemezhetjük a sűrűségükkel. Vegyünk egy $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ térfogatelemet az \mathbf{x}' pont körül, amelyben a $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$ mennyiség csak kicsit változik. Ebben a térfogatban legyen $\Delta Q = \varrho(\mathbf{x}') \Delta V$ töltés. Ekkor

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\mathbf{x}'} \varrho(\mathbf{x}') \Delta V \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (2.4)$$

folytonos határesetben ($\Delta V \rightarrow 0$)

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x' \varrho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}} \Rightarrow E_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x' \varrho(\mathbf{x}') \frac{x_i - x'_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (2.5)$$

ahol a második alak a komponensekben felírt képlet.

A közelítés logikájából látszik, hogy ponttöltések közvetlen közelében nem lesz jó a folytonos töltéseloszlás-kép, ott az egyes töltéseket külön kell figyelembe venni. Ugyanakkor matematikailag a ponttöltés megfogalmazható mint egy speciális töltéseloszlás:

$$\text{ponttöltés } \mathbf{x}_0 \text{ helyen} \longrightarrow q \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0). \quad (2.6)$$

Vagyis ponttöltés rendszer töltéseloszlása

$$\varrho(\mathbf{x}') = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i). \quad (2.7)$$

Itt $\delta(\mathbf{x})$ a 3D Dirac-delta *disztribúció*, tulajdonságai

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \delta(x \neq 0) = 0, \quad \int dx f(x) \delta(x) = f(0). \quad (2.8)$$

Változóhelyettesítés hatására

$$\delta(f(x)) = \sum_{\substack{x_i, \\ f(x_i)=0}} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}. \quad (2.9)$$

A ponttöltés tere igen különleges. Integráljuk ki egy zárt felületre.

$$\oint d\mathbf{f} \mathbf{E} = \int d\mathbf{a} n \mathbf{E} = \int d\Omega \frac{r^2}{\cos \varphi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \varphi}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \begin{cases} q/\epsilon_0 & \text{ha } q \in V \\ 0 & \text{ha } q \notin V \end{cases} \quad (2.10)$$

Egy töltéeloszlásra értelmezve: csak azok a töltések számítanak, amelyek benne vannak a térfogatban:

$$\boxed{\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x})} \quad \text{Gauss-törvény.} \quad (2.11)$$

A felületi integrált át lehet írni a Gauss-tétel segítségével

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E} = \int_V d^3\mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}). \quad (2.12)$$

Mivel ez igaz *minden* térfogatra, ezért levonhatjuk a következtetést:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}.} \quad (2.13)$$

Ez már *lokális* törvény, Maxwell 1. egyenlete.

A ponttöltés tere mást is tud:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.14)$$

mert $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r$ jelöléssel, $r^2 = \sum_i (x_i - x'_i)^2$, valamint egy általános r -függő függvényre

$$[\operatorname{grad} f(r)]_i = \partial_i f(r) = \frac{\partial r^2}{\partial x_i} \frac{1}{2r} \frac{df}{dr} = \frac{x_i - x'_i}{r} f'(r). \quad (2.15)$$

Most $f(r) = 1/r$, azaz $f'(r) = -1/r^2$, ezzel a fenti összefüggést bizonyítottuk.

Emiatt (2.5) egyenletet átalakítva:

$$\boxed{E_i(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}), \quad \text{ahol} \quad \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},} \quad (2.16)$$

Φ neve skalárpotenciál. A potenciálnak nincs közvetlen fizikai jelentése, belőle nem származik erőhatás, csupán egy segédmenység. Mivel csak a gradiense értelmes, ezért egy konstanssal eltolható.

A potenciál létének következménye, hogy

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0,} \quad (2.17)$$

Maxwell 2. egyenlete.

Másik következmény, alkalmazva (2.13)-et, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\Delta \Phi = \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\Delta \Phi = -\frac{\varrho(\mathbf{x})}{\epsilon_0},} \quad (2.18)$$

azaz Φ a Poisson-egyenletet elégíti ki.

Feladat: Ha adott $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ térerősség, ahhoz milyen potenciál tartozik?

Megoldás:

$$\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) = - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} ds_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{s}} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dx_i}{d\tau} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{s}} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \Phi(\mathbf{x}_1) - \Phi(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \boxed{\Phi(\mathbf{x}_1) - \Phi(\mathbf{x}_2) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s})} \quad (2.19)$$

Ha más utat választunk, akkor a kétfajta módon számolt potenciálkülönbség, rögzítve $\Phi(x_2)$ -t

$$\delta\Phi(\mathbf{x}_1) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} ds' \mathbf{E}(\mathbf{s}') = \oint d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) = \int_F d\mathbf{f} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2.20)$$

Ezért a megoldás egyértelmű.

2.1.1 Töltésrendszer energiája

Elektromos mezőben mozgó töltésre ható erő $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Ha fel akarunk építeni egy töltésrendszert, ez ellen az erő ellen kell dolgoznunk, vagyis $-\mathbf{F}$ erőt kell kifejtenünk. $d\mathbf{x}$ elmozdulás esetén az általunk végzett munka:

$$dW = -\mathbf{F}d\mathbf{x} = -q\mathbf{E}d\mathbf{x} \Rightarrow W_{\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2} = -q \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s}\mathbf{E}(\mathbf{s}) = q(\Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1)). \quad (2.21)$$

Az előbbi feladat alapján az $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$ mozgásnál végzett munka független a pályától. Ha $\mathbf{x}_1 = \infty$, ahol $\Phi(\infty) = 0$ (ez véges töltésrendszerénél mindig megtehető), akkor $W_{\infty \rightarrow \mathbf{x}} = q\Phi(\mathbf{x})$.

Az általunk végzett munka – az energiamegmaradás miatt – a töltésrendszer energiájában tárolódik. Ezért a fenti képletet a következőképpen értelmezzük: ha van egy töltésrendszerünk, amely már létrehozott egy $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ térerősséget, s ehhez hozzáadunk egy δq töltést a végtelenből \mathbf{x}_0 helyre, akkor a töltésrendszer energiájának változása

$$\delta W = \delta q \Phi(\mathbf{x}_0). \quad (2.22)$$

Teljes töltésrendszer felépítésénél egyesével tesszük be a töltéseket, az újonnan betett töltések a régiek terét érzik:

$$W = \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.23)$$

Itt ki kell hagyni az $i = j$ esetet, mert ekkor végtelent kapnánk.

Folytonos esetre is könnyen átfogalmazhatók a fenti gondolatok: ekkor egy $\delta\rho$ töltéseloszlással módosítjuk a már meglévő töltésrendszerünket, ekkor

$$\boxed{\delta W = \int d^3\mathbf{x} \delta\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})}. \quad (2.24)$$

A teljes töltéseloszlás energiájához felhasználjuk (2.16) egyenletet:

$$\delta W = \frac{1}{2} \delta \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \Rightarrow W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}). \quad (2.25)$$

Ebben a képletben nem tudjuk kizárni az $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ esetet, azaz ez tartalmazza a "sajátenergiát" is. Felhasználva a Maxwell egyenletet (2.13), valamint az $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ képletet

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \Phi \operatorname{div} E_i = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \partial_i (\Phi E_i) - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} (\partial_i \Phi) E_i = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} d^2 x_i \Phi E_i + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E}^2. \quad (2.26)$$

Az első tag nulla, mert a végtelenben $\Phi = 0$, így marad

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E}^2 \Rightarrow w = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (2.27)$$

az energia illetve az energiasűrűség kifejezésére.

2.1.2 Kitérő: erővonal-kép

Mi az erővonal? Ha adott egy vektormező, jelen esetben \mathbf{E} , akkor definiálhatunk olyan $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ görbék, melyek érintője mindig az aktuális térerősség:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \mathbf{E}(\gamma(\tau)). \quad (2.28)$$

Ezek a görbék az erővonalak, melyből a térerősség irányát kaphatjuk meg. A térerősség az erővonalak *sűrűségével* adható meg.

Mivel $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$, ami az ekvipotenciális felületekre merőleges. Vagyis az erővonalak az ekvipotenciális felületekre merőlegesek.

Mikor konzisztens ez a kép? Vegyünk egy olyan infinitezimális térfogatot, amely egyik sarok pontja \mathbf{x} , az alaplap merőleges $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ -re, az oldalélek pedig a sarokpontokban érvényes térerősségekkel párhuzamosak. E térfogatra integrálva \mathbf{E} -t, az oldalapok nem adnak járulékot, hiszen ott a normális merőleges a térerősségekre. Az alaplapokon $\mathbf{n} \parallel \mathbf{E}$, vagyis

$$\oint d\mathbf{f}\mathbf{E} = dA' E' - dAE, \quad (2.29)$$

ami nulla, mert az erővonalak sűrűsége, feltételezésünk szerint, mindenhol arányos a térerősséggel, azaz $E dA = \text{konstans}$. A Gauss tétel miatt tehát erre a kis térfogatra integrálva $\text{div } \mathbf{E}$ -t, nullát kapunk. Mivel a térfogat infinitezimális, itt a $\text{div } \mathbf{E}$ konstansnak vehető, azaz

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (2.30)$$

Az erővonal-kép tehát akkor konzisztens, ha a vektormező divergenciamentes. Divergencia esetén új erővonalakat kell indítani.

2.1.3 Speciális töltéseloszlások tere

- **ponttöltés:** láttuk

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (2.31)$$

- **dipólus:** $-q$ töltés $-\mathbf{a}/2$ helyen, $+q$ töltés $\mathbf{a}/2$ helyen, \mathbf{a} -hoz képest nagy távolságra:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}/2|} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{a}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \Rightarrow \boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}}, \quad (2.32)$$

ahol bevezettük a $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$ dipóluserősséget. Ha $\mathbf{a} \rightarrow 0$, miközben \mathbf{p} véges marad, akkor a fenti képlet minden $\mathbf{x} \neq 0$ helyen érvényes lesz.

A térerősség

$$E_i(\mathbf{x}) = -\partial_i \Phi(\mathbf{x}) = -\frac{p_j}{4\pi\epsilon_0} \partial_i \frac{x_j}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3x_i \mathbf{p}\mathbf{x} - p_i \mathbf{x}^2}{|\mathbf{x}|^5}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{p}\mathbf{x}) - \mathbf{p}\mathbf{x}^2}{|\mathbf{x}|^5} \quad (2.33)$$

- **egyenletesen töltött végtelen síklap tere:** felületi töltéssűrűség legyen σ – ez azt jelenti, hogy a felület egy dA darabján elhelyezkedő töltés nagysága σdA . A felület legyen az x-y síkban.

A direkt képlet használata helyett szimmetriát használjuk ki: feltehetjük, hogy nem függ semmi x,y-tól, hiszen az x-y síkban eltolás-invariáns a feladat. Ha $\Phi(z)$, akkor a térerősség nem nulla komponense csak $E_z(z)$. Legyen $z \leq 0$ -ra a potenciál $\Phi^\pm(z)$, a térerősség $E_z^\pm(z)$. Vegyünk egy olyan dA alapú téglalapot, amely merőleges a felületre, és integráljuk \mathbf{E} -t a felületére. Mivel a téglalap oldalain $\mathbf{E}\mathbf{n} = 0$, csak a tetején és az alján kapunk járulékot, $dA(E_z^+(z) - E_z^-(z))$. A Gauss-törvény miatt ez arányos a téglalap belsejében levő töltéssel $dA\sigma/\epsilon_0$, azaz

$$E_z^+(z) - E_z^-(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.34)$$

Ha nincs más forrás jelen, akkor z és $-z$ egymással egyenértékű,

$$E_z^+(z) = -E_z^-(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad \Phi(z) = -\frac{\sigma|z|}{2\epsilon_0}. \quad (2.35)$$

Ha az egyik oldalon ($z < 0$) a térerősség nulla (pl. fém belseje), akkor

$$E_z^+(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \Phi^+(z) = -\frac{\sigma z}{\varepsilon_0}. \quad (2.36)$$

A potenciál végtelenhez tart, ha $z \rightarrow \infty$.

Triviális eset: ha $\sigma = 0$, akkor $E_z^+(z) - E_z^-(z)$, azaz a térerősség normális komponense folytonos.

- **Egyenletesen töltött vonaltöltés tere:** vonal töltéssűrűség legyen η , azaz a töltés minden $d\ell$ szakaszon $\eta d\ell$. Szimmetria itt azt diktálja, hogy nem függhet semmi z -tól és φ -tól, azaz $\Phi(r)$, ezért $E_r(r)$. Egy hengerre integrálva, melynek sugara r , magassága $d\ell$, csak a paláston kapunk járulékot, mégpedig $2\pi r d\ell E_r$. Ez egyenlő a bezárt töltéssel

$$2\pi r d\ell E_r = \frac{1}{\varepsilon_0} d\ell \eta \Rightarrow E_r = \frac{\eta}{2\pi \varepsilon_0 r}, \quad \Phi = \frac{\eta}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (2.37)$$

A potenciál végtelenhez tart, ahogyan $r \rightarrow 0$ vagy $r \rightarrow \infty$.

2.2 Poisson egyenlet határfeltételekkel

Eddig azt tanulmányoztuk, hogy milyen potenciál illetve térerősség alakul ki, ha ismerjük a töltéeloszlást. Azonban általában nem tudjuk rögzíteni a töltéseket, pl. azért, mert az anyagban elmozduló töltéshordozók vannak, így magától töltéstöbblet illetve hiány alakulhat ki. Ekkor nem tudjuk a térerősséget sem kiszámolni közvetlenül.

Láttuk (2.18)-ban, hogy a potenciál egy Poisson-egyenletnek tesz eleget. Az anyagi közegek jelenléte határfeltételeket szab a megoldásnak. Tipikus határfeltételek:

- **fém felülete** (tökéletes vezető): ha a fém belsejében a töltések a legkisebb térerősség hatására is elmozdulnak, akkor olyan töltéeloszlás alakul ki, amely teljesen lenullázza a belső térerősséget. Ezért fém belsejében nem lehet \mathbf{E} , a felületen pedig $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$ a felület normálisával. Emiatt a fém felületén $\delta\Phi = \int d\mathbf{x} \mathbf{E} = 0$, a fém felülete *ekvipotenciális*.
- **felületi töltéssűrűség:** ha a felületen valamilyen töltéssűrűség adott, a felület túloldalán $\mathbf{E} = 0$, akkor $\mathbf{E} = \mathbf{n}\sigma/\varepsilon_0$.

Ennek általánosításaként a megoldandó feladat:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Phi(\mathbf{x}_f) = \text{adott} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{n} \text{ grad } \Phi(\mathbf{x}_f) \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \text{adott}, \quad (2.38)$$

ahol $\mathbf{x}_f \in$ felület. A felület lehet nem összefüggő (azaz több felület), és lehet a végtelenben is. Az első fajta határfeltételt *Dirichlet*, a második fajtat *Neumann* határfeltételnek hívjuk.

Hogyan oldható meg ez a feladat? Hogyan lehet a legáltalánosabb megoldást megtalálni?

Először bebizonyítjuk, hogy a Poisson-egyenlet megoldása egyértelmű, adott határfeltételek esetén

Tétel: Legyen $\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = -\rho/\varepsilon_0$, ugyanazokkal a határfeltételekkel. Ekkor $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{konstans}$.

Bizonyítás.: Legyen $K = \Phi_1 - \Phi_2$, erre igaz, hogy $\Delta K = 0$, és a határon $K = 0$ vagy $\mathbf{n} \text{ grad } K = 0$. Alkalmazzuk a Gauss-tételt (1.9) a $K \text{ grad } K$ vektormezőre:

$$\int_V d^3\mathbf{x} \text{ div}(K \text{ grad } K) = \int_V d^3\mathbf{x} [(\text{grad } K)^2 + K \Delta K] = \int_V d^3\mathbf{x} (\text{grad } K)^2 = \oint_S d\mathbf{f} K \text{ grad } K = 0. \quad (2.39)$$

Mivel a teljes térre integrálva egy pozitív függvényt 0-t kapunk, ezért a függvény maga nulla kell legyen: $\text{grad } K = 0$, azaz $K = \text{konstans}$.

QED.

Használjunk egy trükköt: oldjuk meg a feladatot egyetlen ponttöltésre, amely az \mathbf{x}' helyen található. Egyelőre feledkezzünk meg a határfeltételekről, ekkor azt kéne megoldani, hogy

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.40)$$

G neve *Green-függvény*. Itt ugyan \mathbf{x}' csak a ponttöltés helyét jelzi a jobb oldalon, de mivel a bal oldal szimmetrikus az \mathbf{x} és \mathbf{x}' cseréjére, ezért $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ is szimmetrikus függvénye a két argumentumnak. A $\Phi(\mathbf{x})$ megoldás előállítható mint

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}'), \quad \text{hiszen} \quad \Delta\Phi(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') = -\frac{\varrho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}. \quad (2.41)$$

Még a határfeltételeket kell tisztázni. Ehhez egy matematikai formula fog segíteni:

Tétel: *G. Green, 1824:* legyen φ és ψ két skalármező, V egy térfogatelem, $S = \partial V$ a felülete. Ekkor

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\varphi(\mathbf{x}) \Delta\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \Delta\varphi(\mathbf{x})) = \oint_S d\mathbf{f} (\varphi(\mathbf{x}) \nabla\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \nabla\varphi(\mathbf{x})). \quad (2.42)$$

Bizonyítás.: Használjuk a Gauss-tételt (1.9) $U_1 = \varphi \nabla\psi$ és $U_2 = \psi \nabla\varphi$ vektormezőkre.

$$\operatorname{div} U_1 = (\nabla\varphi)(\nabla\psi) + \varphi \Delta\psi, \quad \operatorname{div} U_2 = (\nabla\varphi)(\nabla\psi) + \psi \Delta\varphi. \quad (2.43)$$

Ezért

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\operatorname{div} U_1 - \operatorname{div} U_2) = \int_V d^3\mathbf{x} (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) = \oint_S d\mathbf{f} (U_1 - U_2) = \oint_S d\mathbf{f} (\varphi \nabla\psi - \psi \nabla\varphi). \quad (2.44)$$

QED.

Alkalmazzuk a Green-tételt $\psi(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ és $\varphi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$ esetre. Használva (2.38) és (2.40) egyenleteket

$$-\frac{1}{\varepsilon_0} \Phi(\mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}) = \oint_S d\mathbf{f} (\Phi(\mathbf{x}) \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla\Phi(\mathbf{x})). \quad (2.45)$$

Mivel $d\mathbf{f} \sim \mathbf{n}$, a normális irányú deriváltak számíthatnak csak.

Ha tisztán Dirichlet-féle határfeltételünk van, akkor válasszuk a Green-függvény határfeltételének

$$\boxed{G(\mathbf{y}, \mathbf{x} \in S) = 0 \quad (\text{Dirichlet}).} \quad (2.46)$$

Ekkor a második tag nulla, ezért

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}) - \varepsilon_0 \oint_S d\mathbf{f} \Phi(\mathbf{x}) \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.47)$$

Ha Neumann határfeltételünk vannak, akkor nem lehet a G gradiensére nullát kiróni, hiszen

$$\oint_S d\mathbf{f} \operatorname{grad} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_V d^3\mathbf{x} \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}. \quad (2.48)$$

Ezért

$$\boxed{\operatorname{grad} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x} \in S} = -\frac{1}{\varepsilon_0 |S|} \quad (\text{Neumann}),} \quad (2.49)$$

ahol $|S|$ a felület nagysága. Ezzel

$$\Phi(\mathbf{y}) = \langle \Phi \rangle_S + \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}) + \varepsilon_0 \oint_S d\mathbf{f} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla\Phi(\mathbf{x}), \quad (2.50)$$

ahol $\langle \Phi \rangle_S$ a potenciál átlaga a felületen, ez nem határozható meg a tisztán Neumann határfeltételeknél.

Vagyis elég a Poisson-egyenletet ponttöltésre megoldani, Dirichlet határfeltételek esetén nulla felületi potenciállal. Persze ez is igen bonyolult feladat, lehetséges megközelítési módok:

- Numerikus módszerek
- a megoldás megsejtése (pl. tükörtöltések módszere)
- speciális szimmetriájú rendszerek, ill. a hozzájuk illeszkedő koordinátarendszerek.

2.2.1 Kapacitás

Vegyünk egy fém felületeket tartalmazó rendszert, Dirichlet határfeltételekkel. Ennek Green-függvénye legyen $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Töltsük fel a felületeket V_i potenciálra, ekkor megadható a potenciál a tér minden pontjában: mivel most $\rho = 0$, ezért (2.47) egyenlet szerint

$$\Phi(\mathbf{y}) = -\varepsilon_0 \sum_{j=1}^n V_j \oint_{S_j} d\mathbf{f}_x \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^n V_i f_i(\mathbf{y}). \quad (2.51)$$

A i . felületen levő töltés a felületi töltés összege

$$Q_i = \oint_{S_i} d\mathbf{f}_y \sigma_j(\mathbf{y}) = -\varepsilon_0 \oint_{S_i} d\mathbf{f}_y \nabla_y \Phi(\mathbf{y}) = \varepsilon_0^2 \sum_{j=1}^n V_j \oint_{S_i} d\mathbf{f}_y \oint_{S_j} d\mathbf{f}_x \nabla_y \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j. \quad (2.52)$$

Vagyis az i . felületen levő töltés nagysága lineárisan függ a felületeken levő potenciáltól. A lineáris koefficiens a kapacitás (mátrix). A rendszer energiája

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \oint_{S_i} d\mathbf{f}_x \sigma_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_{ij} V_i V_j. \quad (2.53)$$

Gyakorlatban egyszerűbb, ha a potenciálok alapján megmondjuk a töltés nagyságát, az arányuk a kapacitás. Pl.

- gömb kapacitása: Q töltésű R sugarú gömb tere megegyezik egy origóba helyezett ponttöltés terével:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R. \quad (2.54)$$

- síkkondenzátor kapacitása: két A felületű síklap d távolságra, egyike σ , másika $-\sigma$ töltéssűrűséggel. A köztük levő tér egyenletes $E = \sigma/\varepsilon_0$. Emiatt

$$Q = \sigma A, \quad V = \sigma d/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{A\varepsilon_0}{d}. \quad (2.55)$$

2.2.2 Tükörtöltések módszere

Vegyünk Dirichlet határfeltételeket, ekkor a Green függvény egy ponttöltés tere akkor, ha a határfeltételek mindenütt $\Phi = 0$. A tükörtöltések módszerénél megpróbáljuk a határfeltételeket néhány, a *nem-fizikai* térbe (azaz a határfelületek által elszeparált térrészbe) elhelyezett ponttöltéssel kielégíteni. Ez nem megy mindig, de vannak speciális felületek, ahol működik.

Síklap Green-függvénye: vegyünk a $z = 0$ síkon megadott Dirichlet határfeltételeket. Ekkor a Green függvényt úgy állítjuk elő, hogy egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ pontba elhelyezünk egy egységnyi ponttöltést, a teret keressük $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ pontban, hogy $\Phi(y_1, y_2, y_3) = 0$. Ennek a feltételnek nyilván megfelel egy olyan rendszer, ahol $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, -x_3)$ pontba leteszünk egy (-1) ponttöltést, hiszen a teljes megoldás ekkor

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|} \right], \quad (2.56)$$

komponensekben kiírva

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 + x_3)^2}} \right]. \quad (2.57)$$

Mivel a tükörtöltést a $-x_3$ helyre tettük, az $x_3 > 0$ fizikai térrészben valóban csak egy ponttöltés szerepel. Másrészt az is igaz, hogy $\Phi(y_3 = 0) = 0$, mert ekkor a két tag egyenlő nagyságú. Vagyis a fenti G valóban a Green-függvény.

kérdés: mi a síklap Green-függvénye az $x_3 < 0$ térrészben?

Gömb Green-függvénye: vegyünk egy R sugarú gömböt az origó körül – milyen a Green-függvénye $r > R$ tartományban?

A Green függvényhez egy ponttöltésre kell megoldanunk a $\Phi(r = R) = 0$ határérték-feladatot. A gömbszimmetria miatt válasszuk a ponttöltés helyét a $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ helyre. Tegyük fel, hogy a tükörtöltések módszere működik egyetlen, a gömb belsejébe $\mathbf{x}' = (x', 0, 0)$ helyre betett $-q$ nagyságú tükörtöltéssel. Vagyis a feltevésünk szerint

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{q}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|} \right], \quad (2.58)$$

komponensekben kifejezve

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + y_2^2 + y_3^2}} - \frac{q}{\sqrt{(y_1 - x_1')^2 + y_2^2 + y_3^2}} \right]. \quad (2.59)$$

Próbáljuk úgy választani x_1' -t és q -q, hogy a $\Phi = 0$ felület egyenlete $\mathbf{y}^2 = R^2$ legyen

$$\begin{aligned} q^2 [(y_1 - x_1)^2 + y_2^2 + y_3^2] &= (y_1 - x_1')^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ q^2 [x_1^2 - 2y_1x_1 + R^2] &= x_1'^2 - 2y_1x_1' + R^2 \quad \forall y_1. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ez teljesíthető, mert két változónk van, és a fenti egyenlet lineáris:

$$q^2 [x_1^2 + R^2] = x_1'^2 + R^2 \quad q^2 x_1 = x_1'. \quad (2.61)$$

$$(q^2 - 1)(q^2 x_1^2 - R^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 1 \quad \text{vagy} \quad q = \frac{R}{x_1}.$$

A $q = 1$ esetre $x_1' = x_1$, ekkor nincs egyáltalán tér. A fizikai megoldás a másik

$$q = \frac{R}{x_1}, \quad x_1' = \frac{R^2}{x_1}. \quad (2.62)$$

Tetszőleges \mathbf{x} és \mathbf{y} esetén a Green-függvény

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{R/|\mathbf{x}|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x} \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathbf{y}^2 \mathbf{x}^2}{R^2} + R^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{y}}} \right]. \quad (2.63)$$

A második formula mutatja, hogy $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

kérdés: mi a gömb Green-függvénye az $r < R$ térrészben?

Feladat: Milyen az egyenletes \mathbf{E}_0 elektromos térbe helyezett földelt gömb tere?

Megoldás: A földeltség azt jelenti, hogy $\Phi = 0$ a felületen. Az egyenletes elektromos teret előállíthatom két töltés közötti térként, ha a töltések végtelen távol vannak, de végtelen erősek. Képletben: q töltés legyen $-x$ helyen, $-q$ töltés x helyen, ekkor az elektromos térerősség közepén

$$E_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \quad \Rightarrow \quad q = 2\pi\epsilon_0 x^2 E_0. \quad (2.64)$$

A két ponttöltés két tükörtöltést hoz létre, a töltések nagysága, illetve az origótól való távolságuk

$$Q = qR/x = 2\pi\epsilon_0 x R E_0, \quad x' = R^2/x \quad (2.65)$$

Ha $x \rightarrow \infty$, akkor a tükörtöltések egy dipólust alkotnak, a dipólerősség $p = 2Qx' = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$. Dipólus potenciálját láttuk (2.32)-ben. Ezért a teljes tér potenciálja, vektorosan

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}_0 \mathbf{x} \left[1 - \frac{R^3}{|\mathbf{x}|^3} \right]. \quad (2.66)$$

Értelmezés: az elektromos tér a kezdetben semleges fémgömböt elektromosan aktív állapotba hozza, *polarizálja*. A polarizáció gömb esetén dipólmomentum kialakulását jelenti, amely arányos a gömb térfogatával. Ennek a dipólusnak a nagysága, összehasonlítva (2.32) egyenlettel:

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0. \quad (2.67)$$

Fémgömbben a töltéshordozók végtelenül könnyen elmozdulnak, vagyis a fenti eredmény az adott térfogatban maximálisan kialakuló dipólmomentum.

2.2.3 Koordinátarendszerek, ortogonális függvények

Mi a teendő, ha egy általános \mathcal{S} felületen van a határfeltétel? A Green-függvény megoldását keressük

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.68)$$

alakban. Ekkor

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Rightarrow \Delta_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ G(\mathbf{x} \in \mathcal{S}, \mathbf{y}) = 0 &\Rightarrow F(\mathbf{x} \in \mathcal{S}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Vagyis ha ismerjük a Laplace-egyenlet megoldását tetszőleges határfeltételek esetén, akkor meg tudjuk konstruálni a Poisson-egyenlet Green-függvényét.

Kvalitatíve végiggondolva a feladatot: a megoldáshoz próbáljunk olyan koordinátarendszert választani, ahol az első két változóhoz tartozó koordinátafelület éppen a határfelület, és válasszuk a harmadik koordinátát erre merőlegesen. Vagyis paraméterezzük a helyvektorokat $\mathbf{r}(\xi_i)$ -vel $i = 1, 2, 3$, olyan módon, hogy $\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 1) \equiv \mathcal{S}$, és $\partial\mathbf{r}/\partial\xi_3 \parallel d\mathbf{f}$. Ebben a koordinátarendszerben a felület irányú és az arra merőleges deriváltak "nem keverednek", azaz azt várjuk, hogy

$$0 = \Delta F = \Delta_{\parallel} F + \Delta_{\perp} F, \quad (2.70)$$

ahol Δ_{\parallel} illetve Δ_{\perp} a felületirányú, illetve arra merőleges deriváltakat tartalmaz. Ekkor a feladat megoldását kereshetjük

$$F(\xi_{\parallel}, \xi_{\perp}) = F_{\parallel}(\xi_{\parallel}) F_{\perp}(\xi_{\perp}) \quad (2.71)$$

alakban, ahol $\xi_{\parallel} = (\xi_1, \xi_2)$ és $\xi_{\perp} = \xi_3$. Ekkor

$$0 = F_{\perp} \Delta_{\parallel} F_{\parallel} + F_{\parallel} \Delta_{\perp} F_{\perp} \Rightarrow 0 = \frac{\Delta_{\parallel} F_{\parallel}}{F_{\parallel}} + \frac{\Delta_{\perp} F_{\perp}}{F_{\perp}}. \quad (2.72)$$

Megfelelő normálás esetén ez első tag csak ξ_{\parallel} koordinátáktól függ, a második csak ξ_{\perp} koordinátáktól. Az összegük csak akkor lehet állandó (nulla), ha mindkét tag konstans. Azaz

$$\Delta_{\parallel} F_{\parallel} = \lambda F_{\parallel}, \quad \Delta_{\perp} F_{\perp} = -\lambda F_{\perp} \quad (2.73)$$

sajátérték-egyenleteket kapunk valamilyen λ -val. A teljes megoldás tehát

$$F(\xi_i) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} F_{\parallel}^{(\lambda)}(\xi_{\parallel}) F_{\perp}^{(-\lambda)}(\xi_3). \quad (2.74)$$

c_{λ} -k onnan határozhatók meg, hogy

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 1) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} F_{\parallel}^{(\lambda)}(\xi_{\parallel}) = \text{határfeltételek}, \quad (2.75)$$

feltételezve, hogy $F_{\perp}^{(-\lambda)}(\xi_3 = 1) = 1$.

Ortogonalis függvényrendszerek

A párhuzamos komponenssel kapcsolatban két kérdés merül fel:

1. vajon minden, \mathcal{S} -en adott függvény felírható a fenti alakban, vagyis bármilyen határfeltétel esetén jó az eljárásunk?
2. milyen értékeken fut végig λ ?

Ha Δ egy $N \times N$ -es valós szimmetrikus mátrix lenne, akkor sokmindent tudnánk a megoldásról. Jelöljük a sajátérték egyenletet $\Delta \mathbf{F}_{(i)} = \lambda_i \mathbf{F}_{(i)}$ módon, ekkor

- λ_a valós, mert

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_{(i)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} = \lambda_i \mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{F}_{(i)} \\ \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(i)}^* = \lambda_i^* \mathbf{F}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^* \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \mathbf{F}_{(i)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} - \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(i)}^* = (\lambda_i - \lambda_i^*) \mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{F}_{(i)}$$

- $\mathbf{F}_{(i)}$ -k ortogonálisak, mert

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_{(j)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} = \lambda_i \mathbf{F}_{(j)}^* \mathbf{F}_{(i)} \\ \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(j)}^* = \lambda_j \mathbf{F}_{(i)} \mathbf{F}_{(j)}^* \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \mathbf{F}_{(j)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} - \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(j)}^* = (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{F}_{(j)}^* \mathbf{F}_{(i)}$$

- $\{\mathbf{F}_{(i)} | i = 1, \dots, N\}$ teljes rendszert alkot, azaz minden \mathbf{b} vektorra $\exists \{c_i | i = 1, \dots, N\}$ együtthatók, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{F}_{(i)}$. Az ortogonalitás miatt $c_i = \mathbf{b} \mathbf{F}_{(i)}$.

Komponensekben vektorokra igaz lenne, hogy

$$\sum_{i=1}^N F_{(i),a}^* F_{(i),b} = \delta_{ab}, \quad \text{és} \quad \sum_{a=1}^N F_{(i),a} F_{(j),a} = \delta_{ij}. \quad (2.76)$$

Ha $N \rightarrow \infty$, és végtelenül besűríttem a pontokat, akkor végülis eljuthatok a folytonos függvényekhez. Felállítható egy megfeleltetés a diszkrét és folytonos esetek között, l. a 2.1 táblázatot.

	diszkrét	folytonos
vektor	\mathbf{v}	$F \in L^2$
index	i	ξ
összegzés	\sum_i	$\int_S d^2 \xi$
skalárszorzat	$\mathbf{u}^* \mathbf{v}$	$\int_S d^2 \xi U^*(\xi) V(\xi)$
sajátérték-egy.	$\Delta \mathbf{F}_{(i)} = \lambda_i \mathbf{F}_{(i)}$	$\Delta_{\parallel} F_{\lambda} = \lambda F_{\lambda}$
sajátérték	$\lambda_i \in \mathbf{R}$	$\lambda \in \mathbf{R}$
sajátvektor	$\mathbf{F}_{(i)}$ vektor	$F_{\lambda}(\xi)$ függvények
ortonormáltság	$\mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{F}_{(j)} = \delta_{ij}$	$\int_S d^2 \xi F_{\lambda}^*(\xi) F_{\lambda'}(\xi) = \delta_{\lambda \lambda'}$
teljesség	$\sum_{i=1}^N F_{(i),a}^* F_{(i),b} = \delta_{ab}$	$\sum_{\lambda} F_{\lambda}^*(\xi) F_{\lambda}(\xi') = \delta(\xi - \xi')$
kifejtés	$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{F}_{(i)}$ $c_i = \mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{b}$	$f(\xi) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} F_{\lambda}(\xi)$ $c_{\lambda} = \int_S d^2 \xi F_{\lambda}^*(\xi) f(\xi)$

Table 2.1: Megfeleltetés

Még bizonyítsuk be, hogy a Laplace operátor valóban valós és önadjungált. A valósság nyilvánvaló, hiszen minden valós függvény Laplace-a is valós. Az adjungálás definíciója vektorokra illetve operátorokra:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* \mathbf{M} \mathbf{v} &= (\mathbf{M}^{\dagger} \mathbf{u})^* \mathbf{v} \Rightarrow (M^{\dagger})_{ij} = M_{ji}^* \\ \int_S d^2 \xi F^*(\xi) M G(\xi) &= \int_S d^2 \xi (M^{\dagger} F(\xi))^* G(\xi). \end{aligned} \quad (2.77)$$

A Laplace operátorra a Gauss-tétel alkalmazásával belátható (a felületi integrálokat elhagyjuk vagy azért mert S -nek nincs határa, vagy azért, mert a végtelenben F ill. G eltűnik a négyzetesen integrálhatóság miatt)

$$\int_S d^2 \xi F^* \nabla (\nabla G) = - \int_S d^2 \xi (\nabla F)^* (\nabla G) = \int_S d^2 \xi (\Delta F)^* G \Rightarrow \Delta^{\dagger} = \Delta. \quad (2.78)$$

Laplace-egyenlet megoldása téglatesten felvett határfeltételekkel

Vegyünk egy a , b ill. c élhosszúságú téglatestet, és a felületeken rójunk ki $\Phi(\mathbf{x} \in \text{felület}) = V(\mathbf{x})$ Dirichlet határfeltételeket. Milyen lesz a potenciál a téglatest belsejében?

A megoldást hat potenciál összegeként adjuk meg, mindegyikre igaz, hogy öt lapon nulla, a hatodikon az ott érvényes V értékét veszi fel. Ezek közül itt egyet írunk fel, amely a felső lapon nem nulla: $\Phi(x, y, z = c) = V(x, y)$, a többi lapon nulla: $\Phi(x = 0, a) = \Phi(y = 0, b) = \Phi(z = 0) = 0$.

A feladathoz a Descartes koordináták illeszkednek jól; a \parallel koordináták most x és y , a \perp koordináta z . A Laplace felírható mint

$$\Delta = \Delta_{\parallel} + \Delta_{\perp}, \quad \Delta_{\parallel} = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad \Delta_{\perp} = \partial_z^2. \quad (2.79)$$

A megoldást keressük $\Phi(x, y, z) = \Phi_{\parallel}(x, y)\Phi_z(z)$ alakban:

$$\Delta\Phi = \Phi_z\Delta_{\parallel}\Phi_{\parallel} + \Phi_{\parallel}\Delta_z\Phi_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_{\parallel}\Phi_{\parallel}}{\Phi_{\parallel}} + \frac{\Delta_z\Phi_z}{\Phi_z} = 0. \quad (2.80)$$

Az első tag csak x, y -tól, a második csak z -tól függ, az összegük úgy lehet csak nulla, ha mindkettő konstans

$$\Delta_{\parallel}\Phi_{\parallel} = -\lambda^2\Phi_{\parallel}, \quad \frac{d^2\Phi_z}{dz^2} = \lambda^2\Phi_z. \quad (2.81)$$

Az első egyenlet megoldását keressük ismét $\Phi_{\parallel}(x, y) = \Phi_x(x)\Phi_y(y)$ alakban. A fenti gondolatmenettel

$$\frac{d^2\Phi_x}{dx^2} = -\alpha^2\Phi_x, \quad \frac{d^2\Phi_y}{dy^2} = -\beta^2\Phi_y, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2. \quad (2.82)$$

Ezen egyenletek megoldásai a harmonikus függvények

$$\Phi_x(x) \sim \sin(\alpha(x + x_0)), \quad \Phi_y(y) \sim \sin(\beta(y + y_0)), \quad \Phi_z(z) \sim \sinh(\lambda(z + z_0)). \quad (2.83)$$

A kielégítendő határfeltételek: $\Phi(x = 0, a) = \Phi(y = 0, b) = \Phi(z = 0) = 0$ miatt

$$\Phi_x(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \Phi_y(y) \sim \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad \Phi_z(z) \sim \sinh(\lambda_{nm}z), \quad \lambda_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}. \quad (2.84)$$

A teljes megoldás ezek tetszőleges együtthatóval vett összege

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{nm} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(\lambda_{nm}z). \quad (2.85)$$

Még ki kell elégítenünk a $z = c$ lapon felvett határfeltételeket

$$V(x, y) = \sum_{nm} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(\lambda_{nm}c). \quad (2.86)$$

Kihasználhatjuk a sajátfüggvények ortogonalitását, amely most úgy írható, hogy

$$\int_0^a dx \int_0^b dy \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right) = \frac{ab}{4} \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (2.87)$$

Ezzel

$$\frac{ab}{4} A_{nm} \sinh(\lambda_{nm}c) = \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \equiv V_{nm}. \quad (2.88)$$

Ezzel

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{nm} \frac{4V_{nm}}{ab \sinh(\lambda_{nm}c)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(\lambda_{nm}z). \quad (2.89)$$

2.2.4 Görbevonali koordináták

A másik kérdés, amit meg kell válaszolnunk, hogy hogyan néz ki a Laplace operátor görbevonali koordináták esetén? Ennél kissé általánosabban fogalmazzuk meg a kérdést, és a görbevonali koordinátarendszerekben érvényes analízis alapjait nézzük meg.

Görbevonali koordinátarendszerben a tér minden pontját paraméterezem három számmal. A korábbiaktól eltérően jelöljük ezeket a paramétereket ξ^i , $i = 1, 2, 3$ felső indexes mennyiségekkel, azaz $\mathbf{r}(\xi^i)$ a tér paraméterezése.

A görbevonali koordinátarendszerek egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy minden helyen mások a koordinátatengelyek. A koordináta-vonalak az $\mathbf{r}(\xi^j)|_{\xi^j \neq i}$ egy-paraméteres görbék. Adott ponton 3 ilyen görbe megy át, a görbék érintői jelölik ki a koordinátatengelyeket:

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi)}{\partial \xi^i}. \quad (2.90)$$

Ezen *lokális* bázisok minden pontban más irányba mutatnak. \mathbf{R}^n -ben kitüntetett a Descartes koordinátarendszertől, amely globális ortonormált koordinátákat használ: $\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i^{(0)}$. Ezekkel felírva

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_j^{(0)} \equiv J_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j^{(0)}. \quad (2.91)$$

Ha áttérünk ξ -k szerinti integrálra, akkor ennek a mátrixnak a determinánsa jön be, amit index nélküli J -nek nevezünk

$$\int d^3 \mathbf{x} = \int d^3 \xi J. \quad (2.92)$$

J -nek bázis-invariáns jelentése is van: ez adja meg a bázisvektorok által kijelölt térfogategységet

$$J = [\mathbf{e}_1(\mathbf{x}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{x})] \mathbf{e}_3(\mathbf{x}), \quad (2.93)$$

A továbbiakban elhagyjuk a \mathbf{x} hely jelölését.

A (lokális) bázisvektorok általában nem normáltak, és nem merőlegesek egymásra. Ekkor érdemes bevezetni a *duális* bázist \mathbf{e}^i jelöléssel, hogy

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \delta_{ij}. \quad (2.94)$$

Vektormező kifejehető mindkét bázisban

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}^i \quad \Rightarrow \quad v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (2.95)$$

A felső indexes mennyiségeket szokás kontravariáns, az alsó indexeseket kovariáns komponenseknek nevezni. A felső és alsó indexek összeállításánál szummázást értünk. Hangsúlyozzuk, hogy \mathbf{v} egy koordinátarendszertől független mennyiség, a v^i koordináták azonban, természetesen, koordinátarendszer-függők.

Kifejezhető természetesen az egyik bázis is a másik segítségével

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \quad g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \quad (2.96)$$

g neve metrikus tenzor. A Descartes-bázissal kifejezve

$$g_{ij} = J_{ik} \mathbf{e}_k^{(0)} \cdot J_{j\ell} \mathbf{e}_\ell^{(0)} = J_{ik} J_{jk}. \quad (2.97)$$

Mivel

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} g^{jk} \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k, \quad (2.98)$$

a két mátrix egymás inverze. Két vektor skaláris szorzata:

$$\mathbf{u} \mathbf{v} = u^i \mathbf{e}_i v^j \mathbf{e}_j = u^i v^j g_{ij}, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{u} \mathbf{v} = u_i \mathbf{e}^i v_j \mathbf{e}^j = u_i v_j g^{ij}. \quad (2.99)$$

A vektoriális szorzat kifejezése

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_k = a^i b^j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = J \varepsilon_{ijk} a^i b^j. \quad (2.100)$$

Deriválások a görbevonali koordináták szerint: mennyit változik egy skalármező értéke, ha \mathbf{x} -ből $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ pontba megyek át? Koordinátázva a teret $\xi^i \rightarrow \xi^i + \delta \xi^i$ eltolást nézünk:

$$\delta \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\xi + \delta \xi) - \Phi(\xi) = \delta \xi^i \frac{\delta \Phi}{\delta \xi^i} = \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i \frac{\delta \Phi}{\delta \xi^i}. \quad (2.101)$$

Mivel a bal oldalon egy koordinátarendszer független mennyiség áll, és $\delta \mathbf{x}$ is koordinátarendszer-független mennyiség, ezért

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \mathbf{e}^i \frac{\delta \Phi}{\delta \xi^i} \quad \Rightarrow \quad \nabla_i \Phi = \partial_i \Phi, \quad \nabla^i \Phi = g^{ij} \partial_j \Phi \quad (2.102)$$

is koordinátázás-független, fizikai mennyiség – ez a gradiens.

Ha vektormezőt megváltozását nézem, akkor figyelembe kell venni a bázisok megváltozását is!

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E^i \mathbf{e}_i)(\xi + \delta \xi) - (E^i \mathbf{e}_i)(\xi) = \delta \xi^j \left[\frac{\partial E^i}{\partial \xi^j} \mathbf{e}_i + E^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^j} \right] = \delta \mathbf{x} \left[\frac{\partial E^i}{\partial \xi^j} \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i + E^i \mathbf{e}^j \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^j} \right]. \quad (2.103)$$

Szokás a bázisvektor deriváltját, amely egy vektormező, kifejezni koordináták szerint:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = \mathbf{e}^k \partial_i \mathbf{e}_j, \quad (2.104)$$

Γ -k a Christoffel szimbólumok. Mivel

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (2.105)$$

Ismét a gradiensnél látott érveléssel: a bal oldal koordinátarendszer-független, $\delta \mathbf{x}$ szintén az, ezért a vektormező deriváltmátrixa is koordinátarendszer-független.

$$\nabla \otimes \mathbf{E} = \left[\frac{\partial E^k}{\partial \xi^j} + E^i \Gamma_{ij}^k \right] \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \equiv \nabla_j E^k \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad (\nabla_i E)^k = \partial_i E^k + \Gamma_{ij}^k E^j \quad (2.106)$$

Fontos megjegyezni, hogy a zárójeles kifejezés egyik tagja sem alkot koordinátarendszer-független mennyiséget, vagyis a parciális deriválás önmagában semmit nem fejez ki. Az igazi fizikai deriválás ∇ kovariáns derivált.

Megjegyzések a kovariáns deriváltról, illetve Christoffel szimbólumokról:

- a definiáló (2.104) képlet alapján

$$\mathbf{e}_i(\xi + d\xi) = \mathbf{e}_i(\xi) + \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k d\xi^j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_i(\xi + d\xi) = \mathbf{e}_i(\xi) + \mathbf{\Gamma}_i d\mathbf{x}. \quad (2.107)$$

Vagyis $\mathbf{\Gamma}$ mint mátrix megadja, hogyan változik a koordinátarendszer ha egy kicsit beljebb megyünk. Más szóval megadja a koordinátarendszerek kapcsolatát – ezért szokták $\mathbf{\Gamma}$ -t *konexió*-nak is nevezni. Mivel a koordinátarendszerek kapcsolatát adja meg, definíciója koordinátarendszer-független!

- $\mathbf{\Gamma}$ mátrix komponensei $(\Gamma_i)_j^k = \Gamma_{ij}^k$; ekkor a kovariáns deriváltat úgy is írhatjuk, hogy $\nabla_i = \partial_i + \mathbf{\Gamma}_i$.
- párhuzamos eltolás: ha adott \mathbf{x} pontban egy \mathbf{E} vektor, és $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ helyre párhuzamosan eltolom, akkor az ottani koordinátarendszerben a komponensei nem ugyanazok, mint az eredeti komponensek. A komponensek változásához a fizikai \mathbf{E} változatlanóságát használhatjuk ki: $d\mathbf{E} = 0$, azaz

$$dE^i \mathbf{e}_i + \Gamma_{ij}^k E^i d\xi^j \mathbf{e}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad dE^i = \Gamma_{ij}^k E^i d\xi^j. \quad (2.108)$$

- Többindexes mennyiségek kovariáns deriváltjainak számításakor felhasználható, hogy $A^i B^j \dots$ többindexes mennyiség, és ∇ deriválás, vagyis a láncszabály alkalmazható. Így pl.

$$(\nabla_i AB)^{jk} = (\nabla_i A)^j B^k + A^j (\nabla_i B)^k = \partial_i (A^j B^k) + \Gamma_{i\ell}^j A^\ell B^k + \Gamma_{i\ell}^k A^j B^\ell \quad \Rightarrow \quad (\nabla_i T)^{jk} = \partial_i T^{jk} + \Gamma_{i\ell}^j T^{\ell k} + \Gamma_{i\ell}^k T^{j\ell}. \quad (2.109)$$

- Kovariáns vektormező kovariáns deriváltjának számításakor felhasználhatjuk, hogy $E_j A^j$ skalármező tetszőleges A^j esetén, ezért:

$$(\nabla_i E)_j = \partial_i E_j - \Gamma_{ij}^k E_k = (\delta_j^k \partial_i - \Gamma_{ij}^k) E_k. \quad (2.110)$$

- A metrikus tenzor deriváltja

$$\partial_i g_{jk} = \partial_i (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) = \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k} + \Gamma_{ik}^\ell g_{\ell j} \quad \Rightarrow \quad \nabla_i g_{jk} = 0. \quad (2.111)$$

Ez biztosítja, hogy a kovariáns deriválás indexeit is g -vel lehet fel-le húzni.

- A fenti egyenletet mindhárom lehetséges indexkombinációval felírva

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}). \quad (2.112)$$

A vektormező deriváltjának trace-e az \mathbf{E} divergenciája, skalármező

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \mathbf{E} = \partial_j E^j + \Gamma_{ij}^j E^i. \quad (2.113)$$

Hogy a fenti kifejezést leegyszerűsítsük, vegyük a J deriváltját:

$$\partial_i J = \partial_i \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \Gamma_{1i}^1 \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) + \dots = \Gamma_{ji}^j J \Rightarrow \Gamma_{ij}^j = \frac{\partial_i J}{J}. \quad (2.114)$$

Ezzel

$$\nabla \mathbf{E} = \partial_i E^i + \frac{\partial_i J}{J} E^i = \frac{1}{J} \partial_i (J E^i). \quad (2.115)$$

Descartes-koordinátákból indulva (2.97) alapján $\det g = J^2$. Ilyen módon

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \Phi). \quad (2.116)$$

Különösen egyszerű kifejezéseket kaphatunk, ha az új bázis is ortogonális, azaz

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = h_i^2 \delta_{ij} = g_{ij} \Rightarrow g^{ij} = \frac{1}{h_i^2} \delta_{ij}, \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3. \quad (2.117)$$

Ekkor

$$\Delta \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}. \quad (2.118)$$

Az integrálási mérték

$$\int d^3 \mathbf{x} = \int d^3 \xi h_1 h_2 h_3. \quad (2.119)$$

Vektormező komponenseinél szokták *normálni* a bázisvektorokat, vagyis bevezetik a

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{E} = E^i \mathbf{e}_i = \hat{E}_i \hat{\mathbf{e}}_i \Rightarrow E^i = \frac{1}{h_i} \hat{E}_i, \quad E_i = h_i \hat{E}_i, \quad (2.120)$$

ekkor nincs különbség a felső és alsó indexek között. A gradiens komponensei, illetve a divergencia kifejezése ekkor

$$\nabla_i \Phi = \frac{1}{h_i} \partial_i \Phi, \quad \nabla \mathbf{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \partial_i \frac{h_1 h_2 h_3 \hat{E}_i}{h_i}, \quad (2.121)$$

a Laplace kifejezése ugyanaz.

Még néhány formula: $\nabla \otimes \mathbf{E}$ antiszimmetrikus része

$$(\nabla_i E_j - \nabla_j E_i) \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i = \nabla_i E_j (\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i - \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = \frac{1}{J} \nabla_i E_j \varepsilon^{ijk} \mathbf{e}_k \times \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{J} \varepsilon^{ijk} \nabla_i E_j \mathbf{e}_k. \quad (2.122)$$

Γ alsó indexeinek szimmetriája miatt

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{J} \varepsilon^{ijk} \partial_i E_j \mathbf{e}_k \rightarrow \varepsilon^{ijk} \frac{h_k}{J} \partial_i (h_j \hat{E}_j) \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (2.123)$$

ahol a jobb oldal ortogonális koordinátarendszerekben érvényes.

2.2.5 Gömbi koordinátarendszer

A gömbi koordinátákra a következő transzformációval térünk át

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi), \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ x = r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \mathbf{e}_\theta = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) \\ \mathbf{e}_\varphi = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{cases}. \quad (2.124)$$

Szokás $(\theta, \varphi) = \Omega$ jelölést is alkalmazni (térzőg). A koordinátatengelyek egymásra merőlegesek, ezért a megfelelő h mennyiségek

$$h_r = \sqrt{\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r} = 1, \quad h_\theta = \sqrt{\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta} = r, \quad h_\varphi = \sqrt{\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi} = r \sin \theta. \quad (2.125)$$

Ezért az integrálási mérték, a határokat is feltüntetve

$$\int d^3 \mathbf{x} = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta = \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad x = \cos \theta. \quad (2.126)$$

A Laplace operátor

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (2.127)$$

Az első tag írható más alakban is

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Phi). \quad (2.128)$$

A gömbi koordinátarendszer jól illeszkedik gömbfelületeken vagy kúpfelületeken adott határfeltételekhez.

A Laplace-egyenletet rendezzük át a korábbi formuláknak megfelelően. Érdeemes megszorozni az egyenletet r^2 -tel

$$r^2 \Delta \Phi = 0 = r^2 \Delta_r \Phi + \Delta_\Omega \Phi, \quad \Delta_r \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad \Delta_\Omega \Phi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (2.129)$$

Keressük a megoldást $\Phi(r, \Omega) = R(r)Y(\Omega)$ alakban. A fenti egyenletet osztva Φ -vel

$$\frac{r^2 \Delta \Phi}{\Phi} = 0 = \frac{r^2 \Delta_r R}{R} + \frac{\Delta_\Omega Y}{Y} \Rightarrow r^2 \Delta_r R = \ell(\ell + 1)R, \quad \Delta_\Omega Y = -\ell(\ell + 1)Y, \quad (2.130)$$

hiszen az első tag csak r -től, a második csak Ω -tól függ. A sajátértéket most $\lambda = \ell(\ell + 1)$ alakban írtuk a későbbi kényelem kedvéért.

A radiális egyenlet

A radiális egyenlet kiírva

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rR) = \ell(\ell + 1)R. \quad (2.131)$$

Megoldását keressük $R(r) = r^a$ alakban

$$a(a + 1) = \ell(\ell + 1) \Rightarrow a = \ell, \quad \text{vagy} \quad a = -(\ell + 1). \quad (2.132)$$

Mivel másodrendű az egyenlet, valóban két lineárisan független megoldást vártunk.

A térszőgfüggő rész

A térszőgtől függő részt szorozzuk meg $\sin^2 \theta$ -val:

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\ell(\ell + 1) \sin^2 \theta Y. \quad (2.133)$$

Keressük a megoldást itt is szorzat alakban $Y(\theta, \varphi) = P(\theta)\Psi(\varphi)$. A fenti egyenletet osszuk el Y -nal, és rendezzük át

$$\left[\frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \ell(\ell + 1) \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = -m^2 \Psi \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P = 0, \end{cases} \quad (2.134)$$

hiszen az első tag csak θ -tól, a második csak φ -tól függ.

A Ψ -ra vonatkozó egyenletet jól ismerjük, megoldásai

$$\Psi(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad \text{vagy} \quad \Psi(\varphi) = e^{-im\varphi}. \quad (2.135)$$

Másodrendű egyenlet lévén, itt is két lineárisan független megoldást kaptunk.

A P -re vonatkozó egyenlet nem a szokásos. Hogy a trigonometrikus függvényektől megszabaduljunk, vezessük be új változót

$$x = \cos \theta, \quad \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0. \quad (2.136)$$

Ezt *általánosított (vagy asszociált) Legendre egyenletként* ismeri a matematikai irodalom (lásd pl.

<http://mathworld.wolfram.com/LegendreDifferentialEquation.html>). Két lineárisan független megoldást várunk, jelöljük őket P_ℓ^m és Q_ℓ^m -el (első ill. másodfajú Legendre-függvények). Vizsgáljuk meg ezeket a megoldásokat előbb speciális eseten:

$m = \ell = 0$ eset Ekkor

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{C_2}{1-x^2} \Rightarrow P(x) = C_1 + \frac{C_2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad (2.137)$$

A két megoldást azonosítjuk $P_0^0 = 1$ és $Q_0^0 = \ln \frac{1+x}{1-x}$. A második megoldás $x = \pm 1$ -nél, azaz $\theta = 0, \pi$ -nél divergál. Ha tehát ez a pont benne van az értelmezési tartományban, akkor Q_0^0 nem vehet részt a kifejtésben – hasonlóan ahhoz, hogy $f(0) = 0$ függvények trigonometrikus függvényekkel való kifejtésében csak a sin-ok szerepelhetnek, a cos-ok nem.

$m = 0, \ell \neq 0$ eset Ekkor amit kapunk

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \ell(\ell+1)P = 0 \quad (2.138)$$

Legendre egyenlet. Ennek megoldásairól a következőket lehet tudni

(l. pl. http://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials

<http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html>).

- Általános ℓ esetén a két megoldás, $P_\ell(x)$ és $Q_\ell(x)$ közül az egyik $x = 1$ -nél ($\theta = \pi$ -nél), a másik $x = -1$ -nél ($\theta = 0$ -nál) divergál.
- Ha ℓ egész, akkor az egyik megoldás, $P_\ell(x)$, ℓ -edfokú polinom, vagy páros vagy páratlan hatványokat tartalmaz, ezért $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$; míg $Q_\ell(x)$ divergál $x = \pm 1$ -nél (l. az $\ell = 0$ esetet). A szokásos normálás $P_\ell(1) = 1$. Ekkor az általános alak megadható a Rodrigues-formulával

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \Rightarrow \begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{cases} \quad (2.139)$$

- Az ortogonalitási és teljességi relációjuk:

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}, \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} P_\ell(x) P_\ell(x') = \delta(x-x'). \quad (2.140)$$

- A Legendre polinomok generátorfüggvénye

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(x). \quad (2.141)$$

Ennek bizonyítása: Vizsgáljuk $1/|\mathbf{y} - \mathbf{e}_z|$ kifejezést abban az esetben, ha $t = |\mathbf{y}| < 1$. Gömbi koordinátarendszerben kifejezve

$$\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{e}_z|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 - 2t\mathbf{y}\mathbf{e}_z}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 - 2t\cos\theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(t)P_{\ell}(\cos\theta), \quad (2.142)$$

hiszen P_{ℓ} -ek bázist alkotnak a $[-1, 1]$ tartományban értelmezett (négyzetesen integrálható) függvények terében. Másrészt a Laplace operátort alkalmazva

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{e}_z|} = -4\pi\delta(\mathbf{y} - \mathbf{e}_z) = 0, \quad (2.143)$$

hiszen $|\mathbf{y}| < |\mathbf{e}_z|$. Emiatt $f_{\ell}(t) \sim t^{\ell}$ vagy $t^{-\ell-1}$. Mivel ez utóbbi nem reguláris a $t = 0$ -ban, marad az első. Tehát

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 - 2tx}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell}t^{\ell}P_{\ell}(x). \quad (2.144)$$

A c_{ℓ} együtthatókat az $x = 1$ eset vizsgálatával kapjuk. Ekkor ugyanis $P_{\ell}(1) = 1$ miatt

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell}t^{\ell} \Rightarrow c_{\ell} = 1. \quad (2.145)$$

Ez a formula fontos lesz a multipol-kifejtésnél, hiszen

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}} = \frac{1}{r_{>}} \frac{1}{\sqrt{1 + (r_{<}/r_{>})^2 - 2(r_{<}/r_{>})\cos\theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos\theta), \quad (2.146)$$

ahol $r_{<} = \min(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)$ és $r_{>} = \max(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)$.

Általános eset Ekkor meg kell oldani

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0. \quad (2.147)$$

Ennek megoldásaira hasonlók mondhatók mint az előbb

- Általános ℓ, m esetén a két megoldás, $P_{\ell}^m(x)$ és $Q_{\ell}^m(x)$ közül az egyik $x = 1$ -nél ($\theta = \pi$ -nél), a másik $x = -1$ -nél ($\theta = 0$ -nál) divergál.
- Ha ℓ, m egész és $-\ell \leq m \leq \ell$, akkor az egyik megoldás, $P_{\ell}^m(x)$ reguláris a teljes $x \in [-1, 1]$ tartományban, és megadható, mint

$$P_{\ell}^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_{\ell}(x). \quad (2.148)$$

Ekkor a másik megoldás, $Q_{\ell}^m(x)$ divergál $x = \pm 1$ -nél.

- Negatív m -ekre

$$P_{\ell}^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(x). \quad (2.149)$$

- Ortogonalitási reláció:

$$\int_{-1}^1 dx P_{\ell}^m(x) P_{\ell'}^m(x) = \frac{2(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}, \quad \int_{-1}^1 dx \frac{P_{\ell}^m(x) P_{\ell'}^{m'}(x)}{1-x^2} = \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!} \delta_{mm'}. \quad (2.150)$$

Gömbfüggvények

A teljes térszögfüggő részben a reguláris (elsőrendű) Legendre függvényekből kapjuk a *gömbfüggvényeket* (l. http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics); a szokásos normálással

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (2.151)$$

Ekkor igaz

$$Y_{\ell, -m} = (-1)^m Y_{\ell m}^*, \quad \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\Omega) Y_{\ell' m'}(\Omega) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta', \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\theta - \cos\theta'). \quad (2.152)$$

Az első néhány gömbfüggvény

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{10} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta, & Y_{11} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \\ Y_{20} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3\cos^2\theta - 1), & Y_{21} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi}, & Y_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi}. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Gömbfelületen négyzetesen integrálható függvények kifejtethetők $Y_{\ell m}$ szerint:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad f_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi). \quad (2.154)$$

Ha a kifejtendő függvény nem függ φ -től, akkor az ortogonalitás miatt csak $m = 0$ jön szóba.

Gömbfüggvények és forgatások A gömbfüggvények fontos szerepet játszanak a forgatások vizsgálatában is. Ehhez végezzünk el egy ortogonális transzformációt a vektorokon: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ -re $\mathbf{x}' = \mathbf{O}\mathbf{x}$, ahol $\mathbf{O}^T \mathbf{O} = \mathbf{1}$. Ekkor $\mathbf{x}'^2 = (\mathbf{O}\mathbf{x})(\mathbf{O}\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{O}^T \mathbf{O}\mathbf{x} = \mathbf{x}^2$, vagyis a hossz invariánsan marad. \mathbf{O} tehát forgatást ír le.

A Laplace operátor $\Delta = \nabla \nabla$, azaz a ∇ "négyzete", ezért invariáns. Gömbi koordinátarendszerben felírva a radiális rész szintén invariáns (hiszen a vektorok hossza nem változik). Emiatt a térszögfüggő Laplace operátor is invariáns.

Nézzük most a gömbfüggvényeket. Mivel egy \mathbf{n} egységvektor gömbi koordinátái ($r = 1, \theta, \varphi$), ezért a (θ, φ) argumentumokat helyettesíthetjük az \mathbf{n} megadásával: így pl. $Y_{\ell m}(\mathbf{n})$. Elforgatva a koordinátarendszert $Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n})$ függvényt kapjuk. Miután azonban Δ_{Ω} invariáns a forgatásra, ezért igaz lesz

$$\Delta_{\Omega} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \quad \Rightarrow \quad \Delta_{\Omega} Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n}) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n}). \quad (2.155)$$

Ezért $Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n})$ az $\ell(\ell+1)$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvénye Δ_{Ω} -nak. Következésképpen benne van az ezen sajátértékhez tartozó sajátaltérben, így kifejezhető az ehhez a sajátértékhez tartozó sajátfüggvények összegéent:

$$Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n}) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D_{mm'}(\mathbf{O}) Y_{\ell m'}(\mathbf{n}), \quad (2.156)$$

ahol az együtthatók függenek a forgatás mátrixától. Mivel két forgatás egymásutánját nézve $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_3$ szintén forgatáshoz jutunk, a fenti formulába beírva $\sum_n D_{mn}(\mathbf{O}_1) D_{nm'}(\mathbf{O}_2) = D_{mm'}(\mathbf{O}_3)$ kifejezést kapjuk. Az $Y_{\ell m}$ függvények normáltsága miatt (l. (2.152) második egyenlete), valamint a $d\Omega$ integrálási mérték forgásinvarianciája miatt igaz az is, hogy $\sum_n D_{nm}^*(\mathbf{O}) D_{nm'}(\mathbf{O}) = \delta_{mm'}$. A fentieket úgy foglalhatjuk össze, hogy a forgások *ábrázolódnak* az adott ℓ -hez tartozó gömbfüggvények terén.

Ezeket a gondolatokat sokféleképpen hasznosíthatjuk. Egyik alkalmazás a következő tétel:

Kifejtési tétel ha adott \mathbf{n} illetve \mathbf{n}' két egységvektor, akkor

$$P_\ell(\mathbf{n}'\mathbf{n}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}')Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \quad (2.157)$$

A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy $\theta = 0$ -nál, vagyis $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ esetén (2.151) miatt $Y_{\ell m}(\mathbf{e}_z) = \delta_{m0}\sqrt{(2\ell+1)/(4\pi)}$. Ezért

$$Y_{\ell m}(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{e}_z) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D_{mm'}(\mathbf{O}^{-1})Y_{\ell m'}(\mathbf{e}_z) = D_{m0}(\mathbf{O}^{-1})\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} = D_{0m}^*(\mathbf{O})\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}. \quad (2.158)$$

Másrészt ha $m = 0$ -ra nézzük, akkor $Y_{\ell 0}(\mathbf{n}) = \sqrt{(2\ell+1)/(4\pi)}P_\ell(\mathbf{e}_z\mathbf{n})$, hiszen az argumentum $\mathbf{e}_z\mathbf{n} = \cos\theta$. Emiatt

$$P_\ell(\mathbf{e}_z\mathbf{O}\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}Y_{\ell 0}(\mathbf{O}\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sum_m D_{0m}(\mathbf{O})Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = \frac{2\ell+1}{4\pi} \sum_m Y_{\ell m}^*(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{e}_z)Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \quad (2.159)$$

Mivel minden \mathbf{n}' vektorhoz létezik olyan forgatás, amely őt a z -tengelybe viszi át, ezért $\exists \mathbf{O}$, hogy $\mathbf{n}' = \mathbf{O}^{-1}\mathbf{e}_z$. Ezzel a fenti képlet a bizonyítandó állítást adja.

A Laplace egyenlet megoldásai

A teljes kifejtéshez használandó alak:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\nu, m} \left(A_{\nu, m} r^\nu P_\nu^m(\cos\theta) e^{im\varphi} + \frac{B_{\nu, m}}{r^{\nu+1}} P_\nu^m(\cos\theta) e^{im\varphi} + C_{\nu, m} r^\nu Q_\nu^m(\cos\theta) e^{im\varphi} + \frac{D_{\nu, m}}{r^{\nu+1}} Q_\nu^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \right). \quad (2.160)$$

Speciális esetekben:

- Ha $\varphi \in [0, 2\pi]$, akkor $\Phi(r, \theta, \varphi) = \Phi(r, \theta, \varphi + 2\pi)$ miatt $m \in \mathbf{Z}$ egész szám. Ha a határfeltételek nem függenek φ -től (hengerszimmetria), akkor $m = 0$.
- Ha a $\theta = 0$, azaz a z tengely benne van az értelmezési tartományban, akkor csak a P_ν^m függvények használandók.
- Ha a megoldás a teljes 4π térszögben értelmezett, akkor $\ell \in \mathbf{N}$ és $-\ell \leq m \leq \ell$, vagyis a gömbfüggvényeket kell használnunk

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell m} r^\ell + \frac{B_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (2.161)$$

Az $A_{\ell m}$ illetve $B_{\ell m}$ együtthatókat a határfeltételek szabják meg.

- Legspeciálisabb esetben ha a megoldás a teljes 4π térszögben értelmezett, és a határfeltételek nem függenek φ -től (hengerszimmetria):

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta). \quad (2.162)$$

Ekkor az A_ℓ illetve B_ℓ együtthatók meghatározásához elég a potenciál ismerete a $\cos\theta = 1$ mellett, azaz a z tengelyen, ekkor ugyanis $P_\ell(1) = 1$.

Feladat: A már látott: \mathbf{E}_0 térerősségbe helyezett, földelt, R sugarú fémgömb tere.

Megoldás: Itt a teljes 4π tartományban értelmezett a megoldás, azaz a gömbfüggvények szerinti kifejtést kell választanunk.

Válasszuk a z tengelyt az \mathbf{E}_0 irányának, akkor a feladat φ -független, és így kifejthető a Legendre-polinomok szerint, l. (2.162). Az $r \rightarrow \infty$ limeszben csak a pozitív együtthatók maradnak, ott adott a potenciál értéke:

$$\Phi(r \rightarrow \infty, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -E_0 \\ A_{\ell \neq 1} = 0 \end{cases} \quad (2.163)$$

A gömbfelületen a potenciál nulla

$$\Phi(r = R, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} R^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{\ell} = -A_{\ell} R^{2\ell+1} = \begin{cases} B_1 = -E_0 R^3 \\ B_{\ell \neq 1} = 0 \end{cases} \quad (2.164)$$

Végülis kapjuk

$$\Phi = -E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) r \cos \theta = -E_0 \mathbf{x} \left(1 - \frac{R^3}{|\mathbf{x}|^3} \right), \quad (2.165)$$

ahogyan korábban már láttuk (vö. (2.66)).

Feladat: Egy Θ nyílásszögű kúp felületén $\Phi = 0$. Milyen a tér a kúp belsejében, a csúcs közelében, ha a kúpot lezáró gömbfelületen a potenciál forgásszimmetrikus?

Megoldás: Itt *nem* a teljes 4π tartományban értelmezett a megoldás, viszont a $\theta = 0$ benne van az értelmezési tartományban, és a megoldás nem függ φ -től. Ezenfelül a potenciál véges az $r \rightarrow 0$ esetben. Így a kifejtés:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\nu} A_{\nu} r^{\nu} P_{\nu}(\cos \theta). \quad (2.166)$$

A lehetséges ν értékeket az szorítja meg, hogy a potenciál nulla $\theta = \Theta$ esetben:

$$P_{\nu}(\cos \Theta) = 0. \quad (2.167)$$

Egy adott Θ -ra a $P_{\nu}(\cos \Theta)$ oszcilláló függvénye ν -nek, l. Fig. 2.1. A $P_{\nu}(x)$ függvények teljes rendszert alkotnak,

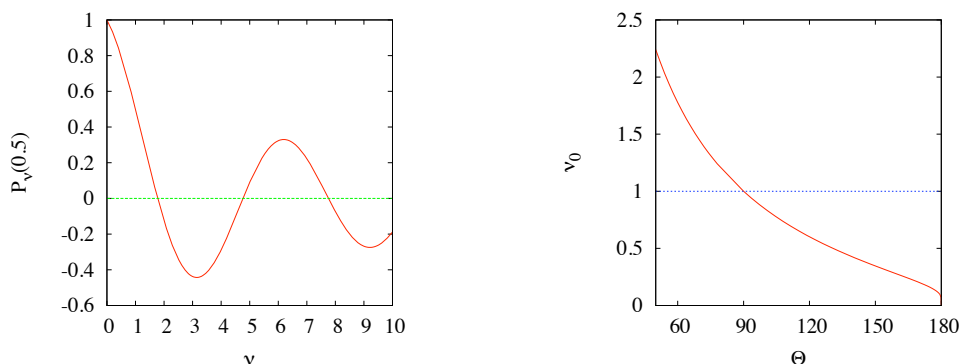


Figure 2.1: Legendre függvény

azaz kifejthető $r = R$ mellett adott (φ -független) határfeltétel.

Ha egyre közelebb megyünk a csúcshoz, akkor egyre jobban a legkisebb lehetséges ν érték dominál

$$\Phi(r \rightarrow 0, \theta) \sim r^{\nu_0} P_{\nu_0}(\cos \theta). \quad (2.168)$$

A ν_0 legkisebb nullhely függése $\cos \Theta$ -tól a 2.1 ábrán látható. Jellemzők

- Ha $\Theta \rightarrow 0$, akkor $\cos \Theta \rightarrow 1$, viszont $P_{\nu}(1) = 1$, azaz egyre nagyobb ν kell a nullhelyhez, így $\nu_0 \rightarrow \infty$.
- Ha $\Theta < \pi/2$, azaz bemélyedés, akkor $\nu_0 > 1$.
- Ha $\Theta = \pi/2$, akkor a kúp síkklapba megy át, ennek közelében $\Phi \sim z = r \cos \theta$, azaz $\nu_0 = 1$ -et várunk; mivel $P_1(x) = x$, ezért valóban $\nu_0 = 1$.
- Ha $\Theta > \pi/2$, azaz csúcs, akkor $\nu_0 < 1$.

A felületre merőleges elektromos tér nagysága

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sim r^{\nu_0-1} \sin \theta P'_{\nu_0}(\cos \theta) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (2.169)$$

Ez azt jelenti, hogy $\Theta > \pi/2$ esetén, vagyis csúcs esetén, a felülethez közeledve a térerősség végtelenhez tart \Rightarrow csúcs hatás

Villámhárító: levegőben a maximális elektromos tér $E_{\max} \approx 10^6 - 10^7$ V/m. Efelett már ionok képződnek, gyorsulva lavinát gerjesztenek: ez a villám. Csúcsos felületnél nagyobb a térerő, több az ion, ezért oda fog becsapni a villám.

2.2.6 Hengerkoordináták

A hengerkoordináták definíciója

$$(x, y, z) \rightarrow (\varrho, \varphi, z), \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_\varrho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \\ \mathbf{e}_\varphi = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0) \\ \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \end{cases} \quad (2.170)$$

Emiatt

$$h_\varrho = 1, \quad h_\varphi = \varrho, \quad h_z = 1 \Rightarrow \int d^3 \mathbf{x} = \int_0^\infty d\varrho \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^\infty dz. \quad (2.171)$$

A Laplace egyenlet alakja

$$0 = \Delta \Phi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (2.172)$$

Az egyenlet mindhárom változójában szétválasztható, vagyis a megoldás kereshető $\Phi(\varrho, \varphi, z) = R(\varrho)\Psi(\varphi)Z(z)$ alakban. Ezt alkalmazva, és elosztva Φ -vel:

$$0 = \Delta \Phi = \frac{1}{\varrho R} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (2.173)$$

Viszont választhatunk, melyik koordinátát tekintjük "merőlegesnek". Egyik lehetőség, hogy $\xi_{\parallel} = (\varrho, \varphi)$, $\xi_{\perp} = z$. Ekkor

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z \Rightarrow Z = e^{kz}, \quad \text{vagy} \quad e^{-kz}, \quad (2.174)$$

valamint

$$\frac{1}{\varrho R} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = -k^2. \quad (2.175)$$

Ezt megszorozva ϱ^2 -tel

$$\left[\frac{\varrho}{R} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) + k^2 \varrho^2 \right] + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = -m^2 \Psi \\ \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) R = 0. \end{cases} \quad (2.176)$$

Az első egyenlet megoldása

$$\Psi = e^{im\varphi}, \quad \text{vagy} \quad e^{-im\varphi}. \quad (2.177)$$

Ha az értelmezési tartomány $\varphi \in [0, 2\pi]$, akkor a megoldás periodikus kell legyen 2π szerint, ezért $m \in \mathbf{N}$ egész.

A második egyenlet megoldásához új változó $x = k\varrho$, ekkor

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (2.178)$$

Ez a Bessel-egyenlet, megoldásai a Bessel-függvények. Másodfokú egyenlet lévén, két független megoldást várunk.

- Elsőfajú Bessel-függvények $J_m(x)$. Hatványsor reprezentációja

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad (2.179)$$

ahol Γ a Gamma-függvény:

$$\Gamma(n \in \mathbf{N}) = (n-1)!, \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (2.180)$$

Másik, gyakran használt reprezentáció

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\tau \cos(n\tau - x \sin \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau e^{i(n\tau - x \sin \tau)}. \quad (2.181)$$

- Ha m nem egész, akkor $J_m(x)$ és $J_{-m}(x)$ lineárisan függetlenek. Ha m egész, akkor $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, vagyis keresni kell egy ettől lineárisan független megoldást:

$$N_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi} \quad (2.182)$$

másodfajú Bessel függvény vagy Neumann-függvény. Néha ezek kombinációját használják:

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x), \quad H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x), \quad (2.183)$$

harmadfajú Bessel függvények vagy Henkel-függvények.

- Határesetek:

$$\begin{aligned} x \ll 1 \quad J_m(x) &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m, & N_m(x) &= -\frac{\Gamma(m)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m \quad \text{ill.} \quad \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2} \quad (m=0) \\ x \gg 1 \quad J_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), & N_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.184)$$

A második alakból látszik, hogy végtelen sok gyök van.

- Az elsőfajú Bessel-függvények bázist alkotnak a négyzetesen integrálható függvények terén.

Ortogonalitási relációk: a $0 \leq \varrho \leq a$ esetben

$$\int_0^a d\varrho \varrho J_m(\alpha_{mi} \frac{\varrho}{a}) J_m(\alpha_{mj} \frac{\varrho}{a}) = \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(\alpha_{mi})]^2 \delta_{ij}, \quad (2.185)$$

ahol fix m -re $J_m(\alpha_{mi}) = 0 \forall i$. A fenti kifejezés arra használható, hogy ha $\varrho = a$ -nál nulla a potenciál, akkor az ezt kielégítő Bessel-függvények szerint kell kifejtenuünk.

A $0 \leq \varrho \leq \infty$ esetben

$$\int_0^{\infty} d\varrho \varrho J_m(k\varrho) J_m(k'\varrho) = \frac{1}{k} \delta(k - k'). \quad (2.186)$$

A Laplace egyenlet megoldásai ezek szerint

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = \sum_{km} [(A_{mk} J_m(k\varrho) + B_{mk} N_m(k\varrho)) e^{kz} e^{im\varphi} + \{k \rightarrow -k\} + \{m \rightarrow -m\} + \{k \rightarrow -k, m \rightarrow -m\}]. \quad (2.187)$$

A lehetséges k és m értékeket a határfeltételek állítják be.

Feladat: Adott egy h magasságú R sugarú henger, melynek oldalán és az alaplajján $\Phi = 0$, a tetején $\Phi(\varrho, \varphi, z = h) = V(\varrho, \varphi)$. Milyen a potenciál a henger belsejében?

Megoldás: Mivel a feladat a teljes $\varphi \in [0, 2\pi]$ tartományban értelmes, ezért m egész. Másrészt a potenciál reguláris a $\varrho \rightarrow 0$ esetben, ezért N_m együtthatója nulla. A potenciálnak nullának kell lennie $\varrho = R$ esetben, valamint $z = 0$ esetben. A kifejtés ezek szerint

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sinh(k_{mi}z) J_m(k_{mi}\varrho) (A_{mi} \sin m\varphi + B_{mi} \cos m\varphi), \quad k_{mi}R = \alpha_{mi}. \quad (2.188)$$

$z = h$ -nál a potenciál $V(\varrho, \varphi)$, azaz

$$V(\varrho, \varphi, z) = \sum_{mi} \sinh(k_{mi}h) J_m(k_{mi}\varrho) (A_{mi} \sin m\varphi + B_{mi} \cos m\varphi) \quad (2.189)$$

Az együtthatók, kihasználva még, hogy

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \sin m\varphi \sin n\varphi = \pi \delta_{nm}, \dots \quad (2.190)$$

a következőknek adódnak:

$$A_{mi} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mi}) \sinh(k_{mi}h)} \int_0^a d\varrho \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi V(\varrho, \varphi) J_m(k_{mi}\varrho) \sin m\varphi, \quad (2.191)$$

$$B_{mi} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mi}) \sinh(k_{mi}h)} \int_0^a d\varrho \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi V(\varrho, \varphi) J_m(k_{mi}\varrho) \cos m\varphi.$$

2.2.7 Multipólus kifejtés

Hagyjuk most a speciális koordinátarendszereket, és tárgyaljuk ismét *adott* töltéseloszlás terét, de most nagy távolságra. Legyen tehát egy lokalizált töltéseloszlásunk, amelynek karakterisztikus mérete a :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.192)$$

Az $|\mathbf{x}| \gg a$ esetben sorba fejthetjük a nevezőt – ezt megtehetjük általános koordinátákkal, vagy gömbi koordinátarendszerben kifejtve.

Általános koordinátákkal ($|\mathbf{x}| = r$ jelöléssel)

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} - x'_i \partial_i \frac{1}{r} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} + \dots \quad (2.193)$$

Mivel

$$\partial_i \frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3}, \quad \partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}, \quad (2.194)$$

ezért:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{x}'\mathbf{x})^2 - \mathbf{x}'^2\mathbf{x}^2}{r^5} + \dots \quad (2.195)$$

Visszaírva

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{x}'\mathbf{x})^2 - \mathbf{x}'^2\mathbf{x}^2}{r^5} + \dots \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}Q\mathbf{x}}{r^5} + \dots \right], \quad (2.196)$$

ahol

$$Q = \int d^3\mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{p} = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}'), \quad Q_{ij} = \int d^3\mathbf{x}' (3x'_i x'_j - \mathbf{x}'^2 \delta_{ij}) \varrho(\mathbf{x}'), \quad (2.197)$$

a töltés, dipólmomentum illetve kvadrupólmomentum. Ez utóbbi egy 3×3 -as spur-talan tenzor.

Ha magasabb rendű multipol-momentumokra is szükség van, akkor érdemesebb a gömbi koordinátákban kifejezett alakot használni. Felhasználva (2.146) és (2.157) egyenleteket, valamint hogy most $|\mathbf{x}| = r \gg |\mathbf{x}'| = r'$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\mathbf{x}\mathbf{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{x}}') Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (2.198)$$

Ezzel:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\ell m} \frac{q_{\ell m}}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad \text{ahol} \quad q_{\ell m} = \int d^3\mathbf{x}' r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \varrho(\mathbf{x}'). \quad (2.199)$$

- Összefüggés van a q , \mathbf{p} , Q_{ij} és $q_{\ell m}$, $\ell = 0, 1, 2$ együtthatók között:

$$Q = \sqrt{4\pi} q_{00}, \quad \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \begin{pmatrix} q_{1,-1} - q_{1,1} \\ i(q_{1,-1} + q_{1,1}) \\ \sqrt{2} q_{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{6\pi}{15}} (q_{22} + q_{2-2} - \sqrt{\frac{2}{3}} q_{20}) & & \\ & Q_{yx} & \\ & & Q_{zy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4i\sqrt{\frac{2\pi}{15}} (q_{2-2} - q_{22}) & \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (q_{2-1} - q_{21}) \\ -\sqrt{\frac{6\pi}{15}} (q_{22} + q_{2-2} - \sqrt{\frac{2}{3}} q_{20}) & i\sqrt{\frac{2\pi}{15}} (q_{2-1} + q_{21}) \\ & & 4\sqrt{\frac{\pi}{5}} q_{20} \end{pmatrix} \quad (2.200)$$

- Ha a töltéeloszlás jellemző mérete a , akkor a tipikus nagyságrendek $Q \sim 1$, $p \sim a$, $Q_{ij} \sim a^2$.
- Ha áthelyezem a koordináta-rendszer középpontját, akkor $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}' + \mathbf{c}$ módon kell az integrálok alatt módosítanom, vagyis a fenti együtthatók módosulása:

$$\Delta Q = 0, \quad \delta \mathbf{p} = Q \mathbf{c}, \quad \Delta Q_{ij} = 3(c_i p_j + c_j p_i) - 2\mathbf{c} \mathbf{p} \delta_{ij} + (3c_i c_j - c^2 \delta_{ij}) Q, \dots \quad (2.201)$$

Általában igaz, hogy a legalacsonyabb multipól momentum koordináta-rendszer-független.

- Miért van a kvadrupól tenzornak 5 komponense? 3×3 mátrix komponenseinek száma 9. Szimmetrikus kell, mert $\mathbf{x} Q \mathbf{x}$ alakban jelenik meg. Spurja azért tűnik el, mert $Q_{ij} \sim \partial_i \partial_j r^{-1}$, vagyis a spur arányos $\Delta r^{-1} = 0$. Egy mátrix ilyen felbontása megfelel a forgások irreducibilis ábrázolásainak.

2.3 Elektrosztatika anyag jelenlétében

Valódi anyagokban kétfajta viselkedés lehetséges: ha vannak szabad töltéshordozók, akkor sztatikus elektromos tér hatására addig mozognak, ameddig az elektromos tér le nem árnyékolódik. Ha nincsenek szabadon elmozduló töltéshordozók, akkor is vannak elektromos töltések az anyagban, helyhez kötöttek. Ebben az esetben elektromos tér hatására a töltéshordozók csak kicsit mozognak el.

Tekintsük az anyag egy kis, nulla össztöltésű anyagdarabkáját. Ennek függetlenül lehet eleve valamilyen töltéeloszlása, de ha külső elektromos teret alkalmazunk, akkor mindenképpen kialakul egy nem triviális töltéeloszlás (l. fémgömb polarizációja, (2.66) és (2.165)). A molekuláris töltéeloszlást makroszkopikus távolságból figyeljük meg, vagyis alkalmazható a multipol-kifejtés. Az anyagdarabka jellemző méretére a -t véve, az n . multipólmomentum a^n -nel arányos, tere a dipól teréhez képest $a^{n-1}/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^{n-1}$ faktoriall szorzódik, vagyis messziről figyelve elhanyagolható. Emiatt az anyag kis darabkájának töltésszerkezetét a dipólmomentumával közelíthetjük, l. 2.2. ábra. Vagyis ha egy ponttöltést és egy kis anyagdarabkát nézünk, akkor az \mathbf{x} helyen mérhető potenciál:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^3}, \quad (2.202)$$

ahol \mathbf{x}_0 a ponttöltés, \mathbf{x}_p az anyagdarabke helye.

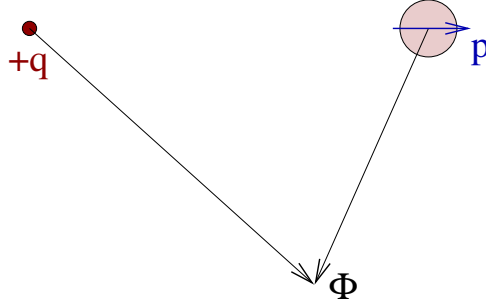


Figure 2.2: Ponttöltés és dipóllal közelített anyagdarab együttes hatása

Amennyiben több töltésünk van, akkor ezt a töltéssűrűséggel jellemezhetjük. Ha kiterjedt anyagunk van, akkor ezt felosztjuk elemi dV térfogatú cellákra, melyek töltéseloszlását a \mathbf{p} dipólmomentumukkal jellemezzük, és ezekre összegzünk. A töltéseloszlás mintájára bevezethetjük a dipólmomentum-sűrűséget (vagy polarizációs sűrűséget), $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}/dV$ módon. A felosztással nullához tartva integrált kapunk:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.203)$$

A második tagban levő integrált tovább alakítva (elhagyva a teljes divergenciából jövő felületi tagokat)

$$\int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \left[\nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] = - \int d^3\mathbf{x}' \frac{(\nabla \mathbf{P})(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.204)$$

Ezt visszaírva

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}') - \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.205)$$

Vagyis a polarizációból eredő járuléka pontosan olyan alakú, mint a betett töltéssűrűség járuléka. Ezt úgy fogalmazhatjuk, hogy a teljes érezhető töltéssűrűség értéke

$$\rho_{tot} = \rho - \nabla \mathbf{P} = \rho + \rho_{ind}. \quad (2.206)$$

A második tagot szokták *indukált töltéssűrűségnek* nevezni. A mikroszkopikus kép emögött az, hogy ha megnézzük, hogy egy V térfogatban mekkora töltés helyezkedik el, akkor az általunk betett töltések mellett az anyag töltéssűrűségét is figyelembe kell venni. A térfogat belsejében levő dipólok össztlötése nulla, csak azok maradnak, amelyek a felületen vannak, és így a felük kilóg a térfogatunkból. A dipól felület irányú komponense nulla járulékat ad, vagyis a bent rekedt töltéshez $qa = -\mathbf{p}\mathbf{n} = -\mathbf{P}\mathbf{n}dV = -\mathbf{P}\mathbf{n}dA$, azaz $q = -\mathbf{P}\mathbf{n}dA$. A teljes töltés tehát

$$Q = \int_V d^3\mathbf{x} \rho - \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{P} = \int_V d^3\mathbf{x} (\rho - \text{div } \mathbf{P}). \quad (2.207)$$

Vagyis az elektromos tér értékét meghatározó Maxwell egyenlet most úgy írható, hogy

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{tot} \quad \Rightarrow \quad \nabla \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (2.208)$$

Bevezetve $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ mennyiséget (elektromos eltolás) az anyagban érvényes Maxwell-egyenletek alakja

$$\boxed{\nabla \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.} \quad (2.209)$$

A második egyenlet az $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ egyenlet következménye. Az első egyenlet értelmezése tehát: ha beteszünk a rendszerbe ρ töltéssűrűséget, akkor az anyag polarizációja miatt a valódi töltéssűrűség *nem* ρ . Az elektromos tér egyenleteibe a teljes töltéssűrűség jön be. A polarizációt figyelembe véve definiálhatjuk a \mathbf{D} elektromos eltolást, ennek forrása már az expliciten betett (külső) töltéssűrűség.

Hogy a fenti egyenletet kezelni tudjuk, szükségünk van egy $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ összefüggésre. Fémgömbnél láttuk ((2.67)), hogy $\mathbf{p} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Vagyis ha V térfogatban van egy fémgömb, akkor a polarizáció-sűrűség

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{V} \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{4\pi R^3}{V}\right) \mathbf{E}. \quad (2.210)$$

A legtöbb anyagra igaz lesz

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.211)$$

ahol χ (elektromos szuszceptibilitás) ε_r (relatív permittivitás) illetve ε (permittivitás vagy dielektromos állandó) szimmetrikus mátrixok, izotróp anyagban azonban csak számok.

Teljesen általános anyagi tulajdonságok esetén nem tehetünk mást, mint megpróbáljuk megoldani a

$$\nabla(\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla \Phi(\mathbf{x})) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (2.212)$$

egyenletet. Homogén, izotróp anyagban a potenciálra felírható

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.213)$$

Ugyanaz az egyenlet mint vákuumban, csak a permittivitás értéke más. Részlegesen homogén közegekben a homogén tartományokban alkalmazhatjuk a fenti képletet, a közegethatárokon határfeltételeket szabhatunk.

2.3.1 Határfeltételek

Közegethatáron a határfelületen dA alapú $d\ell$ magasságú henger felületére integrálva, ahol $d\ell \rightarrow 0$ a felületre rakott külső töltést kapjuk. Feltéve, hogy ilyen nincsen, kapjuk:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 = dA(D_{2n} - D_{1n}) \Rightarrow \boxed{D_{1n} = D_{2n}}. \quad (2.214)$$

Ennek fizikai jelentése az, hogy inhomogén anyagban töltéeloszlás indukálódik. Két homogén anyag határán felületi töltéssűrűség alakul ki, hiszen a felülethez közel, a felületet a $z = 0$ síkba fektetve:

$$\rho_{ind} = -\partial_i P_i = -\partial_i [P_{2i}\Theta(z) + P_{1i}\Theta(-z)] = (P_{1z} - P_{2z})\delta(z) \Rightarrow \sigma = P_{1z} - P_{2z}. \quad (2.215)$$

Általában a felületi töltéssűrűség a polarizáció normális vetületének ugrásával egyenlő. Mivel az elektromos térerősség normális vetületének ugrása a felületi töltéssűrűséggel egyenlő

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n} = P_{1n} - P_{2n} \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}, \quad (2.216)$$

ami ugyanaz, mint (2.214).

A másik határfeltétel onnan jön, hogy a felületet körbeölelő, $d\ell$ magasságú és dh hosszúságú téglalapra integrálom rot \mathbf{E} -t, miközben $d\ell \rightarrow 0$:

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 = dh(E_{2t} - E_{1t}) \Rightarrow E_{2t} = E_{1t}. \quad (2.217)$$

Ez fizikailag úgy interpretálható, hogy a felület irányában nincsen indukált töltéssűrűség, ezért a térerősség ilyen irányú komponensének nincsen ugrása:

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}. \quad (2.218)$$

A határfeltételeket a potenciálra megfogalmazva: ha a potenciál mindenütt értelmezett, akkor a térerősség végességéből a potenciál folytonossága következik. E_n ugrása a felületre merőleges derivált ugrását jelenti:

$$\Phi_2 = \Phi_1, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n_1}. \quad (2.219)$$

Vagyis részben folytonos közegeknél

$$\boxed{\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{és a felületeken } \Phi \text{ és } \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ folytonos.}} \quad (2.220)$$

Mivel itt is a Poisson egyenlet megoldását keressük, ugyanazok a módszerek alkalmazhatók, mint a fémek esetében.

Megjegyzés: ha $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$, akkor

$$\begin{aligned} D_{2n} = D_{1n} &\Rightarrow E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{a határon a felület belseje felől} \\ &\Rightarrow \Phi|_{\text{belül}} = \text{konst.} \Rightarrow \mathbf{E}|_{\text{belül}} = 0, \quad \Phi|_{\text{határon}} = \text{konst.} \end{aligned} \quad (2.221)$$

Ez felel meg a fémeknek.

2.3.2 Tükörtlöltések módszere

A módszer logikája ugyanaz mint a fémek esetében: az 1. térben felírt Poisson egyenlet megoldását keressük az oda helyezett ponttöltések tere, és a többi (azaz *nem* az első térrészbe) elhelyezett tükörtlöltések tere összegeként. Mivel e tükörtlöltések nem az első térrészben vannak, nem befolyásolják a Poisson egyenlet forrását. Ugyanez igaz persze a többi térrészre is.

Feladat: A felső félsíkot ($z > 0$) ε_1 , az alsó félsíkot ($z < 0$) ε_2 permittivitású anyag tölti ki. A felső félsíkra q töltést helyezünk \mathbf{x}_0 helyre, a síktól z_0 távolságra. Milyen lesz a potenciál a rendszerben?

Megoldás: A megoldandó egyenletek

$$\Delta \Phi_1(\mathbf{x}) = -\frac{q}{\varepsilon_1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \Delta \Phi_2 = 0, \quad \Phi_1(x, y, 0) = \Phi_2(x, y, 0), \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)}. \quad (2.222)$$

Tükörtlöltés feltevés: próbáljuk a Φ_1 potenciált a q töltés és a 2. félsíkba, a síktól szintén z_0 távolságra elhelyezett q' töltéssel leírni; Φ_2 -t pedig próbáljuk az 1. félsíkba, a síktól z_0 távolságra elhelyezett q'' ponttöltéssel leírni. Azaz

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}}, \quad \Phi_2(\mathbf{x}) = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}}. \quad (2.223)$$

A határfeltételek

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, 0) = \Phi_2(x, y, 0) &\Rightarrow \frac{q + q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2} \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)} &\Rightarrow q - q' = q''. \end{aligned} \quad (2.224)$$

Ennek megoldása

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q. \quad (2.225)$$

Speciális eset, ha $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ekkor $q' = 0$ és $q'' = q$, azaz egyetlen q töltéssel leírható az egész tér.

Másik speciális eset, ha $\varepsilon_2 = \infty$, vagyis a 2. térrészben fém van. Ekkor $q' = -q$ és q'' véges, így $\Phi_2 = 0$: azaz az 1. térrészben a korábban látott tükörtlöltés megoldást kapjuk, a 2. térrészben nulla a potenciál.

2.3.3 Teljes függvényrendszerek

Ha a $\Delta \Phi = 0$ egyenlet megoldását keressük, akkor a korábban látott megoldásokat használhatjuk különböző szimmetriájú rendszerekben.

Feladat: Dielektromos gömb külső térbe helyezve: vegyünk egy R sugarú gömböt ε permittivitással, kívül ε_k permittivitású anyag legyen. Alkalmazzunk \mathbf{E}_0 külső elektromos teret. Milyen lesz az elektromos térerősség a rendszerben?

Megoldás: A megoldandó egyenletek, ha a külső elektromos tér z irányú:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0, & \Delta\Phi_k &= 0, & \Phi(r=R, \theta, \varphi) &= \Phi_k(r=R, \theta, \varphi), \\ \varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{(r=R, \theta, \varphi)} &= \varepsilon_k \frac{\partial\Phi_k}{\partial r} \Big|_{(r=R, \theta, \varphi)}, & \Phi_k(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) &= -E_0 r \cos\theta, & \Phi(r \rightarrow 0) &= \text{véges}. \end{aligned} \quad (2.226)$$

Miután a határfeltételek φ -függetlenek, kereshetjük a megoldást is φ -független alakban. Ekkor a Laplace-egyenlet megoldása gömbi koordinátarendszerben:

$$\Phi_k(r, \theta) = \sum_{\ell} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos\theta), \quad \Phi(r, \theta) = \sum_{\ell} (C_{\ell} r^{\ell} + D_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos\theta). \quad (2.227)$$

Most már csak a határfeltételek kielégítése van hátra.

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_k(r, \theta) = \sum_{\ell} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) = -E_0 r \cos\theta \Rightarrow A_1 = -E_0, \quad A_{\ell \neq 1} = 0. \quad (2.228)$$

Mivel a többi egyenletben az együtthatók egymással arányosak, feltehetjük, hogy minden $\ell \neq 1$ együttható nulla.

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0: \quad \Phi &= \frac{D_1}{r^2} P_1(\cos\theta) = \text{véges} \Rightarrow D_1 = 0 \\ r = R: \quad -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} &= C_1 R \\ r = R: \quad \varepsilon_k (-E_0 - 2 \frac{B_1}{R^3}) &= \varepsilon C_1. \end{aligned} \quad (2.229)$$

Innen kapjuk

$$C_1 = -\frac{3\varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} E_0, \quad B_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} E_0 R^3. \quad (2.230)$$

Ezzel felírva a megoldások

$$\Phi_1 = -\mathbf{E}\mathbf{x} \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} \frac{R^3}{r^3} \right), \quad \Phi_2 = -\frac{3\varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} \mathbf{E}\mathbf{x}. \quad (2.231)$$

A megfelelő télerősségek:

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} R^3 \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{E}_0\mathbf{x}) - \mathbf{E}_0 r^2}{r^5}, \quad \mathbf{E}_b = \frac{3\varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} \mathbf{E}_0. \quad (2.232)$$

A gömbön kívül a megoldás a külső tér mellett egy dipól tere, ahol a dipól erőssége

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_k \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} R^3 \mathbf{E}_0 = 4\pi\varepsilon_k \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^3 \mathbf{E}_0, \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_k}. \quad (2.233)$$

Fém esetén $\varepsilon \rightarrow \infty$, azaz $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_1 R^3 \mathbf{E}$, összhangban korábbi eredményeinkkel. Ha $\varepsilon_k > \varepsilon$, vagyis a külső térben jobban polarizálható anyag van, akkor \mathbf{p} ellentétes \mathbf{E}_0 -lal. Speciális eset, ha kívül vákuum van, belül pedig anyag, ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_0$.

Belül a télerősség homogén, azonban nagysága eltér az alkalmazott homogén külső tértől. A polarizáció hatására létrejövő egyenletes tér nagysága

$$\mathbf{E}_{pol} = \frac{\varepsilon_k - \varepsilon}{2\varepsilon_k + \varepsilon} \mathbf{E}_0. \quad (2.234)$$

Ha tehát kívül jobban polarizálható anyag található, akkor \mathbf{E}_{polar} növeli a külső teret, ha belül van jobban polarizálható anyag, akkor csökkenti azt.

A felületen ($r = R$ -nél) a télerősségek különbsége a felületre merőleges, nagysága a felületi töltéssűrűség:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_k)}{2\varepsilon_k + \varepsilon} (\hat{\mathbf{x}}\mathbf{E}_0). \quad (2.235)$$

Innen az látszik, hogy ha $\varepsilon > \varepsilon_k$, akkor a tér irányában pozitív töltések halmozódnak fel, ellenkező esetben negatív töltések.

A fenti feladatra építhetünk anyagmodellt is. Mikroszkópicusan az atomi (molekuláris) polarizálhatóság kiszámítható, arányos a külső térrel. Ugyanakkor ugyanezt az anyagdarabkát úgy is felfoghatjuk, mint ha szét lenne kenve arra a térrészre, amelyben a fenti molekula/atom található. Gömbnek tekintve a szétkentséget a fenti feladat megoldásából tudjuk a polarizáció nagyságát. E kettő leírás konzisztenciájából következik:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \gamma \mathbf{E}_0 = 4\pi \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^3 \mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 3V \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}. \quad (2.236)$$

Bevezetve $n = 1/V$ a sűrűséget:

$$\gamma = \frac{3}{n} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}, \quad \varepsilon_r = \frac{3 + 2n\gamma}{3 - n\gamma}, \quad \chi = \varepsilon_r - 1 = \frac{n\gamma}{1 - \frac{n\gamma}{3}}. \quad (2.237)$$

Ez a *Clausius-Mosotti* egyenlet. Akkor ad jó eredményt, ha az anyagnak a töltésszerkezete teljes mértékben a polarizáció hatására alakul ki.

Hogy γ -t megkapjuk, mikroszkopikus leírásra van szükség. Legegyszerűbb modell, ha a töltéshordozót (elektront) harmonikus potenciállal kötöttnek képzeljük. Ekkor \mathbf{E}_0 térerősség hatására történő elmozdulás \mathbf{x} értéke

$$D\mathbf{x} = q\mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = q\mathbf{x} = \frac{e^2}{D} \mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{q^2}{\varepsilon_0 D}. \quad (2.238)$$

A rugóállandó helyett a rezgési frekvenciával is kifejezhetjük a mikroszkopikus polarizálhatóságot: $\omega^2 = D/m$ miatt

$$\gamma = \frac{q^2}{\varepsilon_0 \omega^2 m}. \quad (2.239)$$

Ha több töltéshordozó, illetve több sajátfrekvencia is van, akkor

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i^2}{\omega_i^2 m_i}. \quad (2.240)$$

2.3.4 Elektrosztatikus energia jelenlétében

Korábban már láttuk rögzített töltéseloszlás energiáját. Anyag jelenlétében nem tudjuk rögzíteni az összes töltést, így az ott kapott képlet módosításra szorul.

Állandó dielektrikum

Először rögzítsük a dielektrikumot. Induljunk ki abból, hogy $\delta\rho$ extra külső töltés adott potenciálba végtelenből történő behozatalához szükséges energia

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \delta\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}). \quad (2.241)$$

A behozott töltés miatt az anyag kissé át-polarizálódik:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div}(\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}) = \rho + \delta\rho \quad \Rightarrow \quad \delta\rho = \operatorname{div} \delta\mathbf{D}. \quad (2.242)$$

Ezt visszaírva, és felhasználva, hogy $\Phi(\infty) = 0$:

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \operatorname{div}(\delta\mathbf{D})\Phi = - \int d^3\mathbf{x} \delta\mathbf{D} \operatorname{grad} \Phi = \int d^3\mathbf{x} \delta\mathbf{D} \mathbf{E}. \quad (2.243)$$

Amennyiben az anyag lineáris, azaz $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, akkor a fenti alak felintegrálható:

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{D} \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{E}. \quad (2.244)$$

Egy hasonló gondolatmenettel azt is mondhattuk volna, hogy mikor kívülről behozok egy töltést, valójában az anyagot is át-polarizálok, vagyis összesen $\rho_{tot} = \rho + \rho_{ind}$ töltést viszek a rendszerbe. Ennek forrása már \mathbf{E} , vagyis ekkor a fenti gondolatmenet a szokásos vákuum formulát adja.

A kettő gondolatmenet közötti különbség az anyag polarizációs járuléka

$$\int d^3\mathbf{x} \delta\varrho_{ind}\Phi = - \int d^3\mathbf{x} \operatorname{div}(\delta\mathbf{P})\Phi = \int d^3\mathbf{x} \delta\mathbf{P} \operatorname{grad} \Phi = - \int d^3\mathbf{x} \delta\mathbf{P}\mathbf{E}. \quad (2.245)$$

Kérdés, hogy ez az energia honnan származik.

Mikroszkopikusan lineáris anyag képzelhető négyzetes potenciállal kötött töltéshordozóknak. A rugóban tárolt potenciális energia:

$$q\mathbf{E} = D\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{q^2\mathbf{E}}{D} \Rightarrow \frac{1}{2}D\mathbf{x}^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2\mathbf{E}^2}{D} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{E}. \quad (2.246)$$

Ha a dipólok eloszlását folytonosnak vesszük, akkor a rugók potenciális energiája és az elektromos tér energiája összesen

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \varepsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{P}\mathbf{E} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} D\mathbf{E}. \quad (2.247)$$

Töltéseloszlás külső térben

Hogy mikroszkopikusan is lássuk, mi történik a polarizációs energiával, vizsgáljunk rögzített kis méretű töltéseloszlást simított külső elektromos térben. Ennek energiája:

$$W = \int d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x})\Phi_0(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}) \left(\Phi_0(0) + \mathbf{x}\nabla\Phi_0(0) + \frac{1}{2}x_i x_j \partial_i \partial_j \Phi_0 + \dots \right) \quad (2.248)$$

Mivel $\Delta\Phi = 0$, az utolsó tagot kiegészíthetjük $\delta_{ij}r^2$ -tel. Ekkor

$$W = Q\Phi - \mathbf{p}\mathbf{E} - \frac{1}{6}Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} + \dots \quad (2.249)$$

Állandó töltések, változó dielektrikum

Változtassuk a dielektrikumot állandó külső töltéseloszlás mellett. Induljunk dielektrikum nélküli állapotból, ekkor legyen a térerősség \mathbf{E}_0 , az elektromos eltolás $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0\mathbf{E}_0$. A dielektrikum jelenlétében ezek megváltoznak \mathbf{E} illetve \mathbf{D} értékre. Számítsuk ki a különbséget!

A kiinduló képletben most csak a dielektrikum energiáját akarom számolni, azaz le kell vonnom azt a potenciál járulékot, amely a dielektrikum nélkül lenne jelen:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} \delta\varrho(\mathbf{x})(\Phi(\mathbf{x}) - \Phi_0(\mathbf{x})). \quad (2.250)$$

Most a fixált töltéseloszlást kétféle módon írhatom, mivel $\varrho = \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{D}_0$. Használjuk a következő alakot:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} [\Phi \operatorname{div} \delta\mathbf{D}_0 - \Phi_0 \operatorname{div} \delta\mathbf{D}] = \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{E} \delta\mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \delta\mathbf{D}]. \quad (2.251)$$

Lineáris anyagban $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, illetve $\mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E} = \mathbf{P}$, ezért

$$\delta W' = - \int d^3\mathbf{x} \delta\mathbf{P} \mathbf{E}_0 \Rightarrow W' = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{P}\mathbf{E}_0, \quad \delta w' = -\frac{1}{2} \mathbf{P}\mathbf{E}_0. \quad (2.252)$$

Állandó potenciál, változó dielektrikum

Azt is megtehetjük, hogy a rendszer töltéseit külső potenciállal rögzítem. Ekkor a fenti gondolatmenet annyiban módosul, hogy most a töltések mind a potenciállal rögzített felületre kerülnek, viszont más töltést kell az anyag jelenlétében felvinni, mint anélkül, mert a potenciálokat kell fixen tartani:

$$\delta W'' = \int d^3\mathbf{x} (\delta\varrho\Phi - \delta\varrho_0\Phi_0) = \oint d^2x (\delta\sigma\Phi - \delta\sigma_0\Phi_0). \quad (2.253)$$

Mivel a felületen a potenciálok nem változnak, ezért ott $\Phi = \Phi_0$, illetve tetszőlegesen cserélgethetjük őket. A hasznos kombináció most

$$\delta W'' = \oint d^2x (\delta\sigma\Phi_0 - \delta\sigma_0\Phi) = \int d^3\mathbf{x} (\delta\rho\Phi_0 - \delta\rho_0\Phi) = \int d^3\mathbf{x} (\delta\mathbf{D}\mathbf{E}_0 - \delta\mathbf{D}_0\mathbf{E}). \quad (2.254)$$

Láthatóan most pontosan (2.251) mínusz egyszeresét kaptuk:

$$\delta W'' = -\delta W' \Rightarrow W'' = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{P}\mathbf{E}_0, \quad \delta w'' = \frac{1}{2} \mathbf{P}\mathbf{E}_0. \quad (2.255)$$

A különbség oka az, hogy mást tekintek a két esetben anyag nélküli rendszernek, vagyis a referenciapont különbözik. Ha pl. a fix töltéseket nézem, ahhoz képest a fix potenciálnál töltéseket kell mozgatnom, hogy a potenciálok ne változzanak, ez pedig munkavégzést jelent.

A fenti két gondolatmenet illeszkedik a termodinamikai leírásba: definiálhatjuk a rögzített töltések melletti energiát, infintezimális alakjában

$$dE = -pdV + TdS - \mathbf{E}_0 d\mathbf{P}. \quad (2.256)$$

Ha a potenciált rögzítem, akkor Legendre-transzformációt kell végezni. Ekkor egy szabad energia jellegű mennyiséget kapunk

$$\mathcal{F} = E + \mathbf{P}\mathbf{E}_0 \Rightarrow d\mathcal{F} = -pdV + TdS + \mathbf{P}d\mathbf{E}_0. \quad (2.257)$$

2.4 Magnetostatika

A mágnesség előidézője a mozgó töltések – ezért először ennek jellemzését nézzük.

2.4.1 Áram

A töltések áramlását egy $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ sebességmezővel veszem figyelembe, vagyis \mathbf{x} helyen levő elemi dV cellában a töltések átlagsebessége $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Ha a töltést is belevesszük, akkor beszélünk áramsűrűségről: $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$, amely szintén egy vektormező.

Ha felvesszünk egy $d\mathbf{f}$ felületelemet, azon mennyi töltés áramlik át egységnyi idő alatt? Ha az adott pontban a mozgó töltések felületre merőleges komponense v_\perp , akkor azok a töltések jutnak át, amelyek $dV = v_\perp dt d\mathbf{f}$ térfogatú dobozban vannak, ezek össztöltése $dq = dV\rho$. Tehát az időegység alatt átfolyó töltések száma, tekintetbe véve, hogy $v_\perp d\mathbf{f} = \mathbf{v} d\mathbf{f}$:

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{\text{átfolyó}} = \mathbf{J} d\mathbf{f}. \quad (2.258)$$

Ha a töltések egy hosszú vezetőben haladnak, akkor áramerősség a vezető teljes keresztmetsztén egységnyi idő alatt átfolyó töltés. A fentiek miatt

$$I = \int d\mathbf{f} \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (2.259)$$

SI egysége az amper $1A = 1C/s$. Ha vékony vezetőt nézünk, akkor a fenti képlet miatt

$$dV\mathbf{J} \rightarrow Id\mathbf{s}. \quad (2.260)$$

Ha egy zárt térfogatelemet veszünk, akkor a teljes felületén kiáramló töltés egyenlő a belül levő töltések fogyásával, ha nincs a töltésnek forrása, azaz a töltés megmaradó mennyiség. Azaz:

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{J} = 0. \quad (2.261)$$

Ez a töltésmegmaradás mérlegegyenlete. Magnetostatikában $\dot{\rho} = 0$, azaz $\text{div} \mathbf{J} = 0$.

2.4.2 Mágneses alapjelenségek

Tapasztalat szerint az áram hat az iránytűre (Oersted, 1819) \Rightarrow az áram létrehoz valamilyen mágneses mezőt, ennek jellemzésére használjuk az iránytűre ható forgatónyomaték nagyságát. Az így definiált *mágneses indukció* tapasztalat szerint arányos

$$d\mathbf{B} \sim \frac{d\mathbf{J} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (2.262)$$

Az arányossági tényező SI-ben $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ N/A}^2$, μ_0 a vákuumpermeabilitás. A \mathbf{B} mértékegysége a tesla (T). Kiterjedt vezetőre

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (2.263)$$

Szintén tapasztalat, hogy mágneses térben ponttöltésre ható erő (Lorentz-erő) illetve forgatónyomaték:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow d\mathbf{F} = d\mathbf{J} \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{F} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{N} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \times (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})) \quad (2.264)$$

Lokális törvények

Ismét használhatjuk, hogy $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ gradiensként áll elő

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \nabla_{\mathbf{x}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.265)$$

Emiatt

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.266)$$

A bevezetett \mathbf{A} mennyiség a vektorpotenciál. Ha vékony vezetőnk van, akkor

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}'|} \quad (2.267)$$

Miután \mathbf{B} rotációként áll elő:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.268)$$

az a harmadik Maxwell törvény.

Számoljuk ki \mathbf{B} rotációját

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \Rightarrow \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m = \partial_i (\partial_j A_j) - \Delta A_i. \quad (2.269)$$

Innen az első tag

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') \partial_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \partial_i J_i(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 0 \quad (2.270)$$

sztatikában. Itt eldobtunk egy felületi integrált, mondván, hogy $J(\infty) = 0$. Az \mathbf{A} laplacának számítása:

$$\Delta A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') (-4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = -\mu_0 J_i(\mathbf{x}). \quad (2.271)$$

Összesen tehát

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.272)$$

Ez a negyedik Maxwell törvény (sztatikára). Egy felületre integrálva

$$\int_F d\mathbf{f} \text{rot } \mathbf{B} = \oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{B} = \mu_0 \int_F d\mathbf{f} \mathbf{J} = \mu_0 I \Rightarrow \mu_0 I = \oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{B}, \quad (2.273)$$

ez az Ampère törvény.

Mértékinvariancia

Ugyanúgy mint a skalárpotenciál esetén, a \mathbf{A} tér nem fizikai mennyiség, csak a rotációja az (később ezt az állítást finomíthatjuk...). Mivel $\text{rot grad } \Psi = 0$, egy skalármező gradiensét hozzáadhatjuk \mathbf{A} -hoz, és még mindig ugyanazt a mágneses indukciót kapjuk:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \Psi. \quad (2.274)$$

Ezt az elektrodinamika *mértékszabadságának* (vagy mértékinvarianciájának) hívjuk.

Hogy számolni tudjunk, rögzíteni kell Ψ -t (mértékrögzítés). A fenti számolásban, ahogy láttuk $\text{div } \mathbf{A} = 0$ feltételünk volt, az a Coulomb mérték.

2.4.3 Árameloszlások

Feladat: Végtelen hosszú, végtelenül vékony, egyenes vezetőben I áram folyik. Mekkora a mágneses indukció?

Megoldás: A rendszer hengersizmetriája miatt nem függhet semmi φ -tól hengerkoordinátarendszerben felírva. \mathbf{B} iránya tisztán \hat{e}_φ , ezért alkalmazható az Ampère törvény a vezetőt körülölelő r sugarú körre

$$\oint ds \mathbf{B} = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2.275)$$

Feladat: Adott egy R sugarú vékony kör alakú vezető, amelyben I áram folyik. Mekkora az általa létrehozott mágneses indukció?

Megoldás: A vektorpotenciálját számoljuk ki:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}'|} \quad (2.276)$$

A kört paraméterezni kell

$$\mathbf{s}' = \begin{pmatrix} R \cos \varphi' \\ R \sin \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \quad d\mathbf{s}' = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi' \\ R \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi'. \quad (2.277)$$

Írjuk fel \mathbf{x} -et hengerkoordinátákban

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x} - \mathbf{s}'| = \sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}. \quad (2.278)$$

Emiatt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}} \begin{pmatrix} -R \sin \varphi' \\ R \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.279)$$

Írjuk fel a vektorpotenciált hengerkoordinátákban; az egy hosszúságúra normált bázisvektorok:

$$\hat{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.280)$$

emiatt

$$A_\varrho(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \hat{e}_\varrho = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{-\sin(\varphi - \varphi')}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}} = 0, \quad A_z(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \hat{e}_z = 0, \quad (2.281)$$

ami nem nulla

$$A_\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}}. \quad (2.282)$$

A_φ nem függ φ -tól, ami a feladat hengersizmetriájából következik. Descartes koordinátákban az azimutszög-függés kizárólag a bázisvektorok helyfüggéséből adódik.

Az integrál megadható elliptikus függvények segítségével, vagy numerikusan is számolható. Minket az érdekel most, hogy milyen lesz a tér nagy távolságokra? Ekkor $r^2 = \varrho^2 + z^2$ jelöléssel $r \gg R$, emiatt

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \frac{1}{r} - \frac{u^2}{2r^3} + \dots \quad (2.283)$$

Most $u^2 = R^2 - 2\varrho R \cos \varphi$, azaz

$$A_\varphi(\varrho, z) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' R \cos \varphi' \left[\frac{1}{r} + \frac{2\varrho R \cos \varphi' - R^2}{2r^3} + \dots \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \pi I \varrho}{r^3} + \dots, \quad (2.284)$$

hiszen az első tag nem ad járulékot. Mivel most

$$\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{x} = \hat{\mathbf{e}}_z \times (z\hat{\mathbf{e}}_z + \varrho\hat{\mathbf{e}}_r) = \varrho\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (2.285)$$

ezért a fenti eredmény úgy írható, hogy

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \text{ahol } \mathbf{m} = R^2 \pi I \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (2.286)$$

A fenti feladat általánosítható tetszőleges áramhurok terének nagy távolságú viselkedésére:

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{J_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{r} + \frac{x_j x'_j}{r^3} + \dots \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3 \mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_j}{r^3} \int d^3 \mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') x'_j + \dots \quad (2.287)$$

Az első illetve a második tag együtthatója (a végtelen felületre vett integrálokat eldobjuk, mert ott $\mathbf{J} = 0$, valamint kihasználjuk, hogy $\text{div } \mathbf{J} = 0$)

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{x} J_i &= \int d^3 \mathbf{x} (\partial_j x_i) J_j = - \int d^3 \mathbf{x} x_i \text{div } \mathbf{J} = 0 \\ \int d^3 \mathbf{x} x_j J_i &= \int d^3 \mathbf{x} x_j (\partial_k x_i) J_k = - \int d^3 \mathbf{x} x_i \partial_k (x_j J_k) = - \int d^3 \mathbf{x} (x_i J_j - x_i x_j \text{div } \mathbf{J}) = - \int d^3 \mathbf{x} x_i J_j. \end{aligned} \quad (2.288)$$

Ezért a sorfejtés első tagja hiányzik, amit a mágneses monopólusok hiányaként értelmezhetünk¹. A második tag egy antiszimmetrikus mátrix; ehhez hozzárendelhetjük egy vektort, amit *mágneses dipólmomentumnak* hívunk:

$$\int d^3 \mathbf{x} x_j J_i = \varepsilon_{jik} m_k \quad \text{vagyis} \quad m_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3 \mathbf{x} x_j J_k, \quad \text{azaz} \quad \boxed{\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{x} \times \mathbf{J}}. \quad (2.289)$$

Emiatt végül:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} + \dots} \quad (2.290)$$

Mágneses dipól indukciója:

$$B_i = (\text{rot } \mathbf{A})_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_j \frac{\varepsilon_{kln} m_\ell x_n}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) \frac{m_\ell \delta_{jn} r^2 - 3m_\ell x_j x_n}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3x_i (\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}) - m_i r^2}{r^5}, \quad (2.291)$$

ugyanaz a képlet mint az elektromos dipól esetében.

Megjegyzések a mágneses dipólmomentummal kapcsolatban:

- Vezető hurok esetén, a Stokes tétel miatt:

$$m_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3 \mathbf{x} x_j J_k = \frac{I}{2} \oint ds_k (\varepsilon_{ijk} x_j) = \frac{I}{2} \int_F df_k \varepsilon_{kln} \partial_\ell (\varepsilon_{ijn} x_j) = \frac{I}{2} \varepsilon_{kln} \varepsilon_{iln} \int_F df_k = I \int_F df_i, \quad (2.292)$$

vagyis a mágneses dipólmomentum $\mathbf{m} = I\mathbf{F}$ az áramhurok felületével arányos.

¹Vigyázat! Időfüggés esetén megmarad ez a tag, ami a mágneses dipólsugárzáshoz vezet. l. később.

- töltött részecske mozgása esetén

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}), \quad (2.293)$$

ahol $\mathbf{r}(t)$ a részecske trajektóriája. Ekkor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \times [q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})] = \frac{q}{2m} \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = \frac{q}{2m} \mathbf{L} = \gamma \mathbf{L}, \quad (2.294)$$

ahol \mathbf{L} a részecske impulzusmomentuma (perdülete). Vagyis a mágneses dipólmomentum a perdülettel arányos lesz. Az arányossági tényező a giromágneses faktor γ . A fenti egyenletből $\gamma = q/(2m)$.

Ez az összefüggés igaz lesz atomi méretekig. Saját impulzusmomentummal (spinnel) rendelkező elemi részecskék esetében már van egy faktor a fenti eredmény előtt:

$$\mathbf{m} = g \frac{q}{2m} \mathbf{L}. \quad (2.295)$$

Elektronra a "g-faktor" $g_e = 2.002319 \dots$: $g = 2$ jön az elektronok Dirac-egyenletéből, a járulékos $0.002319 \dots$ faktor a kvantum elektrodinamika eredménye.

- A fenti tétel általánosítása forgó, töltött merev testre: itt $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$, azaz $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$. Emiatt

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[\int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \right] \boldsymbol{\omega} = \frac{Q}{2M} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.296)$$

ahol $\boldsymbol{\Theta}$ a test tehetetlenségi nyomatéka, ha a tömegeloszlására $\rho_m = \rho M/Q$ -t veszünk.

2.4.4 Külső térbe helyezett árameloszlás

Ha közel homogén külső térbe árameloszlást helyezek, akkor a mágneses indukció sorba fejthető: $B_i(\mathbf{x}) = B_i(0) + x_j \partial_j B_i(0) + \dots$ Ezzel

$$F_i = \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}))_i = \varepsilon_{ijk} \int d^3\mathbf{x} J_j(\mathbf{x}) (B_k(0) + x_\ell \partial_\ell B_k(0) + \dots). \quad (2.297)$$

Korábban már láttuk, hogy az első tag nulla, a másodikban pedig

$$\int d^3\mathbf{x} x_\ell J_j(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\ell j n} m_n. \quad (2.298)$$

Ezzel $\varepsilon_{jki} \varepsilon_{jnl} = \delta_{kn} \delta_{il} - \delta_{kl} \delta_{in}$ miatt

$$F_i = (\delta_{kn} \delta_{il} - \delta_{kl} \delta_{in}) m_n \partial_\ell B_k = m_k \partial_i B_k - m_i \partial_i B_i \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m}\mathbf{B}), \quad (2.299)$$

mivel $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Vagyis a dipólt a mágneses indukció deriváltja mozgatja!

A fenti erő írható potenciál gradienseként

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad U = -\mathbf{m}\mathbf{B}. \quad (2.300)$$

Ez az U tehát a külső térbe helyezett mágneses dipól energiája.

A forgatónyomaték kifejezése:

$$N_i = \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{x} \times (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}))]_i = \int d^3\mathbf{x} (J_i(\mathbf{x}) x_j B_j(x) - B_i(\mathbf{x}) x_j J_j(\mathbf{x})) \rightarrow \varepsilon_{jil} m_\ell B_j \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (2.301)$$

A fentiek fényében elemezhetjük, mit is csinál egy kis mágnes egy másik, rögzített mágnes mellett. Mindkét mágnes közelítsük dipóllal, \mathbf{m} illetve \mathbf{m}_0 dipólmomentummal. Ha \mathbf{m} nem párhuzamos a lokális mágneses indukcióval, akkor olyan forgatónyomaték hat rá, amely a mágneses indukció irányába forgatja, összhangban azzal, hogy ekkor a dipól energiája ($-\mathbf{m}\mathbf{B}$) csökken – vagyis a két dipól ellentétes pólusával fordul egymás felé. Ezek után, mivel a mágneses indukció csökken a távolsággal, $-\mathbf{m}\mathbf{B}$ nő a távolsággal, gradiense tehát kifelé mutat, negatív gradiense pedig befelé. Vagyis a nagy mágnes magához vonzza a kicsit.

Ugyanezen ok miatt egymás mellé helyezett dipólok szintén ellentétes pólusaikkal fordulnak egymás felé, vagyis csökkentik egymás terét. Vagyis tisztán magnetosztatikai erők az antiferromágneses rendeződést részesítik előnyben (1. később).

2.4.5 Mágnesség anyag jelenlétében

Hasonlóan az elektrosztatikához, anyag jelenlétében a makroszkopikus árameloszlások csak egy részét képezik a teljes árameloszlásnak. Kis méretű, lokalizált árameloszlások képződhetnek az anyagban. Ezek által létrehozott mágneses indukció, a méretéhez képest nagy távolságra, mint láttuk, mágneses dipóllal írható le: a magasabb multipól momentumok járuléka a/r hatványaival van elnyomva, ahol a az árameloszlás jellemző mérete, r a megfigyelési pont távolsága. Másik lehetőség az, hogy az anyagban eleve vannak olyan mágnesesen aktív elemi összetevők, amelyek szintén a dipólmomentumukkal jellemezhetők nagy távolságon.

Emiatt az anyag jelenlétét itt is, mint elektrosztatikában, mágneses dipólsűrűséggel (mágneszettség) jellemezhetjük: $d\mathbf{m} = dV \mathbf{M}(\mathbf{x})$. A teljes tér tehát

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right], \quad (2.302)$$

ahol az első tag a kívülről betett árameloszlás, a második tag a mágneses dipólsűrűség járuléka.

A második tag komponenseit kifejtve:

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\varepsilon_{ijk} M_j(\mathbf{x}') (x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} &= \int d^3\mathbf{x}' \varepsilon_{ijk} M_j(\mathbf{x}') (-\partial_k) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int d^3\mathbf{x}' \varepsilon_{ijk} M_j(\mathbf{x}') \partial'_k \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \{\text{parc. int.}\} = \\ &= \int d^3\mathbf{x}' \frac{-\varepsilon_{ijk} \partial'_k M_j(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int d^3\mathbf{x}' \frac{(\text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{x}'))_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (2.303)$$

ahol a felületi tagot eldobtuk, mondván, hogy $\mathbf{M}(\infty) = 0$. Tehát a mágneses dipólsűrűség ugyanúgy a külső áramokhoz ad járulékot, mint az elektrosztatikában a dipólsűrűség a külső töltéssűrűséghez:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + \text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Rightarrow \mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{migr}, \quad \mathbf{J}_{migr} = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (2.304)$$

Figyeljük meg, hogy itt pozitív előjellel jön a mikroszkopikus járuléka! A fizikai kép emögött az, hogy ha egy F felületen átfolyó áramot akarjuk kiszámítani, akkor egyrészt figyelembe kell venni a makroszkopikus áramsűrűséget, valamint a mikroszkopikus áramokat, ezeket $\mathbf{m} = \mathbf{n} I_{migr} dA$ mágneses dipólmomentumukkal jellemezzük. Miután a mikroszkopikus áramok kis méretű köráramok, így a felület belsejében nulla teljes átfolyó töltést eredményeznek. A felület határán is csak a határvonal irányú ($\hat{\mathbf{s}}$) komponens ad járulékot: azaz a járulékos áramerősség: $I_{migr} \mathbf{n} \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{m} \hat{\mathbf{s}} / dA = \mathbf{M} \hat{\mathbf{s}} dV / dA = \mathbf{M} d\mathbf{s}$. Vagyis a teljes áram

$$I_{tot} = \int_F d\mathbf{f} \mathbf{J}_{tot} = \int_F d\mathbf{f} \mathbf{J} + \oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{M} = \int_F d\mathbf{f} (\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M}). \quad (2.305)$$

A lokális törvények \mathbf{J}_{tot} -ra vonatkoznak, vagyis:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_{tot} = \mu_0 (\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M}) \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.306)$$

Az Ampère törvény:

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{H} = I. \quad (2.307)$$

\mathbf{H} neve mágneses tér, és (bár a neve mást sugall), csak egy segédmenyiség – az erőhatások csak \mathbf{B} -ből jönnek. Ennek ellenére sokszor a mágneses tér segítségével fejezik ki a megoldást: vákuumban csak egy konstans különbség van a kettő között, és a mágneses tér az egyenletekben hasonló szerepet játszik, mint az elektrodinamika egyenleteiben az \mathbf{E} .

Hogy meg tudjuk oldani a fenti egyenleteket, kell egy $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ vagy $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ reláció. Ez sokszor nagyon bonyolult, mert az anyag elemi mágneses összetevőinek kölcsönhatása sokszor összemérhető a mágneses tér energiájával, sőt, meg is haladhatja azt. Az anyag mágneses tulajdonságait ezért elsősorban a mikrofizikai jelenségek határozzák meg.

- *dia- és paramágneses anyagok*: az anyagok bizonyos fajtáinál lineárisan függ a mágnesezettség illetve a mágneses tér a mágneses indukciótól; izotróp esetben:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi, \quad (2.308)$$

χ a mágneses szuszceptibilitás.

Diamágneses anyagoknál $\chi < 0$ vagyis $\mu < \mu_0$, ami annak felel meg, hogy a generálódó mikroszkopikus mágnesezettség csökkenteni igyekszik a külső mágneses tér hatását. Olyan anyagoknál, ahol az elemi összetevőknek nincs mágneses dipólmomentumuk az indukció (l. később) által létrehozott elemi áramhurkok ilyen tulajdonságúak (Lenz-törvény).

Formálisan ez az elektrosztatikához hasonlít

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.309)$$

Az indukció és a töltésmegosztás is csökkenteni igyekszik a külső tér hatását, az azonban már nem analóg a két esetben, hiszen egyik esetben \mathbf{B} az, a másik esetben \mathbf{E} . Vagyis $\mathbf{M} \sim -\mathbf{B}$, de $\mathbf{P} \sim \mathbf{E}$. Ezért az indukció illetve polarizáció hatására $\mu < \mu_0$, ugyanakkor $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Ha az elemi összetevők maguk is mágnesek, akkor a feljebb tárgyalt forgatónyomaték hatására \mathbf{m} a \mathbf{B} irányába igyekszik beállni, vagyis $\mathbf{M} \sim \mathbf{B}$. Emiatt $\xi > 0$, azaz $\mu > \mu_0$. Ezek a paramágneses anyagok.

Ha a lineáris közelítés jó, akkor általában kicsi a χ értéke, tipikusan $|\mu - \mu_0|/\mu_0 \sim 10^{-5}$, vagyis sokszor elhanyagolható.

- *(anti)-ferromágneses anyagok*: ha az anyag rendelkezik mágneses szerkezettel, azaz elemi dipólokkal, akkor ezen dipólok egymásra hatását is olykor figyelembe kell venni. Ha csak a mágneses dipólok kölcsönhatását tekintenénk, akkor ezek egymással ellentétesen fodulva megszüntetnék a mágneses teret. Azonban az anyag mágneses dipóljai (spinje) közötti kölcsönhatások alapvetően kvantumos eredetűek, amelyek jóval erősebbek lehetnek a mágneses kölcsönhatásnál. Ezekben az anyagokban a mezoszkopikus mágneses szerkezetet nem a külső mágneses indukció határozza meg elsősorban.

Ha az elemi mágneses dipólok ellentétes beállása preferált, akkor makroszkopikusan nem látható mágneses tér, csakúgy, mintha csak a mágneses kölcsönhatást tekintettük volna: ezek az antiferromágneses anyagok.

Ha az elemi mágneses dipólok párhuzamos beállása preferált, akkor homogén mágnesezettség alakulhat ki külső mágneses indukció hiányában is: ezek a ferromágneses anyagok. Hogy a teljes anyag mágneses energiáját csökkentsük, különböző mágnesezettségű tartományok (domének) alakulnak ki, ez a doménszerkezet határozza meg az anyag teljes mágneses terét. Külső mágneses indukció alkalmazásával ezek a doménfalak vándorolnak, s így az anyag mikroszkopikus szerkezete megváltozik. Emiatt a mágneses indukció kikapcsolásával már egy más doménszerkezetű, más mágneses terű anyagot találunk. Ez a hiszterézis jelensége (l. Fig. (2.3))

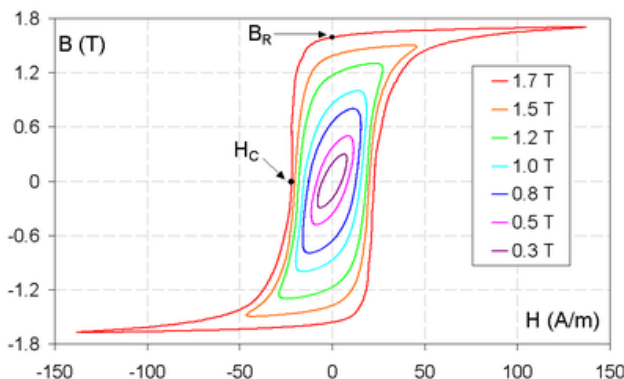


Figure 2.3: Hiszterézis hurok (<http://en.wikipedia.org/wiki/Hysteresis>)

Habár a jelenség nem lineáris, minden pontban beszélhetünk permeabilitásról $\mu(\mathbf{H})\mathbf{H} = \mathbf{B}$ alapján. Mivel a mágneses domének határa jóval könnyebben mozgatható, mint az elemi spinek, ezért jóval nagyobb mágneses

permeabilitást kapunk, mint a dia- illetve paramágneses anyagoknál, akár $\mu/\mu_0 \sim 10^6$ is lehet, de 10^{-10^4} tipikus értékek (a fenti ábrán tipikusan 10^4). A gyors változás addig tart, amíg a teljes anyag egy mágneses domén, ekkor a μ értéke lecsökken a paramágneses anyagok szintjére, azaz több nagyságrendet esik. Ez a mágneses telítődés (szaturáció). Mágneses szaturációnál a mágneses indukció értéke a legjobb vasötvözeteknél ~ 2 T.

Ha kikapcsoljuk a külső mágneses teret, miután szaturáltuk az anyagot, akkor kapunk egy remanens mágnesezettséget, azaz egy megmaradó mágneses dipólsűrűséget.

2.4.6 Határfeltételek

Tekintsünk olyan anyagot, ahol az anyagi jellemzők hirtelen változnak meg (részlegesen homogén anyagok). A határon a $\text{div } \mathbf{B} = 0$ és $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ elektrodinamikai analógiájára

$$B_n \quad \text{és} \quad H_t \quad \text{folytonos.} \quad (2.310)$$

A fizikai kép emögött az, hogy a homogén anyagban (külső források híján) nincsen mikroszkopikus áramsűrűség, hiszen

$$\mathbf{J}_{mikr} = \text{rot } \mathbf{M} = \frac{\mu\chi}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{H} = 0. \quad (2.311)$$

A homogén tartományok határán felületi áramsűrűség van; ha a felület z irányú, akkor $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\Theta(z) + \mathbf{M}_2\Theta(-z)$, ezért

$$J_{ind,i} = \varepsilon_{ijk}\partial_j M_k = \hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)\delta(z). \quad (2.312)$$

Emiatt a határon körbefutó, zx síkban levő kis görbe mentén alkalmazva az Ampère törvényt:

$$\oint d\mathbf{s} \mathbf{B} = d\ell(B_{1x} - B_{2x}) = \mu_0 \int d\mathbf{f} \mathbf{J}_{ind} = \mu_0 d\ell \hat{\mathbf{e}}_y (\hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)) = \mu_0 (M_{1x} - M_{2x}) d\ell. \quad (2.313)$$

Emiatt tehát

$$\frac{1}{\mu_0} B_{1x} - M_{1x} = \frac{1}{\mu_0} B_{2x} - M_{2x} \quad \Rightarrow \quad H_{1x} = H_{2x}, \quad (2.314)$$

és ugyanez igaz az y komponensre is.

2.4.7 Magnetosztatikai feladatok megoldási módszerei

Megoldandó

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \text{és} \quad B_n, H_t \text{ folytonosak.} \quad (2.315)$$

A vektorpotenciál mindig bevezethető: $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Általános $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ vagy $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ reláció esetén így

$$\text{rot}(\mathbf{H}(\text{rot } \mathbf{A})) = \mathbf{J}, \quad \text{vagy} \quad \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 [\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M}(\text{rot } \mathbf{A})] \quad (2.316)$$

egyenleteket kell megoldanunk.

Ha az anyag lineáris, azaz $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, és részlegesen folytonos közegeket tekintünk, akkor a fenti első egyenletből Coulomb mértékben ($\text{div } \mathbf{A} = 0$) kapjuk a határfeltételekkel együtt:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}, \quad \mathbf{A} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{folytonos a határon.} \quad (2.317)$$

További egyszerűsítéshez vezet, ha ráadásul $\mathbf{J} = 0$: ekkor $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ miatt létezik (mágneses) potenciál, $\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi_M$. Erre homogén közegekből álló lineáris anyagokban:

$$\Delta \Phi_M = 0, \quad \Phi_M \quad \text{és} \quad \mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial n} \quad \text{folytonos a határon,} \quad (2.318)$$

vagyis a Laplace egyenlet megoldási módszereit használhatjuk. Ha van áramsűrűség a rendszerben, akkor ott nem létezik a potenciál, s ahol létezik, ott sem egyértékű, hiszen

$$\oint d\mathbf{s} \mathbf{H} = -\delta\Phi_M = \int d\mathbf{f} \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \delta\Phi_M = -\int d\mathbf{f} \mathbf{J} = -I. \quad (2.319)$$

Emiatt például a végtelen vezető esetén $\Phi_M = -I\varphi/(2\pi)$. Ha az anyag nem lineáris, akkor a $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ függvény felhasználásával

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{div}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \Rightarrow \Delta \Phi_M = \operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{H}). \quad (2.320)$$

Ha a mágnesezettség független a külső tértől (állandó mágnesekek esete), akkor a fenti egyenletekben $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ illetve $\operatorname{div} \mathbf{M}$ forrásként működnek, így felírható a megoldás:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{-\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.321)$$

Ha pl. $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ állandó egy térrészben, akkor a két térrész határán $\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$, valamint

$$B_{n1} = B_{n2} \Rightarrow H_{n2} - H_{n1} = M_{n1} - M_{n2} = \mathbf{nM}_0. \quad (2.322)$$

Ha nincsenek külső áramok, akkor:

$$\left. \frac{\partial \Phi_M}{\partial n} \right|_{\text{kívül}} - \left. \frac{\partial \Phi_M}{\partial n} \right|_{\text{belül}} = -\mathbf{nM}_0. \quad (2.323)$$

Feladat: Homogén \mathbf{H}_0 mágneses térbe helyezett μ permeabilitású R sugarú gömb mágneses tere és indukciója.

Megoldás: Ezt már megoldottuk elektrosztatikában (l. (2.231)). Annak analógiájára

$$\text{kívül: } \Phi_M = -\mathbf{H}_0 \mathbf{x} \left[1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{R^3}{r^3} \right] \quad \text{belül: } \Phi_M = -\frac{3}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_0 \mathbf{x}, \quad (2.324)$$

vagyis kívül a külső tér mellett egy dipól járulékát kapjuk

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} 4\pi R^3 \mathbf{H}_0. \quad (2.325)$$

Belül egyenletes teret kapunk:

$$\mathbf{H} = \frac{3}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B} = \frac{3\mu_r}{2 + \mu_r} \mu_0 \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} = \frac{3(\mu_r - 1)}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_0. \quad (2.326)$$

Tökéletes diamágnes esetén $\mu_r = 0$, vagyis a mágneses indukció belül nulla, leárnyékolódik a külső tér.

Eros ferromágnes esetén μ_r nagy, vagyis a belső mágneses tér nulla.

Feladat: Göbmmágnes R sugárral, homogén \mathbf{M}_0 mágnesezettséggel. Mekkora a mágneses tér és mágneses indukció?

Megoldás: Válasszuk a z irányt \mathbf{M}_0 irányának. A gömbön belül állandó a mágnesezettség, így $\operatorname{div} \mathbf{M}$ csak a határon nem nulla, a releváns mennyiség

$$\mathbf{nM}_0 = \frac{\mathbf{xM}_0}{r} = M_0 \frac{z}{r} = M_0 \cos \theta = M_0 P_1(\cos \theta) \quad (2.327)$$

gömbi koordinátarendszerben.

A Laplace egyenlet megoldását két részletben keressük: belül legyen Φ_{M1} , kívül Φ_{M2} , ezekre

$$\Delta \Phi_{M1} = 0, \quad \Delta \Phi_{M2} = 0. \quad (2.328)$$

A határfeltételek

$$\Phi_{M1} = \Phi_{M2}, \quad \partial_n \Phi_{M1} - \partial_n \Phi_{M2} = \mathbf{nM}_0 = M_0 P_1(\cos \theta). \quad (2.329)$$

A megoldás a φ -függetlenség miatt kereshető Legendre polinomokkal kifejtve. Mivel az $r = 0$ illetve az $r = \infty$ értékek végesek, marad

$$\Phi_{M1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \quad \Phi_{M2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (2.330)$$

A határfeltételek:

$$A_\ell R^{2\ell+1} = B_\ell, \quad \ell A_\ell R^{\ell-1} + (\ell+1)B_\ell R^{-\ell-2} = M_0 \delta_{\ell 1} \quad \Rightarrow \quad A_{\ell \neq 1} = B_{\ell \neq 1} = 0, \quad \begin{cases} A_1 = M_0/3 \\ B_1 = R^3 M_0/3. \end{cases} \quad (2.331)$$

Tehát

$$\begin{aligned} \Phi_{M1} = \frac{M_0}{3} z &\Rightarrow \mathbf{H}_{\text{belül}} = -\frac{\mathbf{M}}{3}, & \mathbf{B}_{\text{belül}} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M}, \\ \Phi_{M2} = \frac{M_0 R^3}{3r^2} \cos \theta &\Rightarrow \text{dipól tere,} & \mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{M}_0, \quad \text{sűrűsége } \frac{\mathbf{m}}{V_{\text{gömb}}} = \mathbf{M}_0. \end{aligned} \quad (2.332)$$

Chapter 3

Időfüggés az elektrodinamikában

Ebben a fejezetben az időfüggő Maxwell-egyenleteket és azok megoldásait vizsgáljuk.

3.1 Maxwell egyenletek

Míg egy töltés egy semleges testet polarizál, azaz elektromosan aktívvá tesz, egy áramkör jelenléte nem indukál áramot egy mellette levő vezető hurokban. De Faraday 1831-ben észrevette, hogy az áram megváltozása már hatással van a másik áramkörre. A kören indukálódó feszültség, Faraday megfigyelése szerint, arányos a mágneses fluxus változásával:

$$\mathcal{E} = \oint_{\partial F} \mathbf{E} d\ell, \quad \mathcal{F} = \int_F \mathbf{B} d\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{d\mathcal{F}}{dt}. \quad (3.1)$$

A Stokes-tételt felhasználva

$$\int_F \left[\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] d\mathbf{f} = 0, \quad \forall F \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Ez a második Maxwell-egyenlet időfüggő, teljes alakja.

Megjegyzés: a \mathcal{E} és $\dot{\mathcal{F}}$ közötti 1-es együttható nem véletlen, a Lorentz-erővel konzisztens. Ha ugyanis egy merőleges mágneses térben levő áramhurokot megnövelek egy kis $d\ell$ szakaszon dx -szel, akkor az ezen a szakaszon levő töltésekre $F = qvB$ erő hat, ami megfelel egy $E = vB$ térerősség hatásának. Emiatt $d\ell E = \delta\mathcal{E} = d\ell dx B/dt = d\mathcal{F}/dt$.

Időfüggés esetén módosítani kell a rot \mathbf{B} sztatikában megismert egyenletét is, hiszen most

$$\text{div} [\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{E}) \quad \Rightarrow \quad \text{div} \left[\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right] = 0. \quad (3.3)$$

Innen ugyan nem következik egyértelműen, de a sztatikával ekkor kapunk egyszerűen egyezést, ha a divergencia argumentuma nulla, vagyis

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (3.4)$$

Ezzel teljes a négy Maxwell egyenlet, összefoglalva

$$\boxed{\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \end{aligned}} \quad (3.5)$$

Jelölés: miután $\mu_0 \varepsilon_0$ dimenziója $(s/m)^2$, így egy sebesség dimenziójú mennyiség inverz négyzete; ezért írjuk

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad \Rightarrow \quad c = 2.99 \cdot 10^8 \frac{m}{s}. \quad (3.6)$$

c fizikai jelentése a fénysebesség lesz, l. később.

Megjegyzés: a továbbiakban olykor az időderiváltat ∂_t alakban fogjuk írni.

3.1.1 Vektor- és skalárpotenciál

Mivel $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, ezért továbbra is igaz, hogy egy vektorpotenciál rotációja:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.7)$$

Ha ezt visszaírjuk az \mathbf{E} egyenletébe

$$0 = \operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot} [\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}] \Rightarrow \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} = -\operatorname{grad} \Phi \Rightarrow \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad (3.8)$$

vagyis a skalárpotenciál valamivel bonyolultabban jelentkezik az elektromos tér kifejezésében.

Ha ezeket visszaírjuk a Maxwell-egyenletekbe:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \mathbf{E} &= \Delta \Phi + \partial_t \nabla \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\operatorname{rot} \mathbf{B} &= \Delta \mathbf{A} - \nabla(\nabla \mathbf{A}) = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \partial_t \Phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

\mathbf{A} és Φ nem fizikai mennyiségek, csupán \mathbf{E} és \mathbf{B} azok. Emiatt ha olyan vektor- illetve skalárpotenciált választunk, amely ugyanazt az \mathbf{E} -t illetve \mathbf{B} -t adja, akkor ez ekvivalens az eredeti választással (mértékinvariancia, mértékszabadság). Időfüggő esetben \mathbf{A} -t továbbra is egy gradienssel lehet megváltoztatni, viszont az elektromos tér bonyolultabb kifejezése miatt a skalárpotenciál másképp változtatandó:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (3.10)$$

A mértéktranszformációval összeköthető \mathbf{A} és Φ terek ekvivalenciaosztályokat jelölnek ki az összes téren belül: ezek a mérték-orbitok (mérték-pályák).

Konkrét számolásokhoz rögzíteni kell a mértékszabadságot. Ehhez feltételt kell adnunk az \mathbf{A} illetve Φ terekre (mértékfeltétel vagy egyszerűen csak mérték), melyet a mérték-orbitokban csak egy elem teljesít: ez a mértékrögzítés. Vannak különösen jól bevált mértékek:

- Coulomb-mérték: itt előírjuk a $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ feltételt. Ez teljesíthető, hiszen ha $\operatorname{div} \mathbf{A} \neq 0$ eredetileg, akkor megkövetelve a $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$ -t kapjuk

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{A}' = \operatorname{div} \mathbf{A} + \Delta \Psi \Rightarrow \Delta \Psi = -\operatorname{div} \mathbf{A}, \quad (3.11)$$

amely egyenlet megoldható, pontosabban marad benne egy térben állandó de esetleg időfüggő konstans. Ebben az esetben a skalárpotenciál egyenlete ugyanaz mint a stacionárius esetben:

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.12)$$

Ezzel a megoldással rögzítjük az időfüggő konstans értékét nullára.

Miután megvan a Φ értéke, visszaírva a második egyenletbe:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \Phi. \quad (3.13)$$

Itt a bal oldal divergenciája nulla, és ezzel konzisztens a jobb oldal is, hiszen $-\mu_0$ -at kiemelve:

$$\operatorname{div} [\mathbf{J} - \varepsilon_0 \partial_t \nabla \Phi] = \operatorname{div} \mathbf{J} - \varepsilon_0 \partial_t \Delta \Phi = \operatorname{div} \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0 \quad (3.14)$$

a kontinuitási egyenlet miatt. Fogalmazhatunk úgy is, hogy \mathbf{J} -t felbontjuk transzverzális és longitudinális részre, hogy

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_\ell, \quad \nabla \mathbf{J}_t = 0, \quad \text{és} \quad \nabla \times \mathbf{J}_\ell = 0, \quad (3.15)$$

akkor csak a transzverzális módus szerepelhet az előző egyenlet jobb oldalán:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_t. \quad (3.16)$$

- Lorentz-mérték (sugárzási mérték): ekkor azt követeljük meg, hogy

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0. \quad (3.17)$$

Ebben az esetben mindkét egyenlet ugyanolyan alakot ölt:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (3.18)$$

Láthatóan mindkét mértékben a tér- és időderiváltak egy kombinációja jelenik meg:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2, \quad (3.19)$$

ez a d'Alambert operátor. Ezzel

$$\square \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (3.20)$$

3.1.2 Maxwell-egyenletek anyag jelenlétében

Anyag jelenlétében ugyanazokat a gondolatokat használhatjuk mint időfüggetlen esetben, egy helyen kell csupán módosítani: most az időfüggő indukciós töltések áramként jelennek meg. A teljes áram

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{mikr} + \mathbf{J}_{ind}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{J}_{mikr} = \text{rot } \mathbf{M}, \quad (3.21)$$

az indukciós töltések mozgásából származó áram pedig

$$0 = \partial_t \rho_{ind} + \text{div } \mathbf{J}_{ind} = \text{div } [\mathbf{J}_{ind} - \partial_t \mathbf{P}]. \quad (3.22)$$

A zárójel rotációként írható, ez azonban \mathbf{J}_{mikr} korrekcióját jelenti, vagyis vehetjük nullának. Ekkor

$$\mathbf{J}_{ind} = \partial_t \mathbf{P}. \quad (3.23)$$

Ezzel:

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{mikr} + \mathbf{J}_{ind} = \mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{P} \Rightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}. \quad (3.24)$$

Vagyis közegeben a Maxwell-egyenletek:

$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D} &= \rho, & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.25)$

Ennek megoldásához kellene a $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ illetve $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ konstitúciós relációk, most már időfüggő esetre.

3.1.3 Az elektromos és mágneses tér egyenletei

Időfüggés akkor fontos, ha elég gyorsak a terek időbeli változásai, különben végig stacionárius esetet tekinthetünk (azaz teljesen elhanyagolhatjuk az időderiváltakat). Ez a legtöbb esetben azt jelenti, hogy az időfüggés jóval gyorsabb annál, hogy az anyagban a domainfalak jelentősen átrendeződhessenek. Ezért ha az időfüggés fontos, akkor a lineáris közelítés jó lesz mind az elektromos, mind a mágneses terek esetén.

Homogén lineáris anyagban vagy vákuumban igaz:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{E} &= \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \rho - \Delta \mathbf{E} = -\partial_t \text{rot } \mathbf{B} = -\mu \partial_t \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} \\ \text{rot rot } \mathbf{B} &= \text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B} = \mu \text{rot } \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \text{rot } \mathbf{E} = \mu \text{rot } \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

azaz

$$\begin{aligned} \square \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu \partial_t \mathbf{J} \\ \square \mathbf{B} &= -\mu \nabla \times \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Vagyis a \mathbf{E} illetve \mathbf{B} terekre is a d'Alambert operátor adja az időfejlődést.

3.1.4 Jelenségek vezetőkben

Az áram illetve töltéssűrűséget megadhatjuk külsőleg is. Ha azonban szabad töltéshordozókkal rendelkező vezetőket tekintünk, akkor gyakran eltekinthetünk a szabad töltések jelenlététől, azaz $\rho = 0$, és feltehetjük, hogy az áramsűrűség lineárisan függ a térerősségtől

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{Ohm törvény}). \quad (3.28)$$

Ezzel a Maxwell egyenletek zárttá válnak. A fenti átírással

$$\begin{aligned} \square \mathbf{E} &= \mu \sigma \partial_t \mathbf{E}, & \Rightarrow & \quad \Delta \mathbf{E} = \mu \sigma \partial_t \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} \\ \square \mathbf{B} &= \mu \sigma \partial_t \mathbf{B}, & \Rightarrow & \quad \Delta \mathbf{B} = \mu \sigma \partial_t \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ez a *távíró-egyenlet*. Két határesetre, ha a terek nagyon gyorsan változnak, ekkor a második tag dominál, illetve, ha viszonylag lassan, ekkor az első tag adja a domináns járulékot. Először nézzük ez utóbbi, kvázistacionárius esetet.

3.2 Elektromágneses tér energiája

Ha mágneses tér is jelen van, akkor az energia kifejezése megváltozik. Mivel a mágneses tér létrehozásakor az indukció jelensége fontos, ezért nem hanyagolhatjuk el az időfüggést.

Az időfüggést felhasználva azonban az energia- és impulzusmegmaradás egy más szemléletét kapjuk. Ehhez nézzük meg, hogy egy töltés mozgásakor mekkora teljesítményt kell leadnunk: a teljesítmény általában $P_F = \mathbf{v} \mathbf{F}$; ha az erő elektromágneses kölcsönhatásból származik, akkor

$$P_F = \mathbf{v} q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q \mathbf{v} \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad P_F = \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (3.30)$$

A tér felépítéséhez szükséges teljesítmény ennek ellentetje. Ezért

$$P = -P_F = - \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad p = -\mathbf{E} \mathbf{J} \quad (3.31)$$

teljesítmény-sűrűség definiálható. Ezt átírhatjuk a Maxwell egyenletek segítségével

$$-\mathbf{E} \mathbf{J} = \mathbf{E} (-\text{rot } \mathbf{H} + \partial_t \mathbf{D}) = \mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \partial_t \mathbf{B} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E}. \quad (3.32)$$

Az első két tag teljes időderivált alakjában írható

$$\mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \partial_t \mathbf{B} = \partial_t w, \quad \delta w = \mathbf{E} \delta \mathbf{D} + \mathbf{H} \delta \mathbf{B} \quad (3.33)$$

Lineáris anyagokban:

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H}) = \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2. \quad (3.34)$$

Az utolsó két tag teljes divergencia; definiálva

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.35)$$

Poynting-vektort

$$\text{div } \mathbf{S} = \partial_i \varepsilon_{ijk} (E_j H_k) = H_k \varepsilon_{ijk} \partial_i E_j - E_j \varepsilon_{jik} \partial_i H_k = \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H}. \quad (3.36)$$

Vagyis azt kapjuk, hogy

$$\partial_t w + \text{div } \mathbf{S} + \mathbf{J} \mathbf{E} = 0. \quad (3.37)$$

A teljes térre integrálva a divergencia nem ad járulékot, azaz

$$\partial_t \int d^3 \mathbf{x} w = \int d^3 \mathbf{x} (-\mathbf{J} \mathbf{E}) = P, \quad (3.38)$$

vagyis a w integrálja az elektromágneses tér energiájaként értelmezhető, w maga ezért az energiasűrűség. Valóban, csupán az elektromos részt tekintve már találkoztunk ezzel a kifejezéssel.

Emiatt (3.37) az energia megmaradását fejezi ki mérlegegyenlet formájában. Ebben az egyenletben \mathbf{S} az energiaáram, $\mathbf{J}\mathbf{E}$ pedig az elektromágneses térben mozgó áramok energiaváltozása.

Itt is megtehetjük azt, hogy a tér forrását, azaz az áramsűrűséget rögzítjük, és az anyagot változtatjuk. Vonjuk ki az anyag jelenlétében érvényes energiát az anyag nélkül érvényes energiából. Mivel a források ugyanazok:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) \delta t = \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{J}_0\mathbf{E} - \mathbf{J}\mathbf{E}_0) \delta t. \quad (3.39)$$

Béírva a $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D}$ kifejezést, ugyanazt kell végrehajtani, mint fent:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{H}_0 \delta \mathbf{B} - \mathbf{H} \delta \mathbf{B}_0 + \mathbf{E} \delta \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \delta \mathbf{D}). \quad (3.40)$$

Lineáris anyagban

$$W' = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{H}_0 \mathbf{B} - \mathbf{H} \mathbf{B}_0 + \mathbf{E} \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \mathbf{D}). \quad (3.41)$$

Kihasználva, hogy $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ és $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, kapjuk

$$W' = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{M} \mathbf{B}_0 - \mathbf{P} \mathbf{E}_0). \quad (3.42)$$

A második tag ismerős, az első a mágneses anyag járuléka. De ne felejtjük el, hogy ha az áramhurkok rögzítettek, akkor változó mágneses tér feszültséget indukál, ami csökkenteni igyekszik az áramokat. Vagyis kívül is munkát kellett végezni az áramok fenntartása érdekében. Ezért a mágneses rendszer inkább a konstans potenciálban mozgatott dielektrikum példájával analóg.

3.2.1 Az impulzus mérlegegyenlete

Hasonló módon járhatunk el az impulzusváltozásnál is: ha egy próbatöltést helyezünk az elektromágneses térbe, akkor a rá ható erő a Lorentz erő:

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{x} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (3.43)$$

Átalakítva a jobb oldalt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} - \mathbf{B} \times (\text{rot } \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D}) &= \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \partial_t \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} = \\ \partial_t (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{D} + \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} + \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} &= \\ -\partial_t (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} + \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Az első tag teljes időderivált, a második tag teljes divergencia, hiszen

$$(\mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E})_i = E_i \partial_j D_j - \varepsilon_{kij} D_j \varepsilon_{klm} \partial_l E_m = E_i \partial_j D_j - D_j \partial_i E_j + D_j \partial_j E_i = \partial_j \left(E_i D_j - \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{E} \delta_{ij} \right), \quad (3.45)$$

lineáris anyagban. Vagyis

$$-(\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})_i = \partial_t g_i + \partial_j \left(-E_i D_j - H_i B_j + \frac{1}{2} (\mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H}) \delta_{ij} \right). \quad (3.46)$$

Ennek értelmezése: a jobb oldal a testen végzett impulzusváltozás-sűrűség. Zárt térfogatban megmarad az impulzus, vagyis az elektromos tér impulzusváltozása a mechanikai impulzusváltozással ellentétes. Nyitott térfogat esetén az impulzus kifolyhat a felületen. Emiatt

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (3.47)$$

az impulzus-sűrűség,

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H}) \delta_{ij} - E_i D_j - H_i B_j \quad (3.48)$$

az impulzusáramsűrűség, vagy Maxwell-féle feszültségtenzor.

3.3 Kvázistacionárius eset

Ha az elektromágneses terek változása nem túl gyors, akkor az $1/c^2$ -tel arányos tagokat elhagyhatjuk. A D'Alambert operátorból a Laplace operátor marad, így a megfelelő egyenletek (Lorentz mértéket használva) lineáris anyagban

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \Delta\mathbf{A} &= -\mu\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.\end{aligned}\quad (3.49)$$

3.3.1 Indukciós együttható

Vegyünk változó áramsűrűségű rendszert homogén közegben. Egy kijelölt $C = \partial F$ görbe mentén mérhető elektromotoros erő ekkor

$$\mathcal{E}_C = -\partial_t \int_F d\mathbf{f}\mathbf{B} = -\partial_t \oint_C ds\mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_C ds \int d^3\mathbf{x}' \frac{\partial_t \mathbf{J}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.\quad (3.50)$$

Tegyük fel, hogy az áramok vezetőkben folynak, és a vezetőkben az árameloszlás térbeli eloszlása nem változik időben, csak a nagysága. Vagyis

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{x}') = \sum_i I_i(t) \mathbf{j}_i(\mathbf{x}').\quad (3.51)$$

Ezt visszairva kapjuk:

$$\mathcal{E}_C = -\sum_i L_{Ci} \dot{I}_i, \quad L_{Ci} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C ds \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.\quad (3.52)$$

Az L csak az árameloszlás geometriájától függ, azaz időben állandó, neve indukciós együttható.

Ha vékony vezetőkéről van szó, amelyek C_i görbék mentén folynak, akkor az k . körben ébredő elektromotoros erő

$$\mathcal{E}_k = -\sum_i L_{ki} \dot{I}_i, \quad L_{ki} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_k} ds \oint_{C_i} ds' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},\quad (3.53)$$

L_{ki} a kölcsönös indukció együttható. $k = i$ esetén önindukciós együtthatóról beszélünk, de ekkor nem szabad a vezető vastagságát elhanyagolni.

3.3.2 Kvázistacionárius jelenségek vezetőkben

Vezetőkben (3.29) egyenletből marad

$$\Delta\mathbf{E} = \mu\sigma\partial_t\mathbf{E}, \quad \Delta\mathbf{B} = \mu\sigma\partial_t\mathbf{B}\quad (3.54)$$

hővezetési egyenlet.

Feladat: Adott homogén közegben egy $\mathbf{B}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})$ kezdeti inhomogenitás a mágneses indukcióban. Hogyan fejlődik időben?

Megoldás: Érdekes térbeli Fourier transzformációt végezni a \mathbf{B} téren

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (-k^2) \mathbf{B}(\mathbf{k}).\quad (3.55)$$

Ezzel

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} [k^2\mathbf{B} + \mu\sigma\partial_t\mathbf{B}] = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2\mathbf{B} + \mu\sigma\partial_t\mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{k}) = \mathbf{b}(\mathbf{k}) e^{-\frac{k^2 t}{\mu\sigma}}.\quad (3.56)$$

Láthatóan a mágneses tér konstanshoz tart, hiszen a konstans részre $\mathbf{k} = 0$, az nem csillapodik. Minél nagyobb a hullámszám, azaz minél nagyobb k , annál gyorsabban lecseng annak amplitúdója. Mivel a nagyfrekvenciás Fourier módusok felelősek az "élelért", így az időfejlődés során egyre simább lesz a mágneses indukció.

Feladat: Adott egy féltérrel kitöltő μ_r relatív permeabilitású anyag. Kívül $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$ mágneses tér van, ahol \mathbf{H}_0 konstans. Milyen lesz a mágneses tér az anyagban?

Megoldás: Az anyagon belül igaz a hővezetési egyenlet \mathbf{H} -ra

$$\Delta \mathbf{H} = \mu\sigma \partial_t \mathbf{H}. \quad (3.57)$$

A határon \mathbf{H}_t és $\mu \mathbf{H}_n$ folytonos minden időpillanatban. Emiatt minden arányos $e^{-i\omega t}$ -vel, vagyis

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \Rightarrow \Delta \mathbf{h} = -i\omega\mu\sigma \mathbf{h}. \quad (3.58)$$

A kezdeti feltétel független a transzverzális koordinátáktól, így a megoldás is az lesz. Legyen a normális koordináta z , ekkor

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(z) \Rightarrow \frac{d^2 h_i}{dz^2} = -i\omega\mu\sigma h_i. \quad (3.59)$$

Ennek megoldása

$$\Rightarrow h_i(z) = h_i(0)e^{\pm\kappa z}, \quad \kappa^2 = -i\omega\mu\sigma \Rightarrow \kappa = \sqrt{-i\omega\mu\sigma} = \frac{1-i}{\delta}, \quad \text{ahol } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (3.60)$$

a behatolási mélység (skin mélység). Határfeltétel, hogy $z \rightarrow \infty$ esetén ne legyen végtelen a tér, azaz a negatív előjel számít. Ezenfelül a transzverzális H megy folytonosan át a határon, valamint a normális irányú B . Emiatt

$$\mathbf{H}_t(t, \mathbf{x}) = \mathbf{H}_{0t}e^{-i(\omega t - z/\delta) - z/\delta}, \quad H_n(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_r} H_{0n}e^{-i(\omega t - z/\delta) - z/\delta}. \quad (3.61)$$

Vagyis valamennyi komponens amplitúdója exponenciálisan lecseng δ karakterisztikus távolságon. Minél nagyobb a frekvencia, vagy minél jobb vezető az anyag, annál kisebb ez a távolság.

Ideális diamágnésnél $\delta = \infty$, azaz nincs lecsengés. Ugyanakkor a normál komponens amplitúdója le van normálva $1/\mu_r$ -rel, vagyis ha van kívül B_n , akkor belül a H_n végtelen, így az energia is $(BH/2)$. Ez azt jelenti, hogy ideális diamágnés külső felületén $B_n = 0$ kell legyen.

Az áramsűrűség:

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}(t, z) = \frac{i-1}{\delta} \mathbf{e}_z \times \mathbf{H}_t. \quad (3.62)$$

Az áramsűrűség arányos a transzverzális mágneses térrel, azaz ez is lecseng z -ben. Nagy frekvenciánál csak a vezetők felületén folyik áram \Rightarrow skin effektus.

Hővesztesség:

$$\mathcal{P} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2. \quad (3.63)$$

Egy periódusra átlagolva $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ miatt

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{\delta^2 \sigma} H_{0t}^2 e^{-2z/\delta} = \frac{\mu\omega H_{0t}^2}{2} e^{-2z/\delta}. \quad (3.64)$$

3.4 Teljes időfüggés: források nélküli megoldás

Gyorsan változó terekben, különösen ha az amplitúdó nem túl nagy, a lineáris közelítés elegendő. Ekkor részlegesen homogén közegekben ugyanazok az egyenletek igazak, mint vákuumban. Láttuk, hogy ekkor bevezethető a skalár- és vektorpotenciál. Lorentz mértékben ezek minden komponensére, Coulomb mértékben a vektorpotenciálra a d'Alambert egyenlet volt igaz. Vagyis általában vizsgálnunk kell

$$\square \Psi = -f \quad (3.65)$$

egyenletet, ahol $\Psi = \Phi$ és $f = \rho/\varepsilon$ vagy $\Psi = \mathbf{A}$ és $f = \mu \mathbf{J}$ illetve $\mu \mathbf{J}_t$ a mértéktől függően. A d'Alambert operátorban levő konstans lineáris közelítés esetén

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}, \quad (3.66)$$

n a törésmutató. A legtöbb anyagra, amelyben a fény terjedni képes, $\mu_r \approx 1$ jó közelítés. Ezért a törésmutató vizsgálatánál használhatjuk a $n \approx \sqrt{\varepsilon_r}$ képletet.

Egy ilyen egyenlet megoldása két rész összege

- a homogén rész ($f = 0$) általános megoldása
- az inhomogén rész egy partikuláris megoldása.

Most kezdjük a homogén egyenlet vizsgálatát, azaz

$$\square \Psi = 0. \quad (3.67)$$

Fourier transzformáció

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Psi(\omega, \mathbf{k}), \quad \Psi(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (3.68)$$

ekkor

$$\partial_t \rightarrow -i\omega, \quad \partial_i \rightarrow ik_i \quad \Rightarrow \quad \square \rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \quad (3.69)$$

azaz a megoldandó egyenlet

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Psi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(\omega, \mathbf{k}) = a(\mathbf{k}) 2\pi \delta(\omega - kc) + b(\mathbf{k}) 2\pi \delta(\omega + kc), \quad (3.70)$$

ahol $a(\mathbf{k})$ és $b(\mathbf{k})$ tetszőleges függvények, a 2π a kényelem kedvéért van az egyenletben. Ezt visszaírva

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b(\mathbf{k}) e^{i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}), \quad \text{ahol} \quad \omega_k = kc. \quad (3.71)$$

Mivel Ψ valós ($\Psi^*(t, \mathbf{x}) = \Psi(t, \mathbf{x})$), ezért

$$a^*(-\mathbf{k}) = b(\mathbf{k}) \quad \Rightarrow \quad \Psi(t, \mathbf{x}) = 2 \operatorname{Re} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a_0(\mathbf{k}) \cos(-\omega_k t + \mathbf{k}\mathbf{x} + \phi_{\mathbf{k}}), \quad (3.72)$$

ahol $2a(\mathbf{k}) = a_0 e^{i\phi_{\mathbf{k}}}$. Emiatt minden lineáris kifejezésben nyugodtan használhatjuk a komplex megoldást (a $b(\mathbf{k})$ -s rész nélkül), a végén elvégezzük a $2 \operatorname{Re}$ operációt.

3.4.1 Csoport- és fázissebesség

A fenti megoldás síkhullámok összegét írja le. Feledkezzünk meg egy időre arról, hogy $\omega_k = ck$, hogy a tárgyalás a későbbiekre is érvényes legyen.

Tekintsünk egyetlen módust először (monokromatikus síkhullám), és vizsgáljuk $t = 0$ -n egy kiválasztott \mathbf{x}_0 ponttal azonos fázisban levő pontok halmazát:

$$e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \omega_k t + 2n\pi. \quad (3.73)$$

Ennek megoldását $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha \hat{\mathbf{k}} + \beta \hat{\mathbf{k}}_{\perp}$ alakban keresve ($\mathbf{k}\hat{\mathbf{k}}_{\perp} = 0$):

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (v_f t + \lambda n) \hat{\mathbf{k}} + \beta \hat{\mathbf{k}}_{\perp}, \quad v_f = \frac{\omega_k}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (3.74)$$

$t = 0$ -nál tehát \mathbf{x}_0 -lal azonos fázisban van a \mathbf{k} -ra merőleges sík (hullámfront), valamint ennek λ -val való eltoltjai (hullámhossz). Az idő előrehaladtával a hullámfrontok $\hat{\mathbf{k}}$ irányában v_f sebességgel haladnak tovább (fázissebesség). Vákuumban $v_f = c = \text{állandó}$. Miután az elektromágneses hullámokat a fényvel azonosítjuk, ezért a fázissebesség a fénysebesség.

Monokromatikus síkhullámnál igaz, hogy

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - i\omega_k t \hat{\mathbf{k}}/k)} = \Psi(0, \mathbf{x} - v_f t \hat{\mathbf{k}}), \quad (3.75)$$

azaz a hullám alak csak eltolódik, nem deformálódik. Általános $a(\mathbf{k})$ esetén ez nem lesz így, a hullám gyorsan összekuszálódik. Viszont ha azonos irányú síkhullámokat teszünk össze, akkor a hullámterjedés irányát tekintve x iránynak írhatjuk

$$\Psi(t, x) = \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-i\omega_k t + ikx}. \quad (3.76)$$

Tegyük fel, hogy azon a tartományon, ahol $a(k) \neq 0$, ott ω_k lassan változik. Ekkor sorba fejthetjük valami közepes k_0 körül:

$$\omega_k = \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega_k}{dk} \right|_{k=k_0} + \dots \quad (3.77)$$

Nevezzük

$$v_{cs} = \left. \frac{d\omega_k}{dk} \right|_{k=k_0}, \quad (3.78)$$

ekkor

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-i(\omega_0 + (k - k_0)v_{cs})t + ikx} = e^{-i(\omega_0 - k_0 v_{cs})t} \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-ikv_{cs}t + ikx} = \\ &= e^{-i\omega_0(1 - v_{cs}/v_f)t} \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{ik(x - v_{cs}t)} = e^{-i\omega_0(1 - v_{cs}/v_f)t} \Psi(0, x - v_{cs}t). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Láthatóan egy fázisfaktor erejéig megmarad a hullám alakja. Ezért beszélhetünk hullámcsomagról, amely a burkolóját megtartva stabilan halad előre az időben v_{cs} sebességgel. Általában $v_{cs} \neq v_f$, kivéve, ha ω_k lineáris k -ban, mint a vákuumbeli fényterjedésnél. A fázisfaktor előtagban a fázis változása arányos $1 - v_{cs}/v_f$ -vel, vagyis nulla, ha $v_{cs} = v_f$. Ennek jelentése: a burkoló alatt az elemi hullámok v_f sebességgel propagálnak.

A fenti gondolatmenet jelentése: információt hullámcsomaggal lehet küldeni (egy monokromatikus síkhullám nem hordoz információt), vagyis az információáramlás sebessége v_{cs} . Előfordulhat bizonyos esetekben, hogy ezek a sebességek nagyobbak a fénysebességnél, ez azonban csak annak a jele, hogy ott nem használhatók ezek a fogalmak.

Ha a fázissebességet a fénysebességből a törésmutatóval képezzük, amelynek ismerjük a frekvenciafüggését:

$$v_f = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{n\omega}{c}. \quad (3.80)$$

Ekkor a csoportsebesség

$$v_{cs} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \frac{\omega}{2n} \frac{d\varepsilon_r}{d\omega}}. \quad (3.81)$$

3.4.2 Elektrodinamikai hullámok

Coulomb mértékben, végtelen térben

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = 0 &\Rightarrow \Phi = 0 \\ \square\mathbf{A} = 0 &\Rightarrow \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{A}_0(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}_0(\mathbf{k})\mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Egy monokromatikus komponensre

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} = i\omega \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{A}_0, \\ \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B}_0 = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Tehát monokromatikus síkhullámban $\hat{\mathbf{k}}$, \mathbf{E}_0 és \mathbf{B}_0 egymásra merőlegesek.

Azonban a $\hat{\mathbf{k}}$ -ra merőleges altér két dimenziós. Emiatt felvehetünk egy ortonormált bázist $\{\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, ekkor írhatjuk

$$\mathbf{E} = (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (3.84)$$

$\mathbf{e}_{1,2}$ a polarizációs vektorok; legyen $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, ekkor $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$. Együtthatóik, $\alpha_{1,2}$ lehetnek komplex mennyiségek is, amely a kétfajta polarizációjú síkhullám különböző fázisát jelentik. Valóban, az igazi térerősség a fenti mennyiség valós része, azaz:

$$\begin{aligned} \alpha_i = E_i e^{i\varphi_i} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} &= E_1 \mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{kx} - \omega t + \varphi_1) + E_2 \mathbf{e}_2 \cos(\mathbf{kx} - \omega t + \varphi_2) \\ \mathbf{B} &= \frac{E_1}{c} \mathbf{e}_2 \cos(\mathbf{kx} - \omega t + \varphi_1) - \frac{|E_2|}{c} \mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{kx} - \omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Ha $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor lineárisan polarizált a fény, ha $\varphi_1 = \varphi_2 \pm i\pi/2$, akkor cirkulárisan polarizált. Általános esetben elliptikus polarizációról beszélünk.

A hullám energiasűrűsége:

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\mathbf{E}^2 + (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})^2 \right] = \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \varepsilon_0 (E_1^2 \cos^2(\mathbf{kx} - \omega t + \varphi_1) + E_2^2 \cos^2(\mathbf{kx} - \omega t + \varphi_2)). \quad (3.86)$$

Egy periódusra átlagolva

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_1^2 + E_2^2). \quad (3.87)$$

A Poynting-vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) = \hat{\mathbf{k}} \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}^2. \quad (3.88)$$

Az energia-áram iránya tehát a hullám iránya, nagysága pedig

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{c\mu_0\varepsilon_0} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = cw. \quad (3.89)$$

3.4.3 Frekvenciafüggő permittivitás, törésmutató

Hogyan függhet a permittivitás a frekvenciától? Bocsássunk egy lineárisan polarizálható anyagra időfüggő elektromos teret. Azt várjuk, hogy a polarizáció egy adott t időpontban nem függhet a hozzá képest jövőbeli térerősségektől, csak a múltbeli értékektől. Ezt a polarizáció-sűrűsége megfogalmazva

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Theta(t-t') G(t, t') E(t') \quad (3.90)$$

Ha nincs kitüntetett időpont, akkor G csak $t-t'$ -től függhet. A fenti kifejezésben azonosíthatjuk a szuszceptibilitást, amely a térerősség és a polarizáció között teremt kapcsolatot – jelen esetben a szuszceptibilitás egy válaszfüggvény:

$$\varepsilon_0 \chi(t-t') = \Theta(t-t') G(t-t') \quad \Rightarrow \quad P(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t-t') E(t'). \quad (3.91)$$

A fenti kifejezés egy konvolúció, Fourier-transzformáltja:

$$P(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(\omega) \quad \Rightarrow \quad D(\omega) = \varepsilon_0 E(\omega) + P(\omega) = \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) E(\omega) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega), \quad (3.92)$$

vagyis valóban van frekvenciafüggés benne. \mathbf{P} és \mathbf{E} valósága miatt

$$\mathbf{P}^*(\omega) = \mathbf{P}(-\omega), \quad \mathbf{E}^*(\omega) = \mathbf{E}(-\omega) \quad \Rightarrow \quad \chi^*(\omega) = \chi(-\omega). \quad (3.93)$$

Hogy egy konkrét példát adjunk, tekintsük a mikroszkopikus polarizálhatóság modelljét, egy harmonikus potenciálban kötött, de most csillapított töltött részecskét. Bocsássunk erre a rendszerre időfüggő elektromos teret. A mozgásegyenlet 1D-ban

$$m\partial_t^2 x + \Gamma\partial_t x + Dx = qE(t) \quad \Rightarrow \quad \partial_t^2 p + \gamma\partial_t p + \omega_0^2 p = \frac{q^2}{m} E(t), \quad \text{ahol} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{m}. \quad (3.94)$$

Ennek Fourier transzformálttal a megoldása:

$$p(\omega) = \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} E(\omega) \Rightarrow P(\omega) = \frac{Nq^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} E(\omega), \quad (3.95)$$

ahol N a töltéshordozók sűrűsége. Innen, több sajátfrekvenciát is feltételezve:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \sum_j \frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{1}{\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (3.96)$$

Ha megvan $\varepsilon_r(\omega)$, akkor felírhatjuk:

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} \Rightarrow k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \Rightarrow E(t, \mathbf{x}) = E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x} \frac{\omega}{c} n(\omega)}, \quad (3.97)$$

monokromatikus hullámra.

Láthatóan ε_r -ben van imaginárius rész is, ha $\gamma \neq 0$. Valóban:

$$\text{Im} \frac{1}{\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2} - \frac{1}{\omega_j^2 + i\gamma\omega - \omega^2} \right] = \frac{\gamma\omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (3.98)$$

Emiatt

$$\text{Im} \varepsilon_r(\omega) = \sum_j \frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{\gamma\omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} > 0 \quad (3.99)$$

Ennek következtében a törésmutatónak is van képzetes része

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = n_r(\omega) + in_i(\omega), \quad n_i(\omega) > 0. \quad (3.100)$$

Ezt visszaírva az időfejlődésbe

$$E(t, \mathbf{x}) = E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x} \frac{\omega}{c} n_r(\omega)} e^{-\mathbf{k}\mathbf{x} \frac{\omega}{c} n_i(\omega)}. \quad (3.101)$$

A hullám tehát csillapodik (sosem nőhet, hiszen $n_i > 0$), elnyelődik az anyagban $\Rightarrow n_i$ *abszorpciós együttható*. Miután n_i eredete a mikroszkopikus csillapítás, úgy értelmezhetjük a fenti jelenséget, hogy az energia elnyelődik a mikroszkopikus szabadsági fokok csillapítása miatt. Szokták definiálni a κ opacitást is, mely az energiaáramsűrűség (intenzitás) csillapodásának jellemző hossza egy ρ sűrűségű anyagban.

$$S(x) = S_0 e^{-\rho\kappa x} \Rightarrow \kappa = \frac{2\omega n_i(\omega)}{c\rho}. \quad (3.102)$$

mivel a periódusra átlagolt Poynting vektor $S \sim |E|^2$.

A légkör abszorpciós együtthatója látható a 3.1 ábrán

(l. [http://en.wikipedia.org/wiki/Absorption_\(electromagnetic_radiation\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Absorption_(electromagnetic_radiation)))).

- Minél kisebb az abszorpciós együttható, annál átlátszóbb az anyag. Víz esetén egy frekvenciatartományban kicsi az $n_i \Rightarrow$ ez a látható fény tartománya. Másodrendű fázisátalakulásnál minden frekvenciatartományban megjelennek gerjeszthető módusok, így mindenhol van csillapítás \Rightarrow kritikus opaleszcencia.
- Szabad elektrongázra $\omega_j = 0$, $\gamma = 0$, vagyis

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}, \quad \omega_P^2 = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \quad (3.103)$$

ω_P a plazmafrekvencia.

– $\omega < \omega_P$ frekvencián $\varepsilon_r < 0$, vagyis $n(\omega)$ tisztán képzetes, vagyis az elektrongáz nem ereszti át a fényt.

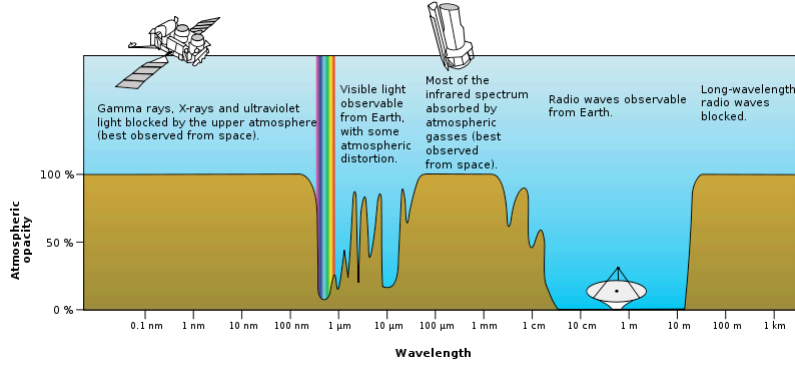


Figure 3.1: A légkör abszorpciós együtthatójának frekvenciafüggése

– $\omega > \omega_P$ frekvencián az elektromágnesben nincs csillapítás. Ugyanakkor

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} < 1 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{c}{n} > c. \quad (3.104)$$

A fázissebesség tehát nagyobb mint a fénysebesség. A csoportsebesség azonban (3.81) alapján

$$\omega \frac{d\varepsilon_r}{d\omega} = \frac{2\omega_P^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad v_{cs} = \frac{c}{n + \frac{\omega_P^2}{n\omega^2}} = \frac{nc}{n^2 + \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} = nc < c. \quad (3.105)$$

kisebbs mint a fénysebesség. $\omega = \omega_P$ -nél $n = 0$, így a csoportsebesség nulla, a fázissebesség végtelen!

- a légköri frekvenciák alsó részében az ionoszféra (amely közelíthető szabad elektromágneses sugárral) átlátszatlan, vagyis visszaveri az elektromágneses sugárzást. Ez használható rádiózásra, mert a hullámok a Föld felületén nagy távolságra is el tudnak jutni (l. http://hu.wikipedia.org/wiki/Elektromágneses_sugárzás). Az URH (VHF) hullámok frekvenciája (hullámhossza) 30-300 MHz (10-1m) már felette van a légköri plazmafrequenciának, így azok csak rövid távolságon foghatók.
- Láttuk, hogy $\varepsilon_0\chi(t) = \Theta(t)G(t)$, vagyis csak $G(t)$ -ből csak a $t > 0$ értékek számíthatnak, a $t < 0$ tartomány szabadon értelmezhető. A $G(-t) = -G(t)$ választás esetén egyszerű formulákat kapunk. Mivel szorzatfüggvény Fourier transzformáltja konvolúció, valamint

$$\Theta(\omega) = \frac{i}{\omega + i\delta} \Big|_{\delta \rightarrow 0^+} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{iG(\omega')}{\omega - \omega' + i\delta}. \quad (3.106)$$

Valós függvény Fourier transzformáltjára

$$G^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} G(t) = G(-\omega), \quad (3.107)$$

páratlan függvény Fourier transzformáltja

$$G(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} G(-t) = -G(\omega) \quad \Rightarrow \quad G^*(\omega) = -G(\omega), \quad (3.108)$$

vagyis $G(\omega)$ tiszttán imaginárius. Ekkor:

$$\text{Im} \frac{1}{\omega - \omega' + i\varepsilon} = -\pi\delta(\omega - \omega') \quad \Rightarrow \quad \text{Im} \varepsilon_r(\omega) = \frac{-iG(\omega)}{2}. \quad (3.109)$$

A fenti mikroszkopikus példában

$$G(\omega) = \sum_j \frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{2i\gamma\omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (3.110)$$

Általában a mikroszkopikus modellekből tetszőleges pozitív függvény jöhet. Ezt visszaírva az ε_r kifejezésébe:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\text{Im} \varepsilon_r(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon}. \quad (3.111)$$

Ez azt mutatja, hogy ε_r imaginárius része teljesen meghatározza az ε_r -t (Kramers-Krönig reláció). Ez a kauzalitás következménye.

- Bocsássunk anyagra időfüggő elektromos teret, legyen az időfüggés monokromatikus, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, a helyfüggéstől tekintsünk el. Ekkor kétféleképpen is leírhatjuk a bekövetkező jelenséget. Egyrészt a térerősség polarizációsűrűséget hoz létre; lineáris anyagban:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \mathbf{P}_0 = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_0. \quad (3.112)$$

A polarizáció változása az indukált töltések mozgását jelenti, vagyis indukált áramot jelent (l. 3.1.2 fejezet)

$$\mathbf{J} = \partial_t \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \mathbf{J}_0 = -i\omega \mathbf{P}_0 = -i\omega \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_0. \quad (3.113)$$

Másrészt ha az anyag vezető, akkor úgy is leírhatjuk a jelenséget, hogy a vezetőképesség miatt mozdulnak el a töltések:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \Rightarrow \sigma = -i\omega \varepsilon_0 \chi(\omega) \Rightarrow \varepsilon_0 \chi(\omega) = \frac{i\sigma}{\omega} \Rightarrow \varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \quad (3.114)$$

kis frekvencián. Vagyis vezetők esetén azt várjuk, hogy a permittivitás imaginárius része divergál kis frekvenciákra, az együttható éppen a vezetőképesség.

A molekuláris modellünkben nem kötött, de csillapított elektrongázra $\omega_0 = 0$, azaz

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{-i\omega\gamma - \omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1 + \frac{Nq^2}{m\gamma} \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \Rightarrow \sigma = \frac{Nq^2}{m\gamma}, \quad (3.115)$$

a Drude-model eredménye.

3.4.4 Elektromágneses hullámok közegek határán

Homogén közegek határán ki kell elégíteni a határfeltételeket:

$$D_n, B_n, \mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t \text{ folytonosak.} \quad (3.116)$$

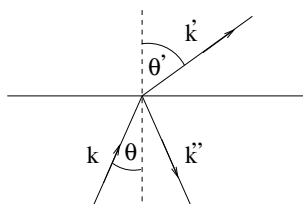


Figure 3.2: Hullám közeghatáron

Tekintsünk egy síkhullámot, amely egy \mathbf{n} normálisú sík közeghatárra érkezik (3.2): ahonnan érkezik, ott ε , ahova ott ε' legyen a permittivitás. Az eredmény három hullám összege lesz: a beeső hullám mellett egy átmenő (megőrt) és egy visszavert hullámé. Legyen a beeső hullám

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}. \quad (3.117)$$

A határfeltételek minden időpontban való érvényessége miatt a megtört és a visszavert hullámra is $e^{-i\omega t}$ az időfejlődés. A megtört hullám jellemzői legyenek \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{k}' , a visszavert hullámra \mathbf{E}'' , \mathbf{B}'' , \mathbf{k}'' . Jelöljük $\hat{\mathbf{k}}\mathbf{n} = \cos \theta$, és $\hat{\mathbf{k}}'\mathbf{n} = \cos \theta'$. Feltesszük azt, hogy $\hat{\mathbf{k}}''\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{k}}\mathbf{n}$, vagyis a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel.

Koordinátázzuk a rendszert úgy, hogy $\hat{\mathbf{e}}_z \parallel \mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}' = \begin{pmatrix} \sin \theta' \\ 0 \\ \cos \theta' \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}'' = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

A polarizációhoz érdemes a feladat geometriájához illeszkedő bázist választani:

$$1.) \quad \mathbf{E}\mathbf{n} = 0, \quad 2.) \quad \mathbf{E} \in \{\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{n} \text{ sík}\} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{n} = 0. \quad (3.119)$$

Ezek a feltételek igazak maradnak a megtört és visszavert hullámra is.

1. Itt $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}, \hat{\mathbf{k}}$, azaz, felhasználva $\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0$ összefüggést

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E'_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}''_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E''_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_0 = \frac{E_0}{c} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}'_0 = \frac{E'_0}{c} \begin{pmatrix} -\cos \theta' \\ 0 \\ \sin \theta' \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}''_0 = \frac{E''_0}{c} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.120)$$

A határfeltételek

$$\begin{aligned} D_n &= \text{folyt.} & -- \\ \mathbf{E}_t &= \text{folyt} & E_0 + E''_0 = E'_0 \\ B_n &= \text{folyt.} & \frac{1}{c}(E_0 + E''_0) \sin \theta = \frac{1}{c'}E'_0 \sin \theta' \\ \mathbf{H}_t &= \text{folyt} & \frac{1}{c\mu}(E_0 - E''_0) \cos \theta = \frac{1}{c'\mu'}E'_0 \cos \theta'. \end{aligned} \quad (3.121)$$

A B_n illetve \mathbf{E}_t egyenletekből következik

$$\frac{1}{c_1} \sin \theta = \frac{1}{c_2} \sin \theta' \Rightarrow n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta' \quad (3.122)$$

a Snellius-Descartes törvény. Innen megkapjuk a θ' -t.

A térerősségekre a megoldás

$$E''_0 = E_0 \frac{\mu' c' \cos \theta - \mu c \cos \theta'}{\mu' c' \cos \theta + \mu c \cos \theta'}, \quad E'_0 = E_0 \frac{2\mu' c' \cos \theta}{\mu' c' \cos \theta + \mu c \cos \theta'}. \quad (3.123)$$

2. Ebben az esetben \mathbf{B} teljesen transzverzális, azaz a felírandó egyenletek

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1}(B_0 + B''_0) &= \frac{1}{\mu_2}B'_0 \\ (E_0 - E''_0) \cos \theta &= E'_0 \cos \theta' \\ \varepsilon_1(E_0 + E''_0) \sin \theta &= \varepsilon_2 E'_0 \sin \theta'. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Az első és utolsó egyenlet összehasonlításából most is a Snellius-Descartes törvény következik. A megoldás:

$$E''_0 = E_0 \frac{\mu_1 c_1 \cos \theta - \mu_2 c_2 \cos \theta'}{\mu_1 c_1 \cos \theta + \mu_2 c_2 \cos \theta'}, \quad E'_0 = E_0 \frac{2\mu_2 c_2 \cos \theta}{\mu_1 c_1 \cos \theta + \mu_2 c_2 \cos \theta'}. \quad (3.125)$$

Formálisan a $\mu \rightarrow 1/\varepsilon$ helyettesítéssel adódik az előző eredményből.

Tanulságok

- $n' < n$ esetén $\sin \theta' > \sin \theta$, vagyis van olyan θ_0 , amelyre nincs megoldás, azaz nincs megtört fény: $\sin \theta_0 = n'/n$.
- a 2.) esetben $\mu_1 = \mu_2$ -t választva elérhető, hogy $E''_0 = 0$. Ennek feltétele

$$c_1 \cos \theta = c_2 \cos \theta' \Rightarrow \tan \theta = \frac{n'}{n}. \quad (3.126)$$

Ez a Brewster-szög, ekkor a visszavert hullám a felülettel párhuzamosan polarizált.

3.4.5 Hullámterjedés határfeltételekkel

Vegyünk ideális vezetőkkel határolt teret: milyen hullámok terjedhetnek itt?

Ideális vezető \Rightarrow ideális diamágnes \Rightarrow belül sem \mathbf{E} sem \mathbf{B} nem létezhet, vagyis a határon

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad B_n = 0 \quad (3.127)$$

Hullámvezető

Hullámvezető egy ideális vezetők által határolt cső. Itt most egy egyszerűsítő tárgyalást veszünk, ahol a határoló felületek síkok (gyakorlaton lesz részletesebben)

Most az egyszerűség kedvéért vegyünk téglalap keresztmetszetű egyenes csövet, a koordináta-rendszer z irányát vegyük a cső irányának. A cső mérete legyen $a \times b$. Ekkor

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, z, t) = E_z(x, 0, z, t) = E_x(x, b, z, t) = E_z(x, b, z, t) = E_y(0, y, z, t) = E_z(0, y, z, t) = E_y(a, y, z, t) = E_z(a, y, z, t) = 0, \\ B_y(x, 0, z, t) = B_y(x, b, z, t) = B_x(0, y, z, t) = B_x(a, y, z, t) = 0. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Érdeemes az általános konfigurációkat, ahol E_z és B_z nem nulla, két hullám szuperpozíciójaként kezelni, ahol vagy $E_z = 0$ (transzverz elektromos, TE módus) és $B_z = 0$ (transzverz mágneses, TM módus).

TE eset Itt az elektromos teret érdemes felírni. Ez legyen egy z irányban terjedő hullám, az $x - y$ síkban előre- és hátrafutó megoldást is veszünk. A határfeltételeket kielégítő megoldás:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \\ E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_x = \frac{n\pi}{a}, \quad k_y = \frac{m\pi}{b}, \quad \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (3.129)$$

Valójában ez utóbbi képlet k_z -re ad megszorítást, hiszen a többi tag adott.

A $\text{div } \mathbf{E} = 0$ feltétel:

$$0 = e^{-i\omega t + ik_z z} \sin k_x x \sin k_y y (E_{0x} k_x + E_{0y} k_y) \Rightarrow E_{0x} k_x + E_{0y} k_y = 0. \quad (3.130)$$

Mivel $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = i\omega \mathbf{B}$, ezért

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \frac{-i}{\omega} e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} -ik_z E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \\ ik_z E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \\ (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \cos k_x x \cos k_y y \end{pmatrix} = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} -\frac{k_z}{\omega} E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \\ \frac{k_z}{\omega} E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \\ \frac{-i}{\omega} (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \cos k_x x \cos k_y y \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

A $\text{div } \mathbf{B} = 0$ és $\text{rot } \mathbf{B} = c^{-2} \partial_t \mathbf{E}$ automatikusan teljesülnek. Láthatóan $B_z \neq 0$, különben $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ lenne.

Egy megadott n, m párra a cső keresztmetszetén álló hullámok alakulnak ki, míg a cső mentén k_z hullámszámmal és ω frekvenciával terjed a hullám. A z irányú terjedés sebessége

$$v_f = \frac{\omega}{k_z} = c \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{k_z a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{k_z b}\right)^2} > c, \quad v_{cs} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{k_z a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{k_z b}\right)^2}} < c. \quad (3.132)$$

ω nő a k_z -vel, de $k_z = 0$ esetén sem lesz nulla. Ez a legkisebb frekvencia, amely még terjedni tud a hullámvezetőben (levágási frekvencia): ha $a > b$, akkor $n = 1, m = 0$, azaz $k_x = \pi/a, k_y = 0$ választással ¹, akkor

$$\omega_{min} = \frac{c\pi}{a}. \quad (3.133)$$

Ha ennél kisebb frekvenciájú hullámot bocsátunk a hullámvezetőre, akkor k_z tisztán imaginárius lesz, azaz exponenciálisan elhálnak a terek. Másrészt kis k_z -kre $v_{cs} \sim k_z$, azaz egyre lassabban terjednek ezek a hullámok.

¹Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor $E_y \neq 0$, azaz ez egy nem nulla megoldást ír le.

Az energiaáramláshoz kiszámíthatjuk a Poynting vektort $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ képlettel. Figyelnünk kell, hogy itt már a komplex kifejezések valós részét kell beírni. Az x és y komponens:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{\mu}(E_y H_z - E_z H_y) = \frac{k_y^2 - k_x^2}{4\mu k_x} E_{0y}^2 \sin(2\omega t - 2k_z z) \sin(2k_x x) \cos^2(k_y y), \\ S_y &= \frac{1}{\mu}(E_z H_x - E_x H_z) = \frac{k_y^2 - k_x^2}{4\mu k_y} E_{0x}^2 \sin(2\omega t - 2k_z z) \cos^2(k_x x) \sin(2k_y y). \end{aligned} \quad (3.134)$$

Ezek egy periódusra vett átlaga nulla. A z komponens kiszámítása:

$$S_z = \frac{1}{\mu}(E_x B_y - E_y B_x) = \frac{k_z}{\mu\omega}(E_x^2 + E_y^2) = \frac{k_z}{\mu\omega} \sin^2(\omega t - k_z z) [E_{0x}^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y + E_{0y}^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y]. \quad (3.135)$$

Egy periódusra, valamint a felületre átlagolva

$$\langle S_z \rangle = \frac{k_z}{8\mu\omega} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2). \quad (3.136)$$

Az energiasűrűség kifejezése, rögtön beírva az egy periódusra, valamint a felületre vett átlagolást

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon}{2} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) + \frac{1}{2\mu\omega^2} (k_z^2 E_{0x}^2 + k_z^2 E_{0y}^2 + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x})^2 + (k_x E_{0x} + k_y E_{0y})^2) \right) = \\ &= \frac{1}{16\mu\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} + k_z^2 + k_x^2 + k_y^2 \right) (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) = \frac{1}{8\mu c^2} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2). \end{aligned} \quad (3.137)$$

Azaz

$$\langle S_z \rangle = v_{cs} \langle w \rangle. \quad (3.138)$$

TM eset Az előző esethez hasonlóan tárgyalható, de most a mágneses indukciót érdemes felírni. Ez ismét legyen egy z irányban terjedő hullám, az $x - y$ síkban állóhullámokkal. A határfeltételeket kielégítő megoldás:

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \\ B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_x = \frac{n\pi}{a}, \quad k_y = \frac{m\pi}{b}, \quad \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (3.139)$$

A $\text{div } \mathbf{B} = 0$ miatt

$$B_{0x} k_x + B_{0y} k_y = 0. \quad (3.140)$$

Az elektromos tér a $\text{rot } \mathbf{B} = c^{-2} \partial_t \mathbf{E} = -i\omega/c^2 \mathbf{E}$ egyenletből következik:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \frac{ic^2}{\omega} e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} -ik_z B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \\ ik_z B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \\ (k_y B_{0x} - k_x B_{0y}) \sin k_x x \sin k_y y \end{pmatrix} = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} \frac{k_z c^2}{\omega} B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \\ -\frac{k_z c^2}{\omega} B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \\ \frac{ic^2}{\omega} (k_y B_{0x} - k_x B_{0y}) \sin k_x x \sin k_y y \end{pmatrix} \quad (3.141)$$

A $\text{div } \mathbf{E} = 0$ és $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ egyenletek automatikusan teljesülnek.

Ebben a csatornában a minimális frekvencia nem jöhet az $n = 1, m = 0$ választásból, mert ekkor $k_y = 0$, azaz (3.140) miatt $B_{0x} = 0$, és így $\mathbf{B} = 0$ lenne. A minimális frekvenciához $n = m = 1$ tartozik,

$$\omega_{min} = c\pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}. \quad (3.142)$$

Üregrezonátor

Ha a z irányt is lezárjuk c távolságban, akkor a határfeltételekhez hozzájön még

$$E_x(x, y, 0, t) = E_y(x, y, 0, t) = E_x(x, y, c, t) = E_y(x, y, c, t) = 0, \quad B_z(x, y, 0, t) = B_z(x, y, c, t) = 0. \quad (3.143)$$

Ekkor a z irányban is állóhullámok alakulnak ki. A TE esetben

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_x = \frac{n\pi}{a}, \quad k_y = \frac{m\pi}{b}, \quad k_z = \frac{\ell\pi}{c} \quad \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (3.144)$$

a TM esetben

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \\ B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \frac{ic^2 k_z}{\omega} e^{-i\omega t} \sin k_z z \begin{Bmatrix} B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \\ -B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \end{Bmatrix}. \quad (3.145)$$

Az üregben csak bizonyos frekvenciák képesek csillapodás nélkül megmaradni, ezek az üreg sajátfrekvenciái.

3.5 Teljes időfüggés: az inhomogén rész megoldása

Az inhomogén résznek csak egy parciális megoldását kell keresnünk, hiszen a határfeltételek kielégítéséhez felhasználhatjuk a homogén rész megoldását. A megoldandó egyenletet így a végtelen térre terjeszthetjük ki:

$$\square \Psi = -f. \quad (3.146)$$

3.5.1 Green-függvények

Az általános forrás helyett áttérünk a pontforrásra, ahogyan ezt a sztatikában is tettük:

$$\square_x G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = -\delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Rightarrow \psi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{x}' G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') f(t', \mathbf{x}'). \quad (3.147)$$

A G megoldást itt is Green-függvénynek hívjuk. Ahogyan korábban is, a jobb oldal $t - t'$ illetve $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ függése miatt $G(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Ezért $\mathbf{x}' = 0$ -t vehetünk.

Hogy G -t meghatározzuk, végezzünk időbeli Fourier transzformációt. Fizikailag egy időben pontszerű forrás helyett egy oszcilláló forrás terét számítjuk ki. Mivel $\delta(t) \rightarrow 1$, valamint $\partial_t^2 \rightarrow -\omega^2$, ezért

$$(\Delta + k^2)G(\omega, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}), \quad \omega = kc. \quad (3.148)$$

A $\Delta + k^2$ kifejezést nevezik *Helmholtz operátornak*.

A jobb oldal, valamint a határfeltételek is forgásinvariánsak, ezért G is az lesz, azaz gömbi koordinátarendszerben felírva csak r -től fog függeni. Ezt felhasználva térjünk át gömbi koordinátarendszerre, és tekintsük egyelőre az $r \neq 0$ esetet:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rG) + k^2 G = 0, \quad \text{ha } r \neq 0. \quad (3.149)$$

Ez másodrendű differenciálegyenlet, megoldásai²

$$G_{R/A}(\omega, r) = C \frac{e^{\pm ikr}}{r}. \quad (3.150)$$

Az arányossági tényezőhöz a forrást kell figyelembe venni. Mivel $\mathbf{x} = 0$ -nál végtelen nagy a forrás, ezzel a Laplace-operátor végtelen értéke lesz egyensúlyban, vagyis k értéke nem számít az arányossági tényezőben. $k = 0$ -nál viszont a Laplace egyenlet Green-függvénye jön be, amely $1/(4\pi r)$, azaz az arányossági tényező $1/(4\pi)$. Emiatt:

$$G_{R/A}(\omega, r) = \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}. \quad (3.151)$$

²Valójában elég lenne egy partikuláris megoldás, de a kényelem, és a fizikai interpretáció miatt megtartjuk mindkét megoldást most.

Ennek fizikai jelentése: egy oszcilláló ponttöltés terének amplitúdója. Visszaírva az időfüggést

$$\frac{e^{-i\omega t \pm ikr}}{4\pi r} = \frac{e^{-i\omega(t \mp r/c)}}{4\pi r}. \quad (3.152)$$

Az azonos fázisú pontok halmaza $r = \pm ct + \lambda n$, azaz ki- illetve befutó gömbhullámokat ír le.

Hogy a valós időbeli megoldást is megkapjuk, vissza kell Fourier transzformálnunk a megoldást:

$$G_{R/A}(t, r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{\pm i\omega r/c} = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t \mp \frac{r}{c}\right). \quad (3.153)$$

Vagyis az eredeti Green-függvények

$$G_{R/A}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right). \quad (3.154)$$

3.5.2 A Green-függvények fizikai értelmezése

Vegyünk az R Green-függvényt. Ha adott egy $f(t, \mathbf{x})$ forrás, akkor az ehhez tartozó megoldás:

$$\Psi_R(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) f(t', \mathbf{x}') = \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right). \quad (3.155)$$

Vegyünk pl. egy pontforrást az $\mathbf{x} = 0$ -ban, azaz $f(t, \mathbf{x}') = q(t)\delta(\mathbf{x}')$. Ekkor

$$\Psi_R(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} q\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right). \quad (3.156)$$

Ha q = állandó, akkor visszakapjuk a sztatika eredményét q töltéssel. Ha viszont q időfüggő, akkor t, \mathbf{x} helyen a megoldás a forrás $t - r/c$ időpontbeli értékétől függ, azaz késve érkezik el a megfigyelőhöz a forrás jele. Emiatt a fenti megoldást késő, *retardált* megoldásnak hívjuk. Hogy a sztatikához hasonló képletet kapjunk, jelölhetjük

$$[f(t, \mathbf{x}')]_{\mathbf{x}ret} = f\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right) \Rightarrow \Psi_R(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{[f(t, \mathbf{x}')]_{\mathbf{x}ret}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.157)$$

A fizikai jelentés tehát: ha egy forrás $t > 0$ -n üzemel, és megadjuk a kezdeti feltételeket, akkor a megoldás

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi_0(t, \mathbf{x}) + \int d^3\mathbf{x}' \frac{[f(t, \mathbf{x}')]_{\mathbf{x}ret}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (3.158)$$

ahol a $\Psi_0(t, \mathbf{x})$ olyan szabad megoldás, amely a $t = 0$ pontban a kezdeti feltételeket szolgáltatja.

Ha ugyanezt az A Green-függvénnyel akarom megcsinálni, akkor:

$$\Psi_A(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) f(t', \mathbf{x}') = \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f\left(t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right). \quad (3.159)$$

Időben változó pontforrásra $\mathbf{x} = 0$ -ban $f(t, \mathbf{x}') = q(t)\delta(\mathbf{x}')$, azaz:

$$\Psi_A(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} q\left(t + \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right). \quad (3.160)$$

Most a t, \mathbf{x} helyen a megoldás a forrás $t + r/c$ időpontbeli értékétől függ, azaz a jövőbeli értékektől. Ezért ezt a Green-függvényt előrehozott, *avanzsált* Green-függvénynek hívjuk. Az értelmezés: ha egy forrás $t < t_0$ -ig üzemel, és megadjuk a tér értékét $t = t_0$ -nál, akkor a korábban mérhető tér:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi_0(t, \mathbf{x}) + \Psi_A(t, \mathbf{x}). \quad (3.161)$$

Elektrodinamikában, Lorentz mértékben, ha kezdetben a potenciálok $\Phi = \mathbf{A} = 0$ voltak, akkor

$$\begin{aligned}\square\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} &\Rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \square\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} &\Rightarrow \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\end{aligned}\tag{3.162}$$

Ezeket a formulákat fogjuk különböző forrásokra kiszámítani.

3.5.3 Lokalizált, oszcilláló töltésrendszerek tere

Legyen most $\rho, \mathbf{J} \sim e^{-i\omega t}$, térben pedig lokalizált. Ekkor minden megoldás $\sim e^{-i\omega t}$, vagyis $\partial_t \rightarrow -i\omega$. Lorentz mérték esetén

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{-i\omega}{c^2} \Phi \Rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{-ic^2}{\omega} \operatorname{div} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}).\tag{3.163}$$

Ezért elég csak a vektorpotenciált meghatározni; (3.162) alapján

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad k = \frac{\omega}{c}.\tag{3.164}$$

Tegyük fel, hogy a forrás mérete jóval kisebb, mint a hullámhossz $d \ll \lambda$, ellenkező esetben az egyes töltések sugárzását külön kell kezelni. Ekkor két tartomány tere érdekes: vagy $d \ll r \ll \lambda$ (közelzóna) vagy $r \gg \lambda \gg d$ (távolzóna, hullámzóna vagy sugárzási zóna), ahol $r = |\mathbf{x}|$.

Közelzóna

Ebben az esetben $k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx kr \ll 1$, vagyis az exponenst elhanyagolhatjuk:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.\tag{3.165}$$

Ebben az esetben tehát nem számít a retardálás.

Hullámzóna

Csak azokat a tagokat tartjuk meg, amelyek $1/r$ -rel arányos végeredményt adnak – az elhagyott tagok nem reprezentálnak sugárzást (l. később). A nevezőben csak a vezető tagot kell megtartani:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{d}{r^2}\right).\tag{3.166}$$

Az exponensben

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r^2 + \mathbf{x}'^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{x}'} = r\sqrt{1 - 2\frac{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'}{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right) = r - \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right).\tag{3.167}$$

Vagyis

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik(r - \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}')}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'}.\tag{3.168}$$

Az r -függő tag egy kifelé gőmbhullámot ír le, az irányfüggése módosul az integrál miatt.

Megjegyzés: itt $\mathbf{A}(r) \sim 1/r$, ez azonban nem a monopólusok jelenlétét mutatja, hanem a sugárzás jele.

Az exponensben szereplő $k|\mathbf{x}'| < kd$, azaz itt még sorba fejthetünk:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') (1 - ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}' + \dots).\tag{3.169}$$

3.5.4 Dipólsugárzás

Az első tag (3.169)-ben:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}'). \quad (3.170)$$

A sztatikában ez a tag eltűnik, itt azonban

$$\int d^3\mathbf{x} J_i = \int d^3\mathbf{x} J_j \partial_j x_i = - \int d^3\mathbf{x}' x_i \partial_j J_j = \int d^3\mathbf{x}' x_i \partial_t \varrho = \partial_t p_i = -i\omega p_i, \quad (3.171)$$

ahol p_i a dipólmomentum. Innen

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \mathbf{p}, \quad (3.172)$$

a dipólsugárzás képlete.

Hogy az elektromos illetve mágneses tereket megkapjuk, deriválni kell a vektorpotenciált. Mivel az $1/r^2$ tagokat elhagytuk, a deriválás csak az exponensre hat, azaz

$$\partial_j e^{ikr} = ik \hat{x}_j e^{ikr} \Rightarrow \nabla \rightarrow ik \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.173)$$

Emiatt

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{k\omega}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) = \frac{\omega^2}{4\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \quad (3.174)$$

Az elektromos tér

$$\mathbf{E} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{x}} = Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad Z_0 = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.7 \Omega, \quad (3.175)$$

Z_0 neve vákuum-impedancia. A Poynting vektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = Z_0 (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{H} = Z_0 \hat{\mathbf{x}} H^2 \Rightarrow S = Z_0 H^2 \quad (3.176)$$

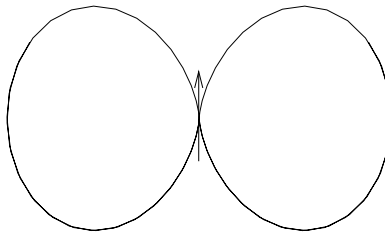
Időátlagban

$$S = \frac{Z_0}{2} H^2 = \frac{Z_0}{32\pi^2 c^2} \omega^4 \frac{p^2}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (3.177)$$

Az *intenzitás* adott térszögbe kisugárzott teljesítmény. Mivel \mathbf{S} az energiaáram, ezt egy $d\Omega$ térszögben húzódo felületre integrálni kell, hogy a kisugárzott teljesítményt megkapjuk:

$$dP = \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}} r^2 d\Omega \Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0}{32\pi^2 c^2} \omega^4 p^2 \sin^2 \theta. \quad (3.178)$$

A kisugárzott teljesítmény szögeloszlása:



A teljes kisugárzott teljesítményhez

$$\int d\Omega \sin^2 \theta = 2\pi \int_{-1}^1 dx (1-x^2) = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow P = \frac{Z_0}{12\pi c^2} \omega^4 p^2. \quad (3.179)$$

Láthatóan a kisugárzott teljesítmény $\sim \omega^4$, azaz csak nagy frekvenciákon lehet jelentős.

Feladat: Középen táplált d hosszúságú egyenes antenna sugárzása.

Megoldás: Feltesszük, hogy az árameloszlás az antenna mentén

$$I(t, z) = I_0 e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right). \quad (3.180)$$

Ekkor

$$\int d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_z \int_{-d/2}^{d/2} dz I(t, z) = 2I_0 \mathbf{e}_z e^{-i\omega t} \int_0^{d/2} dz \left(1 - \frac{2z}{d}\right) = \frac{I_0 d}{2} \mathbf{e}_z e^{-i\omega t} = -i\omega \mathbf{p} e^{-i\omega t} \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{iI_0 d}{2\omega} \mathbf{e}_z. \quad (3.181)$$

Az i fázistolást jelent; a sugárzás intenzitása

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^4}{32\pi^2 c^2} \frac{I_0^2 d^2}{4\omega^2} \sin^2 \theta = \frac{Z_0 (kd)^2}{128\pi^2} I_0^2 \sin^2 \theta. \quad (3.182)$$

A teljes kisugárzott teljesítmény

$$P = \frac{Z_0 (kd)^2}{48\pi} I_0^2 = \frac{1}{2} R_{sug} I_0^2, \quad \text{ahol } R_{sug} = \frac{Z_0 (kd)^2}{24\pi} \approx 5(kd)^2 \Omega, \quad (3.183)$$

az antenna sugárzási ellenállása.

3.5.5 Multipol sugárzások

Az második tag (3.169)-ben:

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3\mathbf{x}' (-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}'). \quad (3.184)$$

Az integrál egy kétindexes mennyiséget ad:

$$M_{ij} = \int d^3\mathbf{x} x_i J_j \Rightarrow A_j = \frac{-i\mu_0}{4\pi} k \hat{x}_i M_{ij}. \quad (3.185)$$

M antiszimmetrikus része a mágneses dipólmomentum (l. (2.289))

$$m_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3\mathbf{x} x_j J_k. \quad (3.186)$$

A szimmetrikus rész most nem nulla:

$$\int d^3\mathbf{x} x_i J_j = \int d^3\mathbf{x} x_i J_k (\partial_k x_j) = - \int d^3\mathbf{x} x_j \partial_k (x_i J_k) = - \int d^3\mathbf{x} x_j J_i - \int d^3\mathbf{x} x_i x_j \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (3.187)$$

azaz

$$\int d^3\mathbf{x} (x_i J_j + x_j J_i) = - \int d^3\mathbf{x} x_i x_j \operatorname{div} \mathbf{J} = \partial_t \int d^3\mathbf{x} \varrho x_i x_j = \frac{-i\omega}{3} \left(Q_{ij} + \delta_{ij} \int d^3\mathbf{x} \varrho x^2 \right). \quad (3.188)$$

ahol bevezettük az elektromos kvadrupól tenzort (2.197) alapján. Emiatt:

$$A_j(\omega, \mathbf{x}) = \frac{-i\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[k \hat{x}_i \varepsilon_{ijk} m_k - \frac{i\omega k}{6} Q_{ji} \hat{x}_i - \frac{i\omega k}{6} \hat{x}_i \int d^3\mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}') \mathbf{x}'^2 \right]. \quad (3.189)$$

Az utolsó tag tiszta gradiens a közelítés rendjében, hiszen

$$\operatorname{grad} \frac{e^{ikr}}{r} = ik \hat{x}_i \frac{e^{ikr}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (3.190)$$

emiatt elhagyható, hiszen mértéktranszformációval kiküszöbölhető, így nem ad járulékot a fizikai mennyiségekhez. A többi járuléka:

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{-i\mu_0 \omega}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}} - \frac{\mu_0 \omega^2}{24\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.191)$$

Az első tag a mágneses dipólsugárzás, a második az elektromos kvadrupólsugárzás képlete. A mágneses dipólsugárzás az elektromos képlettel teljesen analóg, csak $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}}/c$ módon kell az erősségeket helyettesíteni. Az első két rend összege tehát:

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{-i\mu_0\omega}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\mathbf{p} + \frac{1}{c} \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}} \right] - \frac{\mu_0\omega^2}{24\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.192)$$

A térerősségek

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\omega^2}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p} + \frac{1}{c} \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}}) \right] - \frac{i\omega^3}{24\pi c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}. \\ \mathbf{E} &= Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{S} &= Z_0 \hat{\mathbf{x}} H^2 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{Z_0}{2} \hat{\mathbf{x}} |H|^2. \end{aligned} \quad (3.193)$$

A szögeloszlás bonyolult, azonban a teljes kisugárzott teljesítmény kiszámítható, mert a vegyes tagok kiesnek a térszögintegrálás során; pl.:

$$(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p})[\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}})] = (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p})[\mathbf{m} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{m}\hat{\mathbf{x}})] = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p} \times \mathbf{m}). \quad (3.194)$$

Térszögintegrálás után $\int d\Omega \hat{\mathbf{x}} = 0$. A mágneses dipólsugárzás szögeloszlása ugyanaz, mint az elektromos dipólé, azaz a teljesítménye is ugyanaz. Az elektromos kvadrupól esete bonyolultabb, de a végeredmény:

$$P = \frac{Z_0\omega^4}{12\pi c^2} \left(p^2 + \frac{m^2}{c^2} \right) + \frac{Z_0\omega^6}{1440\pi c^4} \text{Tr } \mathbf{Q}^2. \quad (3.195)$$

Láthatóan a mágneses dipól illetve elektromos kvadrupól sugárzások $1/c^2$ -tel elnyomott korrekciót adnak, összhangban a d/λ sorfejtéssel (hiszen $d/\lambda = d\omega/(2\pi c)$, és d belemegy a multipol-momentum definíciójába).

3.6 Általános mozgást végző tömegpont sugárzása

Most egyetlen mozgó ponttöltés terét számoljuk most ki. Ennek töltés- illetve áramsűrűsége:

$$\varrho(t, \mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)), \quad \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)). \quad (3.196)$$

Használjunk Lorentz mértéket, ekkor

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\varrho(t', \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(t', \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \text{ahol} \quad t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c. \quad (3.197)$$

3.6.1 Dipól-közelítés

Ha $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r$ közelítést használjuk, akkor \mathbf{x}' kiintegrálható, és kapjuk:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \mathbf{v} \Big|_{t-r/c}. \quad (3.198)$$

A deriválásoknál az $1/r$ -t nem bántjuk, vagyis csak a retardálás miatt lehet értéke a térderiváltaknak is:

$$\nabla f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \nabla\left(t - \frac{r}{c}\right) \partial_t f\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{c} \partial_t f\left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (3.199)$$

Ezért a mágneses indukció

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r c} (\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{x}}) \Big|_{t-r/c}. \quad (3.200)$$

Az elektromos térerősséghez:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \text{rot } \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} (\dot{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} (\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}} = Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.201)$$

Vagyis a kisugárzott teljesítmény:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = Z_0 \hat{\mathbf{x}} H^2 = \hat{\mathbf{x}} \frac{Z_0 q^2}{16\pi^2 r^2 c^2} a^2 \sin^2 \theta \Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 q^2}{16\pi^2 c^2} a^2 \sin^2 \theta. \quad (3.202)$$

A teljes kisugárzott teljesítmény

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} a^2 \quad (3.203)$$

Larmor képlet írja le. Vagyis a gyorsuló töltés sugároz!

Mikor alkalmazható ez a képlet? Kell a $d \ll \lambda$ feltétel, elosztva a periódusidővel $d/\delta t = v \ll \lambda/\delta t = c$, vagyis $v \ll c$ nemrelativisztikus mozgások esetén jó.

Feladat: Körpályán nemrelativisztikusan mozgó töltés kisugárzott teljesítménye?

Megoldás: Körpálya esetén $a = r\omega^2$, ahol ω a körfrekvencia. Emiatt

$$P = \frac{Z_0 q^2 r^2 \omega^4}{6\pi c^2} = \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} \left(\frac{v}{c}\right)^4. \quad (3.204)$$

Relativisztikus sebességekre a képlet módosul (1. később).

3.6.2 Liénard-Wiechert potenciálok

A fenti analízis akkor jó, ha $d \ll \lambda$. Ha ez nem áll fenn, akkor az elemi összetevők sugárzását egyesével kell figyelembe venni.

Először számoljuk a skalárpotenciált, azzal analóg lesz a vektorpotenciál számolása

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(\mathbf{x}' - \boldsymbol{\gamma}(t')), \quad t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}. \quad (3.205)$$

Az integrálás azért nem egyszerű, mert a Dirac-delta argumentuma impliciten tartalmazza \mathbf{x}' -t. Átírva az integrált

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(\mathbf{x}' - \boldsymbol{\gamma}\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right) &= \int d^3\mathbf{x}' dt' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(\mathbf{x}' - \boldsymbol{\gamma}(t')) \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) = \\ &= \int dt' \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}{c}\right) = \frac{1}{R} \int dt' \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}{c}\right), \end{aligned} \quad (3.206)$$

ahol

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\bar{t}), \quad \bar{t} = t - \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\bar{t})|}{c} \Rightarrow c(t - \bar{t}) = R. \quad (3.207)$$

Vagyis \bar{t} a Dirac-delta megoldása, fizikailag az az időpont, ahonnan induló fényjel \mathbf{x} -et t -ben éri el. Mivel egy fényjel és a részecske pályájának metszéspontja $\bar{t} < t$ -nél van, ezért a megoldás egyértelmű. A t' -re vonatkozó integrálásnál új változót bevezetve

$$u = t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}{c} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t'} = 1 - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t'))}{c|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}, \quad (3.208)$$

azaz

$$\frac{1}{R} \int dt' \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}{c}\right) = \frac{1}{R} \int du \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t'))}{c|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}} \delta(u) = \frac{1}{R} \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{Rc}} = \frac{1}{R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}} \quad (3.209)$$

ahol $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Ezt visszaírva

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}}, \quad \text{ahol } \mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\bar{t}), \quad \bar{t} = t - \frac{R(\bar{t})}{c}, \quad \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\bar{t}), \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (3.210)$$

A fenti levezetéssel teljesen analóg módon

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}}. \quad (3.211)$$

Ha a mozgást elég messziről figyeljük, azaz $|\mathbf{x}| \gg |\boldsymbol{\gamma}|$, akkor vezető rendben $\mathbf{R} \approx \mathbf{x}$ közelítéssel élhetünk. Ez azt is jelenti, hogy $\bar{t} = t - r/c$, valamint

$$|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\bar{t})| = r - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}(t - \frac{r}{c}) = r(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}(t) \approx r \quad \Rightarrow \quad v \ll c. \quad (3.212)$$

Ekkor tehát

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \mathbf{v} \Big|_{t-r/c}, \quad (3.213)$$

megegyezik a dipólsugárzás (3.198) képletével.

Az elektromos és mágneses térerősségek kiszámolhatók a

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A} \quad (3.214)$$

képletekből. A deriválások azonban nem egyszerűek a bonyolult retardálási képletek miatt. A felhasználható azonosságok

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial \bar{t}} &= -v_i(\bar{t}), & \frac{\partial R}{\partial \bar{t}} &= -\hat{\mathbf{R}}\mathbf{v} \\ \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = 1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta}}, \\ \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_i} &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial R}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_i} \right) = -\frac{\hat{R}_i}{c} + \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_i} = \frac{-R_i}{Rc - \mathbf{R}\mathbf{v}}, \\ \frac{\partial R_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij} - v_i \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{v_i R_j}{Rc - \mathbf{R}\mathbf{v}} \\ \frac{\partial R}{\partial x_j} &= \frac{1}{R} R_i \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \hat{R}_j \left(1 + \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{Rc - \mathbf{R}\mathbf{v}} \right) = \frac{R_j}{R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (3.215)$$

Ezek felhasználásával kapható (l. Appendix A.1)

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^3}, \quad \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}). \quad (3.216)$$

\mathbf{E} -ben az első tag nem függ a gyorsulástól, és nagy távolságok esetén $\sim 1/r^2$. Emiatt ez a tag a Coulomb potenciál általánosításaként fogható fel. A második tag a gyorsulástól függ. A dipólsugárzás közelítésben ($R \approx r$ és $\beta \ll 1$):

$$\mathbf{E}_{rad} \approx \frac{q\mu_0}{4\pi r} \hat{\mathbf{x}} \times [\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{a}], \quad (3.217)$$

ami megegyezik (3.201) képlettel.

Feladat: Egyenesvonalú egyenletes mozgást végző test skalár- és vektorpotenciálja valamint térerősségei.

Megoldás: Legyen a megfigyelési pont $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$, a töltés pedig a z tengely mentén mozogjon $\boldsymbol{\gamma}(t) = (0, 0, vt)$. (3.210) alapján szükségünk van a következő mennyiségekre:

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\bar{t}) = (x, 0, -v\bar{t}), \quad (3.218)$$

ahol $c(t - \bar{t}) = R$, azaz

$$c(t - \bar{t}) = \sqrt{x^2 + v^2\bar{t}^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \gamma^2 \left(t - \frac{1}{\gamma c} \sqrt{x^2 + \gamma^2 v^2 t^2} \right), \quad (3.219)$$

ahol bevezettük a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.220)$$

kifejezést. Ezzel

$$R - \beta \mathbf{R} = c(t - \bar{t}) + \frac{v^2}{c} \bar{t} = ct - \frac{c}{\gamma^2} \bar{t} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{x^2 + \gamma^2 v^2 t^2}. \quad (3.221)$$

Végül

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + \gamma^2 v^2 t^2}}, \quad A_z(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\gamma v}{\sqrt{x^2 + \gamma^2 v^2 t^2}} \quad (3.222)$$

Az elektromos térerősséghez kell

$$\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} = \mathbf{R} - (t - \bar{t})\mathbf{v} = (x, 0, -vt) \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{(x^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -vt \end{pmatrix}. \quad (3.223)$$

A mágneses térerősséghez

$$\frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -vt \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -vt \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -vx(t - \bar{t}) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ -vx \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{q}{4\pi} \frac{\gamma}{(x^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -vx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.224)$$

hiszen $c\epsilon_0 = 1/Z_0$. $v = 0$ -ra visszakapjuk a szokásos sztatikus megoldást. A retardálás hatása azonban az, hogy az ekvipotenciális felületek eltolódnak. Ha $z = vt$ jelölést használunk, akkor a $\Phi = \text{konstans}$ felület írható úgy, mint

$$x'^2 + z^2 = r^2 = \text{konstans}, \quad \text{ahol} \quad x' = \frac{x}{\gamma} = x\sqrt{1 - \beta^2} < x. \quad (3.225)$$

Ez egy ellipszis egyenlete – az x irányú tengely hossza r/γ , a z irányú tengely hossza r . Értelmezhető azonban úgy is, hogy a nulla sebességű ekvipotenciális felület egyenletébe egy *kisebb* x távolságot kell beírni.

Az elektromos térerősség nagysága $x = 0$, $z = r$ illetve $x = r$, $z = 0$ esetben

$$E(x = 0, z = r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2), \quad E(x = r, z = 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.226)$$

vagyis nagy különbségek lehetnek $\beta \approx 1$, azaz fénysebesség közelében. A térerősség $\beta \approx c$ esetén lényegében a mozgásra merőleges síkban érzékelhető.

Ha mozgó vonatkoztatási rendszerből nézzük, ahol az áttérést a Galilei transzformációval végezzük, azaz $z' = z - vt$ és $t' = t$, akkor a fenti ponttöltés áll, azonban a skalárpotenciál és az elektromos térerősség nem megy át a sztatikus képletbe! Az elektrodinamika egyenleteinek szimmetriacsoportja a Lorentz-csoport, erről később lesz szó.

3.6.3 Sugárzás szögeloszlása

Hogy a sugárzásról részletesebb képet kapjunk, használnunk kell a Liénard-Wiechert potenciálokat. A sugárzás Poynting vektora (3.216) alapján:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{E}^2, \quad \mathbf{E}_{sug} = \frac{qZ_0}{4\pi R} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \hat{\mathbf{R}}\beta)^3}, \quad (3.227)$$

valamint $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \gamma(\bar{t})\mathbf{v}$, $\bar{t} = t - R/c$. Most menjünk olyan koordinátarendszerbe, ahol $\gamma(\bar{t}) = 0$, ekkor $\mathbf{R} = \mathbf{x}$. A Poynting vektorból a t időben felületegységenként kisugárzott, észlelt teljesítményt kapjuk. Ha a mozgó részecske által időegységenként kisugárzott teljesítményre vagyunk kíváncsiak, akkor

$$dP = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} = R^2 d\Omega \hat{\mathbf{R}} \mathbf{S} (1 - \hat{\mathbf{R}}\beta) \Rightarrow \frac{dI}{d\Omega} = \frac{Z_0 q^2}{16\pi^2} \frac{[\hat{\mathbf{x}} \times ((\hat{\mathbf{x}} - \beta) \times \dot{\beta})]^2}{(1 - \hat{\mathbf{x}}\beta)^5}. \quad (3.228)$$

- Ha $\beta \parallel \dot{\beta}$, vagyis 1D gyorsulásról van szó, akkor a számláló

$$\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\beta}) = \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}\dot{\beta}) - \dot{\beta} \Rightarrow [\hat{\mathbf{x}} \times ((\hat{\mathbf{x}} - \beta) \times \dot{\beta})]^2 = \dot{\beta}^2 - (\hat{\mathbf{x}}\dot{\beta})^2 = \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta, \quad (3.229)$$

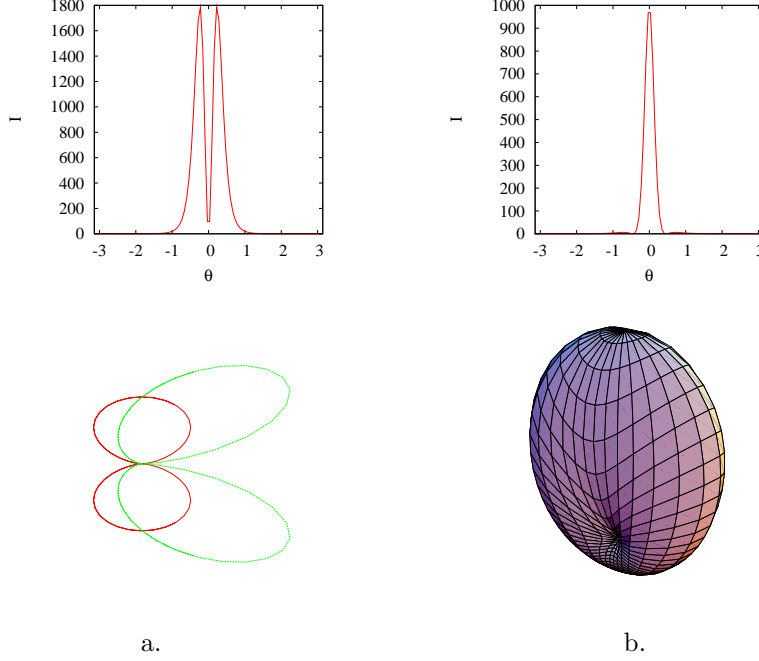


Figure 3.3: Sugárzások szögeloszlása: a. 1D gyorsulás, a sebesség és a gyorsulás iránya is x b. körpálya, a sebesség iránya merőleges a gyorsulásra.

ahol $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{v}} = \cos \theta$. Ezzel

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Z_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c^2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (3.230)$$

Ha $\beta = 0$, akkor visszkapjuk a dipólusugárzás szögeloszlását. Általános β -ra a sugárzás a sebesség irányába tolódik, l. 3.3/a ábra. Nagy sebességek esetén $\beta \approx 1$, ezért (3.220) alapján $1 - \beta = (1 - \beta^2)/(1 + \beta) \approx 1/(2\gamma^2)$. Ekkor a kis szögek dominálnak, vagyis közelíthetjük $\sin \theta \approx \theta$ és $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, azaz $1 - \beta \cos \theta \approx (1 + (\gamma\theta)^2)/(2\gamma^2)$, innen

$$I \approx \frac{2Z_0 q^2 a^2}{\pi^2 c^2} \gamma^8 \frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + (\gamma\theta)^2)^5} \Rightarrow \theta_{max} \approx \frac{1}{2\gamma}, \quad I_{max} \sim \gamma^8. \quad (3.231)$$

- Ha $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$, akkor a számlálóban

$$\hat{\mathbf{x}} \times ((\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) = (\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) \Rightarrow [\hat{\mathbf{x}} \times ((\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2 = (\dot{\boldsymbol{\beta}})^2(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})^2 - \frac{(\hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{\gamma^2}. \quad (3.232)$$

Most $\hat{\mathbf{v}}$ és $\hat{\mathbf{a}}$ egymásra merőleges: válasszuk az elsőt a z tengelynek, a másodikat az x tengelynek, vagyis

$$\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{e}_z, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{a}{c} \mathbf{e}_x, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta}\hat{\mathbf{x}} = \beta \cos \theta, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mathbf{x}} = \frac{a}{c} \sin \theta \cos \varphi. \quad (3.233)$$

Ezzel

$$I = \frac{Z_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c^2} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (3.234)$$

Az eloszlás különböző nézetei a 3.3/b-d. ábrákon láthatók. A sugárzás itt is a sebesség irányába tolódik. Kis szögek esetén ha $\cos \varphi = 1$:

$$I \approx \frac{Z_0 q^2 a^2}{2\pi^2 c^2} \gamma^6 \frac{(1 - (\gamma\theta)^2)^2}{(1 + (\gamma\theta)^2)^5} \approx \frac{Z_0 q^2 a^2}{2\pi^2 c^2} \gamma^6 \frac{1}{1 + 7(\gamma\theta)^2} \Rightarrow \theta_{max} \sim \frac{1}{\gamma}, \quad I_{max} \sim \gamma^6. \quad (3.235)$$

A teljes kibocsátott teljesítményhez ki kell integrálni a teljes térszögére a (3.228) kifejezést. Az integrál elég bonyolult, de az eredmény

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} \gamma^6 (\mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2), \quad (3.236)$$

ahol $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Összehasonlítva a (3.203) képlettel, látható, hogy $\beta^2 = v^2/c^2$ -es korrekciókat kapunk, ahogyan vártuk is. Az integrál bonyolultsága ellenére a végképlet igen egyszerű – valójában maegkaphatjuk a Maxwell egyenletek szimmetriatuljadonságait használva, l. később.

Speciális esetként vizsgáljuk meg a körpályán mozgó test esetét. Ekkor $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$. A test akkor is gyorsul, ha egyenes sebességgel mozog a körpályán, ez a *szinkrotronsugárzás*. Legyen a görbületi sugár r , ekkor

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = va \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2 = \frac{1}{\gamma^2} a^2 = \frac{\omega^4 r^2}{\gamma^2} = \frac{\beta^4 c^4}{\gamma^2 r^2}. \quad (3.237)$$

Ezzel

$$P = \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} (\gamma\beta)^4. \quad (3.238)$$

Ezt összehasonlítva (3.204) képlettel, a különbség a γ^4 faktor megjelenése. Ezt az egyenletet felírhatjuk a részecske impulzusával is, hiszen $\mathcal{E} = m_0 \gamma c^2$ és $\beta = pc/\mathcal{E}$ miatt $\beta\gamma = p/(m_0 c)$:

$$P = \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} \left(\frac{p}{m_0 c} \right)^4 \xrightarrow{v \approx c} \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2} \right)^4, \quad (3.239)$$

ahol az utolsó alak az ultrarelativisztikus sebességekre vonatkozik. Egy fordulat alatt elszenvedett veszteség energiában az ultrarelativisztikus tartományban ($t_{per} \approx 2\pi r/c$):

$$\delta\mathcal{E} = \frac{Z_0 q^2 c}{3r} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2} \right)^4. \quad (3.240)$$

Ez igen nagy lehet, különösen, ha m_0 kicsi. A CERN LEP2 gyorsítójában $\mathcal{E} \approx 60 GeV$ energiás elektronnyalábnál $\mathcal{E}/m_0 c^2 = 1.2 \cdot 10^5$, ezzel fordulatonként $300 MeV$ veszteség volt – valójában ez a legfontosabb ok, hogy miért nem lehet nagyobb energiás elektron-pozitron gyorsítót építeni.

$\delta\mathcal{E}$ csökkentéséhez adott energia mellett vagy nagyobb sugár kell, vagy nagyobb m_0 . Emiatt a mai gyorsítók már hatalmas méretűek (CERN: 27 km-es (kb 4.3 km sugarú) gyűrű), és elektron helyett protonokat gyorsítanak. Ekkor a sugárzási veszteség $(m_e/m_p)^4 \approx 6 \cdot 10^{-14}$ faktorial kisebb, általában elhanyagolható.

Lehet, hogy a sugárzást akarjuk használni, pl. anyagvizsgálatra, ekkor a sugárzási veszteség növelése a cél. Ehhez az elektronnyalábot hullámmzó pályára kényszerítik (undulátor).

3.6.4 Sugárzás spektruma

Milyen frekvenciájú összetevői vannak a sugárzásnak? Ezt akkor érdemes megvizsgálni, ha elég messziről figyelem meg a sugárzó töltést, így sokáig tudom vizsgálni a folyamatot. Most nem a mozgó töltés által kisugárzott teljesítményt vizsgáljuk, hanem az észlelési pont által mért teljesítményt. Ezért most a kisugárzott teljesítményt úgy írjuk fel, hogy

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{Z_0} R^2 \mathbf{E}^2(t) = \frac{1}{Z_0} \mathbf{C}^2(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}(t) = R\mathbf{E}(t) = \frac{qZ_0}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta})^3}, \quad (3.241)$$

hiányzik az extra $1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}$ faktor a (3.228) egyenlethez képest. Sokáig vizsgálva a folyamatot a befolyó energia

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{C}^2(t). \quad (3.242)$$

Fourier transzformálva a fenti kifejezést, és felhasználva, hogy $\mathbf{C}(t)$ valósága miatt $\mathbf{C}(-\omega) = \mathbf{C}^*(\omega)$, kapjuk

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\mathbf{C}(\omega)|^2 = \frac{1}{\pi Z_0} \int_0^{\infty} d\omega |\mathbf{C}(\omega)|^2. \quad (3.243)$$

Innen

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{\pi Z_0} |\mathbf{C}(\omega)|^2. \quad (3.244)$$

Felírhatjuk \mathbf{E} -t illetve \mathbf{C} -t polarizációs irányok szerint:

$$\mathbf{C} = \mathbf{e}_1 C_1 + \mathbf{e}_2 C_2 \quad \Rightarrow \quad C_{1,2} = \mathbf{e}_{1,2} \mathbf{C}, \quad (3.245)$$

ezzel

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{\pi Z_0} (|C_1(\omega)|^2 + |C_2(\omega)|^2), \quad (3.246)$$

a két tag a két polarizációs irány független járuléka.

A konkrét alakból

$$\mathbf{C}(\omega) = \frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta})^3} \Big|_{\bar{t}=t-R(\bar{t})/c} = \frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t'+R(t')/c)} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta})^2}, \quad (3.247)$$

ahol alkalmaztuk a $t' = \bar{t}$ új változóra való áttérést.

Ha elég messze van a megfigyelési pont, akkor a dipól közelítésnél látott közelítések alkalmazhatók:

$$R = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}| \approx r - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}, \quad \text{máshol} \quad \hat{\mathbf{R}} \approx \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.248)$$

Ekkor:

$$\mathbf{C}(\omega) = \frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t'+\frac{r}{c}-\frac{\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}(t')}{c})} \frac{\hat{\mathbf{x}} \times [(\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})^2}. \quad (3.249)$$

Használhatjuk a következő azonosságot

$$\frac{\hat{\mathbf{x}} \times [(\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}} \right] \quad (3.250)$$

Mivel az $\exp(i\omega r/c)$ fázisfaktor kiesik $|\mathbf{C}(\omega)|^2$ -ből, ezért a lényeges részre írhatjuk

$$\mathbf{C}(\omega) \Rightarrow \frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t-\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}} \right]. \quad (3.251)$$

Ez az alak jól mutatja, hogy csak onnan jön sugárzás, ahol gyorsul a részecske.

Egy polarizációra való vetület $\mathbf{e}\mathbf{x} = 0$ miatt

$$\mathbf{e}\mathbf{C}(\omega) = -\frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t'-\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}(t')/c)} \frac{(\mathbf{e}\boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\beta}}) + (\mathbf{e}\dot{\boldsymbol{\beta}})(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})}{(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})^2}. \quad (3.252)$$

Szinkrotronsugárzás spektruma

Körmozgás esetén a körpálya síkja legyen az xy sík, a sugara ϱ , a körfrekvencia $\bar{\omega} = v/\varrho$

$$\boldsymbol{\gamma} = \varrho \begin{pmatrix} \sin \bar{\omega} t \\ \cos \bar{\omega} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \beta \begin{pmatrix} \cos \bar{\omega} t \\ -\sin \bar{\omega} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = -\beta \bar{\omega} \begin{pmatrix} \sin \bar{\omega} t \\ \cos \bar{\omega} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{e}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.253)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma} &= \varrho \cos \theta \sin \bar{\omega} t, & \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} &= \beta \cos \theta \cos \bar{\omega} t, & \hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\beta}} &= -\beta \bar{\omega} \cos \theta \sin \bar{\omega} t, \\ \mathbf{e}_{\parallel}\boldsymbol{\beta} &= -\beta \sin \bar{\omega} t, & \mathbf{e}_{\parallel}\dot{\boldsymbol{\beta}} &= -\beta \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t, & \mathbf{e}_{\perp}\boldsymbol{\beta} &= \beta \sin \theta \cos \bar{\omega} t, & \mathbf{e}_{\perp}\dot{\boldsymbol{\beta}} &= -\beta \bar{\omega} \sin \theta \sin \bar{\omega} t, \end{aligned} \quad (3.254)$$

vagyis

$$\begin{aligned} e_{\parallel} \mathbf{C}(\omega) &= -\frac{Z_0 q \beta \bar{\omega}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t' - \frac{\rho}{c} \cos \theta \sin \bar{\omega} t)} \frac{\cos \bar{\omega} t - \beta \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta \cos \bar{\omega} t)^2}, \\ e_{\perp} \mathbf{C}(\omega) &= -\frac{Z_0 q \beta \bar{\omega} \sin \theta}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t' - \frac{\rho}{c} \cos \theta \sin \bar{\omega} t)} \frac{\sin \bar{\omega} t}{(1 - \beta \cos \theta \cos \bar{\omega} t)^2}. \end{aligned} \quad (3.255)$$

Bevezetve $\tilde{\omega} = \omega \rho / c$, $\tau = ct' / \rho$ jelöléseket:

$$\begin{aligned} e_{\parallel} \mathbf{C}(\omega) &= -\frac{Z_0 q \beta^2}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau \sin(\tilde{\omega}(\tau - \cos \theta \sin \beta \tau)) \frac{\cos \beta \tau - \beta \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta \cos \beta \tau)^2}, \\ e_{\perp} \mathbf{C}(\omega) &= -\frac{i Z_0 q \beta^2}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau \sin(\tilde{\omega}(\tau - \cos \theta \sin \beta \tau)) \frac{\sin \theta \sin \beta \tau}{(1 - \beta \cos \theta \cos \beta \tau)^2}. \end{aligned} \quad (3.256)$$

$\beta \approx 1$ esetén a sugárzás csak vékony, $\sim 1/\gamma$ szögben érkezik, vagyis időben felbontva rövid idejű sugárzást kapunk. Ekkor van értelme a spektrális felbontásnak. Ha $\bar{\omega} t \ll 1$ a releváns tartományban, akkor $\sin x \approx x$ és $\cos x \approx 1$ helyettesítéssel (kivéve a nevezőt) $\cos \theta = 1$ -nél kapjuk:

$$\begin{aligned} e_{\parallel} \mathbf{C}(\omega) &\approx -\frac{Z_0 q \beta \bar{\omega}}{4\pi} (1 - \beta) \int dt e^{i\omega t(1-\beta)} \frac{1}{(1 - \beta \cos \bar{\omega} t)^2} = -\frac{Z_0 q \beta \bar{\omega}}{4\pi \omega} \int du e^{iu} \frac{1}{(1 - \beta \cos[u \frac{\bar{\omega}}{\omega(1-\beta)}])^2} \\ &\approx -\frac{Z_0 q \beta \omega^3 (1 - \beta)^4}{\pi \bar{\omega}^3} \int du \frac{e^{iu}}{\left(\frac{2\omega^2(1-\beta)^3}{\bar{\omega}^2} + u^2\right)^2} \end{aligned} \quad (3.257)$$

A fenti alak mutatja, hogy az integrál ott fog levágni, ahol

$$\frac{\omega_c^2 (1 - \beta)^3}{\bar{\omega}^2} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_c \sim \frac{\bar{\omega}}{(1 - \beta)^{3/2}} \sim \gamma^3 \frac{c}{\rho}. \quad (3.258)$$

Ezt heurisztikusan is megérthetjük: a sugárzás szöge $\sim 1/\gamma$, a sebesség c , vagyis az az idő, amíg a sugárzást látom: $\Delta t_0 = \theta / \bar{\omega} \sim \rho / (c\gamma)$. Mivel azonban a forrás a megfigyelő felé mozog, a jel első és hátsó éle között levő távolság $c\Delta t_0 - v\Delta t_0$, vagyis a köztük eltelt idő $\Delta t = \Delta t_0(1 - \beta) \sim \Delta t_0 / \gamma^2 \sim \rho / (c\gamma^3)$. Fourier térben az ennek megfelelő frekvencia $\omega_c \sim \gamma^3 c / \rho$.

3.7 Elektromágneses hullámok szórása

Ha adott a töltések mozgása, akkor a fenti tárgyalás megadja a sugárzás jellemzőit. Ha a töltések mozgását is elektromágneses hullámok okozzák, akkor végeredményben a bemenő elektromágneses hullám átalakul más hullámokba \Rightarrow szórás.

Legyen a bemenő hullám monokromatikus síkhullám:

$$\mathbf{E}_{be} = \mathbf{e}_0 E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{H}_{be} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{be}. \quad (3.259)$$

Ez elér egy kisméretű anyagdarabot, annak töltéseit gyorsítja, ezek sugároznak, kialakítva a szórt teret. Miután az anyagdarab kis méretű, feltehetjük, hogy a sugárzása gömbhullám. Ennek megfelelően a teljes elektromos, illetve mágneses tér

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{be} + \mathbf{E}_{szort}, \quad \mathbf{E}_{szort} = \mathbf{A}_{szort} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}. \quad (3.260)$$

Hogyan jellemezhető a szórás? Lehetne *szórt teljesítmény/bemenő teljesítmény*, azonban a szórt teljesítmény függ a távolságtól (gömbhullám). Ezért a távolságfüggetlen jellemző

$$d\sigma = \frac{\text{egységnyi térszögbe szórt teljesítmény}}{\text{egységnyi felületen bemenő teljesítmény}} = \frac{\text{szórt intenzitás}}{\text{bemenő teljesítmény áram}} = \frac{|r^2 d\Omega S_{szort}|}{|S_{be}|}. \quad (3.261)$$

Ennek dimenziója m^2 , felület \Rightarrow neve *szórási hatáskeresztmetszet*. Beírva a térerőségeket, és az esetleges polarizációs irányt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|e^* \mathbf{A}_{szort}|^2}{E_0^2}. \quad (3.262)$$

3.7.1 Szórás az anyag egyenlőtlenségein

A szórócentrumot többféleképpen kezelhetjük. Itt feltesszük, hogy folytonos anyagmodellünk van, ahol a dielektromos állandó és a permeabilitás helyfüggő: $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$. Feltesszük azonban, hogy az anyag átlagát jellemző ε_0 , μ_0 (most nem feltétlenül a vákuum érték!) értékekhez képest kicsi az eltérés. Más szóval

$$\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon(x) - \varepsilon_0) \mathbf{E} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H} = (\mu(x) - \mu_0) \mathbf{H} \quad \text{kicsi}. \quad (3.263)$$

A Maxwell egyenleteket ekkor forrástag nélkül írhatjuk fel

$$\nabla \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}. \quad (3.264)$$

Innen

$$\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E})) = \nabla(\text{div } \mathbf{D}) - \Delta \mathbf{D} + \varepsilon_0 \partial_t \nabla \times \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{D} + \varepsilon_0 \partial_t \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}) + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{D}, \quad (3.265)$$

vagyis

$$\square \mathbf{D} = \varepsilon_0 \partial_t \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}) - \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E})). \quad (3.266)$$

A jobb oldal a forrástag, kis mennyiségeket tartalmaz.

Ha a beeső hullám monokromatikus síkhullám, akkor az időfüggése $\sim e^{-i\omega t}$, ez lesz minden tér időfüggése is. Ekkor

$$(\Delta + k^2) \mathbf{D} = -i\varepsilon_0 \omega \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}) - \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E})). \quad (3.267)$$

Ezt formálisan meg tudjuk oldani

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \left[i\varepsilon_0 \omega \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}) + \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E})) \right]. \quad (3.268)$$

A második tag felel meg a szórt hullámnak. Távoli megfigyelő esetén a szokásos közelítéssel élve $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r - \hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}'$ kapjuk

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'} \left[i\omega \nabla \times (\mu(x) - \mu_0) \mathbf{H} + \nabla \times \left(\nabla \times \left(\frac{\varepsilon(x) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \mathbf{E} \right) \right) \right], \quad (3.269)$$

innen

$$\mathbf{A}_{szort} = \frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'} \left[i\omega \nabla \times (\delta\mu \mathbf{H}) + \nabla \times \left(\nabla \times \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \mathbf{E} \right) \right) \right], \quad (3.270)$$

ahol $\delta\mu = \mu(x) - \mu_0$ és $\delta\varepsilon = \varepsilon(x) - \varepsilon_0$. Parciális integrálással $\nabla \rightarrow ik\hat{\mathbf{x}}$, azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{szort} &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'} \left[\omega k \delta\mu \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H} + k^2 \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}) \right] = \\ &= \frac{k^2}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'} \left[\frac{\delta\mu}{\mu_0} Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}} + \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{x}}) \right]. \end{aligned} \quad (3.271)$$

Ez az egyenlet valójában egy implicit egyenlet, nem explicit megoldás. Azonban megoldhatjuk szukcesszív approximációval:

$$\mathbf{E}_{be}, \mathbf{H}_{be} \Rightarrow \mathbf{A}_{szort}^{(1)} \Rightarrow \mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1 \Rightarrow \mathbf{A}_{szort}^{(2)} \Rightarrow \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \Rightarrow \dots, \quad (3.272)$$

a folyamat vége az egzakt megoldás. Ha kicsik a szórócentrumok, akkor a második, harmadik stb. térerősségekhez tartozó korrekciók – a többszörös szórások járuléka – egyre kisebbek. Sokszor megelegedhetünk az első korrekcióval (Born közelítés). Ekkor a fenti képletbe a beeső síkhullám írható be:

$$\mathbf{A}_{szort} = \frac{k^2 E_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}' - k\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}')} \left[\frac{\delta\mu}{\mu_0} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0) \times \hat{\mathbf{x}} + \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{e}_0 \times \hat{\mathbf{x}}) \right]. \quad (3.273)$$

Vezessük be a

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - k\hat{\mathbf{x}} \quad (3.274)$$

vektort, ezzel az exponens $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}'}$ alakban írható. Vegyük észre azt is, hogy itt valójában $\delta\varepsilon$ és $\delta\mu$ Fourier transzformáltját számoljuk ki! Azaz

$$\mathbf{A}_{szort} = \frac{k^2 E_0}{4\pi} \left[\frac{\tilde{\delta\mu}(\mathbf{q})}{\mu_0} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0) \times \hat{\mathbf{x}} + \frac{\tilde{\delta\varepsilon}(\mathbf{q})}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{e}_0 \times \hat{\mathbf{x}}) \right]. \quad (3.275)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ -re merőleges polarizációra vetítve, azaz \mathbf{e}^* -gal szorozva, és felhasználva, hogy $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$:

$$\mathbf{e}^* \mathbf{A}_{szort} = \frac{k^2 E_0}{4\pi} \left[\frac{\tilde{\delta\mu}(\mathbf{q})}{\mu_0} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^*) + \frac{\tilde{\delta\varepsilon}(\mathbf{q})}{\varepsilon_0} \mathbf{e}^* \mathbf{e}_0 \right]. \quad (3.276)$$

Emiatt aztán

$$\frac{d\sigma \mathbf{e} \mathbf{e}_0}{d\Omega} = \frac{k^4}{16\pi^2} \left| \frac{\tilde{\delta\mu}(\mathbf{q})}{\mu_0} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^*) + \frac{\tilde{\delta\varepsilon}(\mathbf{q})}{\varepsilon_0} \mathbf{e}^* \mathbf{e}_0 \right|^2, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k} - k\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.277)$$

Jellegzetessége a $\sim k^4$ függés.

Polarizációs vektorokhoz érdemes a következő választással élni: $\mathbf{e}_0^\perp = \mathbf{e}^\perp = \alpha \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{x}}$ és $\mathbf{e}_0^\parallel = \mathbf{e}_0^\perp \times \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{e}^\parallel = \mathbf{e}_0^\perp \times \hat{\mathbf{x}}$. A normáláshoz $\alpha = 1/\sin\theta$, ahol $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{k}} = \cos\theta$. Választva egy olyan koordinátarendszert, ahol $\hat{\mathbf{k}}\parallel z$, kapjuk

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^\perp = \mathbf{e}_0^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_0^\parallel = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^\parallel = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (3.278)$$

A megfelelő polarizációs vektor szorzatok

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\perp &= 1, & \mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\parallel &= 0, & \mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\perp &= 0, & \mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\parallel &= \cos\theta, & (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\perp) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\perp) &= \mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\parallel = \cos\theta, \\ (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\perp) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\parallel) &= -\mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\perp = 0, & (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\parallel) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\perp) &= -\mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\perp = 0, & (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\parallel) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\parallel) &= \mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\perp = 1. \end{aligned} \quad (3.279)$$

Ilyen módon

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\parallel\parallel}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{16\pi^2} \left| \frac{\tilde{\delta\mu}(\mathbf{q})}{\mu_0} + \frac{\tilde{\delta\varepsilon}(\mathbf{q})}{\varepsilon_0} \cos\theta \right|^2, \\ \frac{d\sigma_{\perp\perp}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{16\pi^2} \left| \frac{\tilde{\delta\mu}(\mathbf{q})}{\mu_0} \cos\theta + \frac{\tilde{\delta\varepsilon}(\mathbf{q})}{\varepsilon_0} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.280)$$

Ha nem tekintjük a bemenő hullám polarizációját, átlagolunk a különböző polarizációk járulékára, akkor

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{32\pi^2} \left| \frac{\tilde{\delta\mu}(\mathbf{q})}{\mu_0} + \frac{\tilde{\delta\varepsilon}(\mathbf{q})}{\varepsilon_0} \cos\theta \right|^2, \\ \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{32\pi^2} \left| \frac{\tilde{\delta\mu}(\mathbf{q})}{\mu_0} \cos\theta + \frac{\tilde{\delta\varepsilon}(\mathbf{q})}{\varepsilon_0} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.281)$$

A kimenő polarizáltság jellemzésére

$$\Pi(\theta) = \frac{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}. \quad (3.282)$$

Nyilván $\Pi(\theta) \in [-1, 1]$, ha $\Pi(\theta) = 1$ akkor teljesen merőleges, ha $\Pi(\theta) = -1$, akkor teljesen párhuzamos a polarizáltság.

Feladat: Kis r sugarú fémgömb szórási hatáskeresztmetszete?

Megoldás: Kis méretű fémgömbnél vehetjük a beeső hullám terét homogénnek. Ekkor a beeső elektromos tér dipólmomentumot hoz létre, melynek erőssége $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 r^3 \mathbf{E}$. Ez jellemezhető sűrűséggel is: $\mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0 r^3 \mathbf{E}\delta(\mathbf{x})$. Az elektromos eltolás

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0(1 + 4\pi\epsilon_0 r^3 \mathbf{E}\delta(\mathbf{x}))\mathbf{E} \Rightarrow \delta\epsilon(x) = 4\pi\epsilon_0 r^3 \delta(\mathbf{x}). \quad (3.283)$$

A fémgömböt tökéletes diamágnestek tekintve homogén mágneses térben szintén egy dipól alakul ki $\mathbf{m} = -2\pi r^3 \mathbf{H}$. Ez megfelel

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \Rightarrow \delta\mu = -2\pi\mu_0 r^3 \delta(x). \quad (3.284)$$

Ezzel az integrálok elvégezhetőek, és

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 r^6 \left| \mathbf{e}^* \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^*) \right|^2 \quad (3.285)$$

A különböző polarizációk járuléka

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{1}{2}k^4 r^6 \left| 1 - \frac{\cos\theta}{2} \right|^2, \quad \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{1}{2}k^4 r^6 \left| \cos\theta - \frac{1}{2} \right|^2. \quad (3.286)$$

A polarizációkra összegzett differenciális hatáskeresztmetszet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 r^6 \left(\frac{5}{8}(1 + \cos^2\theta) - \cos\theta \right), \quad (3.287)$$

a kimenő polarizáltság

$$\Pi(\theta) = \frac{3 \sin^2\theta}{5(1 + \cos^2\theta) - 8 \cos\theta}. \quad (3.288)$$

Ezeket a 3.7.1 ábrán láthatjuk. Két jellegzetessége:

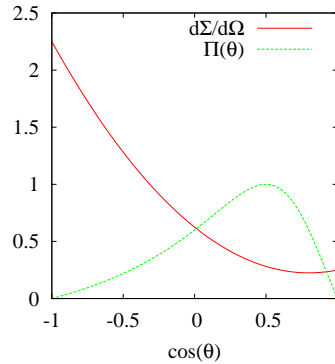


Figure 3.4: Differenciális hatáskeresztmetszet és polarizáltság fémgömbön való szórás esetén

- erős visszaszórás: a szórt hullám intenzitása hátrafelé a legnagyobb!
- a polarizáltság $\cos\theta = 1/2$ -nél 1, ekkor csak \perp polarizáltság marad.

3.7.2 Szórás gázon és szabályos kristályon

Tegyük fel, hogy a szórócentrumok igen kicsik az elektromágneses hullám hullámhosszához képest. Ekkor, molekuláris elektron polarizálhatóságot feltéve

$$\delta\epsilon = \epsilon_0 \sum_j \gamma_{mol} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad \delta\mu = 0. \quad (3.289)$$

Ezzel (3.281) alapján

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4}{32\pi^2} |\gamma_{mol}|^2 |\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2, \quad \mathcal{F}(\mathbf{q}) = \sum_j e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}_j}, \quad \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \cos^2 \theta \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}. \quad (3.290)$$

Az irányfüggő $\mathcal{F}(\mathbf{q})$ faktor valójában az anyageloszlás Fourier transzformáltja. $|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2$ -t két szummaként felírva:

$$|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2 = \sum_{ij} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}. \quad (3.291)$$

Gáz esetén a szórócentrumok véletlenszerűen helyezkednek el, vagyis az $i \neq j$ járulékok kiátlagolják egymást, ezért marad $|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2 = N$, ahol N a szórócentrumok száma. A térfogategységre számolt szórási hatáskeresztmetszet ezért

$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4 \mathcal{N}}{32\pi^2} |\gamma_{mol}|^2, \quad \frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \cos^2 \theta \frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}, \quad (3.292)$$

ahol $\mathcal{N} = N/V$ a szórócentrumok sűrűsége. Sűrűbb anyag tehát erősebben szór, és nagyobb frekvenciák is erősebben szóródnak.

A teljes differenciális hatáskeresztmetszet illetve a polarizáltság

$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 \mathcal{N}}{32\pi^2} |\gamma_{mol}|^2 (1 + \cos^2 \theta), \quad \Pi(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad (3.293)$$

l. a 3.7.2 ábrán. Láthatóan $\cos \theta = 0$, azaz a bejövő irányra merőlegesen a legkisebb a szórt fény intenzitása, és ott

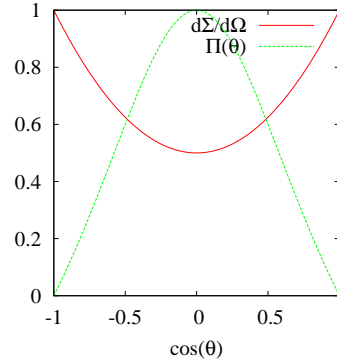


Figure 3.5: Differenciális hatáskeresztmetszet és polarizáltság szögfüggése gázon való szórás esetén.

teljes a polarizáltság.

A teljes hatáskeresztmetszet az össze irányra összegzett differenciális hatáskeresztmetszet, vagyis a szórt teljes intenzitás:

$$\alpha = \frac{1}{V} \sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 \mathcal{N}}{6\pi} |\gamma_{mol}|^2, \quad \text{mert} \quad \int_{-1}^1 dx (1 + x^2) = \frac{8}{3}. \quad (3.294)$$

Ezt kifejezhetjük a törésmutatóval is, hiszen ritka gázra $\varepsilon_r = 1 + \mathcal{N}\gamma_{mol}$, és $n = \sqrt{\varepsilon_r} \approx 1 + \mathcal{N}\gamma_{mol}/2$ (l. Clausius-Mosotti egyenlet, (2.237)), ezzel

$$\alpha = \frac{2k^4}{3\pi\mathcal{N}} (n - 1)^2, \quad (3.295)$$

ez a *Rayleigh szórás* formulája.

A térfogattal normált teljes szórási hatáskeresztmetszet leírja a beeső fény intenzitásvesztését: egy $dAdx$ térfogatú térelemre felírva az ott levő anyag által kiszórt össz-teljesítményre felírható

$$\frac{dP_{szort}}{S_{be}} = \sigma, \quad (3.296)$$

ahol S_{be} a bemenő teljesítmény-áram. A kiszórt összteljesítmény az eredeti hullám intenzitásvesztése: $dP_{szort} = -dP_{be}$. Másrészt a térfogatelemben belépő teljesítmény $P_{be} = dAS_{be}$. Emiatt

$$\frac{dP_{be}dA}{P_{be}} = -\sigma = -dAdx\alpha \Rightarrow \frac{d \ln P_{be}}{dx} = -\alpha \Rightarrow P_{be} \sim P_{be}^{(0)} e^{-\alpha x}. \quad (3.297)$$

Légkörön való szórásra alkalmazva a fentieket

- a szórás erőssége $\sim k^4$, ezért ha a szórt fényt figyeljük, ott a nagyobb frekvenciák dominálnak, vagyis kék az ég
- ha a fényforrást figyeljük, ott a nagyobb frekvenciák egy része már kiszóródott, vagyis a lemenő Nap fénye vöröses
- $\theta = \pi/2$ -nél, vagyis a Napra merőleges irányban legkisebb a differenciális szórási hatáskeresztmetszet, vagyis ott a legsötétebb (legmélyebb) az ég
- itt teljesen polarizált a fény, ebből a Nap irányát még akkor is meg lehet határozni, ha nem látszik a Nap.
- ha a szórócentrumok sűrűsége végtelenhez tartana, de a törésmutató nem lenne 1, akkor $\alpha \rightarrow 0$, vagyis nem lenne szórás. Az ég kék színe tehát az atomok létezésének közvetett bizonyítéka.

A fenti gondolatmenet alkalmazható akkor is, ha a szórócentrum nem molekula, hanem homogén anyag sűrűség-ingadozásai. Mivel

$$\delta\varepsilon_r = \frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\mathcal{N}}\delta\mathcal{N}, \quad \frac{\partial\gamma_{mol}}{\partial\mathcal{N}} = 0 = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\mathcal{N}^2} + \frac{1}{\mathcal{N}}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\mathcal{N}} \Rightarrow \delta\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_r - 1}{\mathcal{N}}\delta\mathcal{N}. \quad (3.298)$$

Miután a sűrűség-ingadozások ugyanúgy korrelálatlanok mint a gázmolekulák helye, a fenti kifejezés írható γ_{mol} helyére

$$\alpha = \frac{k^4(\varepsilon_r - 1)^2}{6\pi\mathcal{N}}\delta\mathcal{N}^2. \quad (3.299)$$

Statisztikus fizikából lehet tudni, hogy $\langle\delta N^2\rangle = k_B T \partial N / \partial \mu$, ahol μ a kémiai potenciál. Termodinamikai összefüggésekből pedig jön

$$\frac{\delta N^2}{N} = \mathcal{N} k_B T \beta_T, \quad \text{ahol} \quad \beta_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T, \quad (3.300)$$

az izoterm kompresszibilitás. Ezzel

$$\sigma = \frac{k^4(\varepsilon_r - 1)^2}{6\pi} \mathcal{N} k_B T \beta_T. \quad (3.301)$$

Másodrendű fázisátalakulásnál $\beta_T \rightarrow \infty$, vagyis megnő a szórás \Rightarrow kritikus opaleszcencia.

Ha a szórócentrumok nem véletlenszerűen helyezkednek el, akkor $\mathcal{F}(\mathbf{q})$ bonyolultabb struktúrát mutat. Pl. ha köbös rácson helyezkednek el, akkor

$$\mathbf{x}_j = a \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{e}_i, \quad n_i \in \mathbf{N}, \quad (3.302)$$

emiatt

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}) = \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j} = \prod_{i=1}^3 \sum_{n_i} e^{iq_i a n_i} = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin \frac{2N_i + 1}{2} q_i a}{\sin \frac{q_i a}{2}} \Rightarrow |\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2 = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin^2 \frac{2N_i + 1}{2} q_i a}{\sin^2 \frac{q_i a}{2}}, \quad (3.303)$$

mivel

$$\sum_{n=-N}^N e^{iqan} = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} qa}{\sin \frac{qa}{2}}. \quad (3.304)$$

$|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2$ majdnem mindenütt $\mathcal{O}(1)$, vagyis térfogattal osztva eltűnik a végtelen térfogati limeszben. Kivételt képeznek azok a helyek, ahol

$$q_i = \frac{2\pi\ell_i}{a}, \quad \text{ahol} \quad \ell_i \in \mathbf{N} \quad (\text{Bragg-feltétel}) \Rightarrow e^{iq_i a n_i} = 1 \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{q}) = N^2. \quad (3.305)$$

Az erősítés helyeit figyelve az anyag szerkezetére következtethetünk \Rightarrow optikai rács, elektronmikroszkóp.

3.8 Cherenkov-sugárzás és átmeneti sugárzás

Az elektromágneses hullámok vizsgálatában a következő logikát követtük

- *szabad elektromágneses hullámok*: el. mágn. hullámok térerőssége, Poynting-vektora, jelenségek: abszorpció, törés, hullámvezetők
- *mozgó töltés* \Rightarrow *el. mágn. hullámok* \Rightarrow Liénard-Wiechert potenciálok, térerősségek, szögfüggés, spektrum
- *el. mágn. hullám* \Rightarrow *anyag* \Rightarrow *el. mágn. hullám*: szórás jelenségek, szórás gázon, szabályos kristályon
- *mozgó töltés* \Rightarrow *el. mágn. térerősség* \Rightarrow *anyag* \Rightarrow *el. mágn. hullám*: logikusan a következő lépés.

Most azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor a bemenő részecske egyenesvonalú egyenletes mozgást végez (részlegesen) homogén, $\varepsilon(\omega)$ dielektromos állandójú anyagban (feltesszük, hogy $\mu = \mu_0$).

Teljesen homogén közegben, azonban frekvenciafüggő dielektromos állandó mellett kissé megváltozik a Maxwell-egyenletek megoldása a Liénard-Wiechert potenciálokhoz képest. A töltés- illetve áramsűrűség egyenesvonalú egyenletes mozgás esetén: $\rho = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{vt})$ illetve $\mathbf{J} = qv\delta(\mathbf{x} - \mathbf{vt})$. Lorentz-mértékben a potenciálokra vonatkozó egyenletek

$$(\Delta - \mu_0\varepsilon\partial_t^2)\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (\Delta - \mu_0\varepsilon\partial_t^2)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} = \mu_0\varepsilon\mathbf{v}\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mu_0\varepsilon\mathbf{v}\Phi. \quad (3.306)$$

Fourier-transzformáció után $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$, $\partial_t \rightarrow -i\omega$. A töltéssűrűség Fourier transzformáltja

$$\int d\mathbf{x}dt e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \rho(t, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}dt e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{vt}) = q \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})t} = 2\pi q\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (3.307)$$

Emiatt

$$(k^2 - \mu_0\varepsilon\omega^2)\Phi = \frac{2\pi q}{\varepsilon}\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi q}{\varepsilon} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2 - \mu_0\varepsilon\omega^2}. \quad (3.308)$$

A térerősségek

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A} &\Rightarrow \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -i\mathbf{k}\Phi + i\omega\mathbf{A} = i(\omega\mu_0\varepsilon\mathbf{v} - \mathbf{k})\Phi = \frac{2\pi iq}{\varepsilon} (\omega\mu_0\varepsilon\mathbf{v} - \mathbf{k}) \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2 - \mu_0\varepsilon\omega^2}, \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = i\mu_0\varepsilon\Phi \mathbf{k} \times \mathbf{v} = \mu_0\varepsilon\mathbf{v} \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3.309)$$

A valós térbeli eredmény kiszámítása inverz Fourier transzformálttal történik. Válasszuk speciális koordinátarendszert (mint korábban a Liénard-Wiechert potenciálok kiértékelésénél), ahol $\mathbf{v} = (0, 0, v)$, és $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$. Először számítsuk ki a frekvenciafüggő térerősséget:

$$E_z(\omega, \mathbf{x}) = \frac{2\pi iq}{\varepsilon} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{ik_x x} (\omega\mu_0\varepsilon v - k_z) \frac{\delta(\omega - k_z v)}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \mu_0\varepsilon\omega^2}. \quad (3.310)$$

Vezessük be

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2}(1 - \mu_0\varepsilon v^2) = \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{v^2}{c_{\text{közeg}}^2}\right). \quad (3.311)$$

Ha $v <$ közegbeli fénysebesség, akkor λ valós, ellenkező esetben tisztán képzetes. Ezzel

$$E_z(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{iq\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{e^{ik_x x}}{k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2} = -\frac{iq\lambda^2}{4\pi\varepsilon\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{k_x^2 + \lambda^2}} = -\frac{iq\lambda^2}{4\pi\varepsilon\omega} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2 + 1}}, \quad (3.312)$$

mert $\int dx/(x^2 + a^2) = \pi/a$. Ezzel analóg módon

$$E_y(\omega, \mathbf{x}) = 0, \quad E_x = -\frac{iq\lambda}{4\pi\varepsilon v} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{se^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2 + 1}}, \quad B_x = B_z = 0, \quad B_y = \varepsilon\mu_0 v E_x. \quad (3.313)$$

Messziről figyelve az elhaladó töltést

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}} e^{-\lambda x} + \dots, \quad \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{se^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2+1}} = -i \frac{\partial}{\partial \lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2+1}} = i \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}} e^{-\lambda x} + \dots \quad (3.314)$$

Ezzel

$$E_x(\omega, x) = \frac{q}{4\pi\epsilon v} \sqrt{\frac{\lambda\pi}{2x}} e^{-\lambda x}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{-iv\lambda}{\omega} E_x. \quad (3.315)$$

Ha $v < c_{\text{közeg}}$, akkor λ valós, és exponenciálisan lecsengő megoldást kapunk (ebből a tagból); ha azonban $v > c_{\text{közeg}}$, akkor λ képzetes, és \mathbf{E} egy $1/\sqrt{x}$ szerint lecsengő hullámot ír le! A Poynting-vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \Rightarrow S_x = -\epsilon v E_x E_z, \quad S_z = \epsilon v E_x^2 \Rightarrow \tan \theta = \frac{S_x}{S_z} = -\frac{E_z}{E_x} = \frac{iv\lambda}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{\text{közeg}}^2}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{c_{\text{közeg}}}{v}. \quad (3.316)$$

Értelmezés: a mozgó töltés felől kúpszerűen kiinduló hullámot figyelhetünk meg, a fénysebességnél gyorsabb mozgás "lökéshullám-front"-ját \Rightarrow *Cherenkov-sugárzás*.

Számoljuk ki a részecske által egységnyi úton kisugárzott teljesítményt! Először a részecskét körülvevő cső felületén átáramló teljesítményt számoljuk ki:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oint d\mathbf{f} \mathbf{S} = 2\pi x \int_{-\infty}^{\infty} dz S_x = -\frac{2\pi x}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz B_y E_z. \quad (3.317)$$

Az egységnyi úton kisugárzott energia:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \frac{dt}{dz} = -\frac{2\pi x}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt B_y E_z = -\frac{x}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega B_y^*(\omega) E_z(\omega) = -xv^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{-i\lambda\epsilon^*}{\omega} |E_x(\omega)|^2 = -2xv^2 \text{Im} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\lambda\epsilon^*}{\omega} |E_x(\omega)|^2. \quad (3.318)$$

Béírva E_x -et

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = -\frac{q^2}{16\pi} \text{Im} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\lambda^2}{\omega\epsilon}. \quad (3.319)$$

Ultrarelativisztikus határesetben $\lambda^2 = \omega^2(1 - \epsilon\mu_0 v^2)/v^2 \rightarrow \omega^2(1 - \epsilon_r)/c^2$. Szabad elektronokra $\epsilon_r = 1 - \omega_p^2/(\omega^2 + i\epsilon)$, ezzel

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 c^2} \text{Im} \int_0^{\infty} d\omega \omega \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) = \frac{q^2 \mu_0}{32} \omega_p^2, \quad (3.320)$$

hiszen

$$\frac{1}{\epsilon_r} - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2 + i\epsilon} \Rightarrow \text{Im} \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) \rightarrow -\pi \omega_p^2 \delta(\omega^2 - \omega_p^2) = -\frac{\pi}{2} \omega_p \delta(\omega - \omega_p). \quad (3.321)$$

Most tegyük fel, hogy a tér nem homogén, hanem a $z > 0$ térrészt ϵ , a $z < 0$ térrészt ϵ_0 permittivitású anyag tölti ki. Legyen a megoldás a két térrészben E^+ illetve E^- . A fenti tárgyalás megfelelő a forrás által létrehozott tér kezeléséhez, azonban a teljes megoldás tartalmazza a homogén egyenlet megoldását is, ami itt szükséges, hogy figyelembe tudjuk venni a határfeltételeket a két anyagrézsz találkozásánál:

$$E_{x,y}^+(t, x, y, z=0) = E_{x,y}^-(t, x, y, z=0), \quad \epsilon E_z^+(t, x, y, z=0) = \epsilon_0 E_z^-(t, x, y, z=0), \\ \mathbf{H}^+(t, x, y, z=0) = \mathbf{H}^-(t, x, y, z=0), \quad (3.322)$$

ahol $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{inhom} + \mathbf{E}_{hom}$, és az inhomogén rész megoldását Fourier-térben (3.309) adja. Mivel $\mu = \mu_0$ -t vettünk, ezért \mathbf{H} folytonos.

Most tekintsünk el az ε frekvenciafüggésétől. Fourier transzformálva t , x és y szerint ugyanezek a feltételek fennállnak. Ez azt jelenti, hogy a $z = 0$ feltétel kielégítéséhez csak z -ben kell az inverz Fourier transzformációt elvégeznünk:

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = i(\omega\mu\varepsilon\mathbf{v} - \mathbf{k}) \frac{2\pi q}{\varepsilon} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2 - \mu\varepsilon\omega^2} = i(\omega\mu\varepsilon\mathbf{v} - \mathbf{k}) \frac{2\pi q}{\varepsilon} \frac{\delta(\omega - k_z v)}{k_T^2 + k_z^2 - \mu\varepsilon\omega^2}, \quad \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}_T, z) = \int \frac{dk_z}{2\pi} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{ik_z z}, \quad (3.323)$$

ahol a transzverzális tér $T = (x, y)$. A k_z integrál a Dirac-delta miatt könnyen elvégezhető:

$$E_T(\omega, k_x, k_y, z) = \frac{-iq\mathbf{k}_T}{\varepsilon v} \frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2}, \quad E_z = \frac{-iq\lambda^2}{\varepsilon\omega} \frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2} \Rightarrow \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}_T, z) = \frac{-iq}{\varepsilon v} \left(\mathbf{k}_T + \frac{\lambda^2 v}{\omega} \mathbf{e}_z \right) \frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2}. \quad (3.324)$$

A homogén egyenlet megoldását is hozzuk ilyen alakra

$$\mathbf{E}_{hom}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{e} E_0(\mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} 2\pi\delta(\omega - kc) \mathbf{e} E_0(\mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{E}_{hom}(\omega, \mathbf{k}) = 2\pi\delta(\omega - kc) \mathbf{e} E_0(\mathbf{k}). \quad (3.325)$$

Ebből

$$\mathbf{E}_{hom}(\omega, \mathbf{k}_T, z) = \mathbf{e} \bar{E}_0 e^{\pm ik_z z}, \quad \text{ahol } \bar{E}_0 = \frac{k E_0}{ck_z}, \quad \mathbf{e}(\mathbf{k}_T \pm k_z \mathbf{e}_z) = 0, \quad k_z = \sqrt{\varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} - k_T^2}. \quad (3.326)$$

A polarizációs vektorban \mathbf{e}_\perp merőleges mind \mathbf{e}_z -re, mind $\hat{\mathbf{k}}_T$ -re, a párhuzamos komponens pedig:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_z \mp \alpha \mathbf{k}_T \Rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{k}_T \pm k_z \mathbf{e}_z) = \pm k_z \mp \alpha k_T^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{k_z}{k_T^2} \quad (3.327)$$

vagyis

$$\mathbf{E}_{hom}(\omega, \mathbf{k}_T, z) = \left[E_\parallel^\pm \left(\mathbf{e}_z \mp \frac{k_z}{k_T^2} \mathbf{k}_T \right) + E_\perp^\pm \mathbf{e}_\perp \right] e^{\pm ik_z z}, \quad k_z = \sqrt{\varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} - k_T^2}. \quad (3.328)$$

Fizikai határfeltételek: nincs beeső hullám, azaz $z < 0$ -ban csak $\sim e^{ik_z z}$ illetve $z > 0$ -ban csak $e^{ik_z z}$ hullám maradhat. A két térfélen ezek szerint a teljes térerősség

$$\begin{aligned} E^-(\omega, \mathbf{k}_T, z) &= \left[E_\parallel^- \left(\mathbf{e}_z + \frac{k_z}{k_T^2} \mathbf{k}_T \right) + E_\perp^- \mathbf{e}_\perp \right] e^{-ik_z z} - \frac{iq}{\varepsilon_0 v} \left(\mathbf{k}_T + \frac{\lambda_0^2 v}{\omega} \mathbf{e}_z \right) \frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda_0^2} \\ E^+(\omega, \mathbf{k}_T, z) &= \left[E_\parallel^+ \left(\mathbf{e}_z - \frac{k_z}{k_T^2} \mathbf{k}_T \right) + E_\perp^+ \mathbf{e}_\perp \right] e^{ik_z z} - \frac{iq}{\varepsilon v} \left(\mathbf{k}_T + \frac{\lambda^2 v}{\omega} \mathbf{e}_z \right) \frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (3.329)$$

A $z = 0$ -nál kirótt határfeltételekből meghatározható E_\parallel^\pm , E_\perp^\pm , és ezzel a sugárzás. Az \mathbf{e}_\perp komponensre nincs forrás, azaz ilyen polarizációjú sugárzás nincsen (részletesebben: teljesülnie kell $E_\perp^+ = E_\perp^-$, és a \mathbf{H} folytonossága miatt $E_\perp^+/c = E_\perp^-/c_0$ egyenleteknek egyszerre). A párhuzamos polarizációra az általános képlet bonyolult, ezért az egyszerűség kedvéért nézzük azt az esetet, mikor a $z > 0$ tartományban tökéletes vezetőt veszünk, azaz $\mathbf{E}^+ = 0$. Ekkor a határon $E_T^- = 0$, ebből:

$$E_\parallel^- = \frac{iqk_T^2}{\varepsilon_0 k_z v} \frac{1}{k_T^2 + \lambda_0^2} \Rightarrow \mathbf{E}_{hom} = \frac{k E_\parallel^-}{ck_z} \left(\mathbf{e}_z + \frac{k_z}{k_T^2} \mathbf{k}_T \right) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \frac{iqk_T \omega^2}{\varepsilon_0 c^3 v k_z^2} \frac{1}{k_T^2 + \lambda_0^2} \mathbf{e}_\parallel e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (3.330)$$

ahol $\mathbf{e}_\parallel = k_T/k(\mathbf{e}_z + k_z \mathbf{k}_T/k_T^2)$ egységvektor. A hullám irányára $k_T^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2$ miatt $k_T = \omega/c \sin \theta$ és $k_z = \omega/c \cos \theta$, azaz

$$k_T^2 + \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \Rightarrow \mathbf{E}_{hom} = \frac{iqv}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\tan^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \mathbf{e}_\parallel e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (3.331)$$

A sugárzás ultrarelativisztikus esetben a $\cos \theta \approx 1$ értékeinél erős csúcsot mutat, csakúgy, mint a gyorsuló töltések sugárzásánál láttuk; $\delta\theta \sim 1/\gamma$ a sugárzás kiterjedése.

3.9 Relativisztikus elektrodinamika

Az elektrodinamika nem invariáns a Galilei-transzformációra, vagyis a szokásos, klasszikus mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérésre. Ennek két magyarázata lehet: vagy csak egy adott koordinátarendszerben (éter) érvényes az elektrodinamika, vagy más módon kell áttérni mozgó vonatkoztatási rendszerre.

A Michelson-Morley kísérlet azt bizonyította, hogy ha létezik az éter, akkor a földi megfigyelő az éterhez képest nem mozog, hiszen a fény sebessége független volt a mérés irányától. Ez az éter-képet kizárja, vagy legalábbis annyira elbonyolítja, hogy nem valószínű ez a hipotézis.

Nézzük a második lehetőséget, és állapítsuk meg azt a transzformációt, amelyre invariánsak a Maxwell-egyenletek. Ehhez mindenekelőtt új jelöléseket vezetünk be. Hangsúlyozni kell, hogy ezek csupán definíciók, melyek értelme később lesz világos.

3.9.1 Relativisztikus koordináták

Vezessük be a nulladik térkoordinátát $x^0 = ct$ módon, vagyis az időt azzal a távolsággal mérjük, amit a fény egységnyi idő alatt megtesz. Ekkor egy eseményt egy négyesvektorral jellemezhetünk

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}). \quad (3.332)$$

Az indexet felülre tesszük, és – ahogy már korábban tárgyaltuk – kontravariáns koordinátáknak nevezzük. A négyesvektor szerinti parciális deriválás

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (3.333)$$

a deriválás indexe alul van, ezek a kovariáns vektorok. Az integrálás

$$\int d^4x = c \int dt d^3\mathbf{x}. \quad (3.334)$$

Vektorok skaláris szorzatához egy metrikus tenzort vezetünk be. A motiváció az, hogy az elektrodinamikában a hullámegyenletben a $\square = \Delta - \partial_t^2/c^2$ differenciáloperátor jelenik meg:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \Rightarrow a \cdot b = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu, \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu. \quad (3.335)$$

Komponensekben kiírva tehát

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2/c^2 - \Delta = -\square, \quad x^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2. \quad (3.336)$$

Ez azt jelenti, hogy nem csak a nullvektor hossza nulla, hanem minden $r = ct$ pontra igaz ez, azaz a fénykúp elemeire. Az origóból fénysebességnél kisebb átlagsebességgel elérhető eseményeknél $r = vt$, azaz $x^2 = (c^2 - v^2)t^2 > 0$, ezek az *időszerű* események. Ha $x^2 < 0$, akkor *térszerű* eseményekről beszélünk.

A térkoordinátáknak megfelelően az elektrodinamika mennyiségeit is négyesvektorokba rendezhetjük. Egy tömegpont esetén a töltéssűrűség $\varrho = q\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t))$, míg az áramsűrűség $\mathbf{J} = qv\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t))$. Mivel $v_i = \dot{x}_i$, ez azt sugallja, hogy érdemes

$$\mathcal{J}^\mu = (c\varrho, \mathbf{J}) \quad (3.337)$$

módon definiálni a négyes áramsűrűséget. Ekkor a kontinuitási egyenlet

$$0 = \partial_t \varrho + \partial_i J_i = \frac{1}{c} \partial_t (c\varrho) + \partial_i \mathcal{J}^i = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu, \quad (3.338)$$

a négyesdivergencia eltűnését jelenti.

A skalár- és vektorpotenciál sztatikus ponttöltés esetén a töltésből és áramból ugyanolyan módon áll elő, de az egyiket $1/\varepsilon_0$, a másikat μ_0 szorozza, emiatt Φ/c és \mathbf{A} azonos dimenziójú:

$$\frac{\Phi}{c} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 cr} = \frac{\mu_0 qc}{4\pi r}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 q\mathbf{v}}{4\pi r}. \quad (3.339)$$

Emiatt a négyespotenciál definíciója

$$\mathcal{A}^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, \mathbf{A}\right). \quad (3.340)$$

Hogy a Maxwell-egyenleteket le tudjuk írni, bevezetjük a *térerősség-tenzort*:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (3.341)$$

Mivel

$$\begin{aligned} E_i &= -\partial_i \Phi - \partial_t A_i = -\partial_i c \mathcal{A}^0 - c \partial_0 \mathcal{A}^i = -c(\partial^0 \mathcal{A}^i - \partial^i \mathcal{A}^0) = -c F^{0i} \Rightarrow F^{0i} = -\frac{1}{c} E_i \\ B_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = -\varepsilon_{ijk} \partial^j \mathcal{A}^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial^j \mathcal{A}^k - \partial^k \mathcal{A}^j) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk} \Rightarrow F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k. \end{aligned} \quad (3.342)$$

Vagyis a felső indexes térerősség-tenzor komponenseinek jelentése

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.343)$$

A Maxwell egyenletek egy része a térerősség-tenzor deriváltjaival van kapcsolatban:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_i F^{i0} = \frac{1}{c} \partial_i E_i = \frac{1}{c} \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0 \mathcal{J}^0 \\ \partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\frac{1}{c^2} \partial_t E_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k = \mu_0 \mathcal{J}^i, \end{aligned} \quad (3.344)$$

vagyis összefoglalva

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \mathcal{J}^\nu. \quad (3.345)$$

A többi Maxwell egyenlet valójában azonosság: vezessük be a duális térerősség-tenzort:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad \text{ahol } \varepsilon^{0123} = 1, \quad (3.346)$$

és teljesen antiszimmetrikus, azaz minden indexpár cseréjére jelet vált. Emiatt $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho}$. A három dimenziós Levi-Civita szimbólummal való kapcsolata $\varepsilon^{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$. A duális kapcsolat

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (-\varepsilon_{jkl} B_\ell) = -B_i = -\frac{1}{c} \tilde{E}_i \Rightarrow \tilde{E}_i = c B_i \\ \tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{ijk0} F_{k0} + \varepsilon^{ij0k} F_{0k}) = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} E_k = -\varepsilon_{ijk} \tilde{B}_k \Rightarrow c \tilde{B}_k = -E_k. \end{aligned} \quad (3.347)$$

A duális térerősség-tenzor négyesderiváltja automatikusan nulla, hiszen:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho \mathcal{A}_\sigma - \partial_\sigma \mathcal{A}_\rho) = 0, \quad (3.348)$$

ami egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix szorzata. Ezen egyenletek jelentése

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} &= \frac{1}{2} \partial_i \varepsilon^{i0jk} F_{jk} = \frac{1}{2} \partial_i (-\varepsilon_{ijk}) (-\varepsilon_{jkl} B_\ell) = \operatorname{div} \mathbf{B}, \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu i} &= \partial_0 \tilde{F}^{0i} + \partial_j \tilde{F}^{ji} = \frac{1}{2} \partial_0 \varepsilon^{0ijk} F_{jk} + \frac{1}{2} \partial_j (\varepsilon^{ji0k} F_{0k} + \varepsilon^{jik0} F_{k0}) = \frac{1}{2c} \partial_t \varepsilon_{ijk} (-\varepsilon_{jkl} B_\ell) + \frac{1}{c} \partial_j \varepsilon_{jik} E_k = \\ &= -\frac{1}{c} [\partial_t B_i + (\operatorname{rot} \mathbf{E})_i]. \end{aligned} \quad (3.349)$$

Vagyis ez a két egyenlet a térerősség-tenzor szintjén nem egyenlet, hanem azonosság. Visszafelé gondolkodva pont ez a két egyenlet tette lehetővé a skalár- illetve vektorpotenciál bevezetését.

3.9.2 Lorentz-transzformáció

A Maxwell-egyenleteket tehát sikerült átfogalmazni olyan alakba, amely kizárólag négyes skalárszorzatokat tartalmaz. Emiatt a Maxwell-egyenletek alakja változatlan marad akkor, ha olyan transzformációt hajtunk végre a négyesvektorokon illetve -tenzorokon, amelyek a *négyes* skalárszorzatot invariánsan hagyják. Emlékeztetőül: a hármas skalár szorzatot invariánsan hagyó transzformációk a forgatások. Lehet tehát ezeket a transzformációkat általánosított forgatásokként felfogni, ahol az idő komponens is "forgatjuk". A különbség a skalár szorzat tér és idő komponensei között az előjelben van.

Keressük tehát a négyesvektorok olyan lineáris transzformációit

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}, \quad \forall a^{\mu} \quad (3.350)$$

amelyre a négyes skaláris szorzat invariáns marad:

$$\forall a, b \quad a' \cdot b' = a \cdot b \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} g_{\mu\mu'} \Lambda^{\mu'}_{\nu'} b^{\nu'} = a^{\nu} b^{\nu'} g_{\nu\nu'}. \quad (3.351)$$

Ha ez minden a, b -re teljesül, akkor

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\mu'}_{\nu'} g_{\mu\mu'} = g_{\nu\nu'}. \quad (3.352)$$

Ezeket hívjuk *Lorentz-transzformációknak*. A pont azért kell, mert nem mindegy, hogy melyik az első és melyik a második index. Néhány formula:

$$a'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} a_{\nu}, \quad \Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = \delta^{\nu}_{\sigma}, \quad (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\rho} = \Lambda_{\rho}^{\nu}. \quad (3.353)$$

A helyvektor négyesvektor, így ennek transzformációja

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \Rightarrow \quad \partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \partial_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu}, \quad (3.354)$$

vagyis a deriválás valóban kovariáns vektorként transzformálódik.

A mezők transzformációja: a transzformált mező a transzformált helyen az eredeti mező elforgatottja, amelyet a régi helyen kell venni – l. forgatás példája. Pl:

$$\mathcal{A}'(x') = \Lambda \mathcal{A}(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}'(x) = \Lambda \mathcal{A}(\Lambda^{-1}x). \quad (3.355)$$

Ha találunk ilyen mátrixot, akkor minden négyes skaláris szorzattal megfogalmazható egyenlet ugyanolyan alakú lesz a transzformáció után is. Hogy ezt jobban lássuk, nézzük meg a Maxwell-egyenletek transzformációját. A térerősség-tenzor transzformációja

$$F'^{\mu\nu}(x') = \partial'^{\mu} \mathcal{A}'^{\nu}(x') - \partial'^{\nu} \mathcal{A}'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} F^{\mu'\nu'}(x). \quad (3.356)$$

Ha az áramsűrűséget is négyesvektorként transzformáljuk, akkor

$$\partial'_{\mu} F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda_{\mu}^{\mu'} \partial_{\mu'} \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\nu'} F^{\mu'\nu'}(x) = \Lambda_{\nu'}^{\nu} \partial_{\mu'} F^{\mu'\nu'}(x) = \Lambda_{\nu'}^{\nu} \mu_0 \mathcal{J}^{\nu'}(x) = \mu_0 \mathcal{J}^{\nu}(x'), \quad (3.357)$$

vagyis a transzformált térerősség-tenzor transzformált koordináták szerinti deriváltja a transzformált áramsűrűséget adja meg. Az elektrodinamika tehát invariáns a Lorentz-transzformációkkal szemben.

A Lorentz-transzformáció mátrixa 4×4 -es valós mátrix, azaz 16 paraméteres. A definiáló egyenlete (3.352) 4×4 -es szimmetrikus mátrixot nulla voltát követeli meg, ami 10 megkötést jelent. A Lorentz transzformációk tehát 6 paramétertől függenek.

Jelöljük

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g \Lambda^T g \Lambda = \mathbf{1}. \quad (3.358)$$

Ennek speciális példája, ha $\Lambda^0_0 = 1$, $\Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = 0$, és $\Lambda^i_j = O_{ij}$, azaz

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g \Lambda^T g \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O}^T \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{O}^T \mathbf{O} = \mathbf{1}. \quad (3.359)$$

Ez azt jelenti, hogy O ortogonális mátrix, azaz forgatást ír le. 3D-s forgatásnak 3 paramétere van, ez a Lorentz-transzformációk 6 paraméteréből 3.

Másik speciális Lorentz transzformáció:

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.360)$$

Elég a felső almatrixra koncentrálni, erre (3.352) megkötés:

$$g\Lambda^T g\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^1_0 \\ -\Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 & \Lambda^0_0\Lambda^0_1 - \Lambda^1_0\Lambda^1_1 \\ -\Lambda^0_0\Lambda^0_1 + \Lambda^1_0\Lambda^1_1 & (\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.361)$$

azaz

$$\begin{aligned} (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 = 1 &\Rightarrow \Lambda^0_0 = \cosh \eta, & \Lambda^1_0 = \sinh \eta \\ (\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2 = 1 &\Rightarrow \Lambda^1_1 = \cosh \bar{\eta}, & \Lambda^0_1 = \sinh \bar{\eta} \\ \Lambda^0_0\Lambda^0_1 - \Lambda^1_0\Lambda^1_1 &\Rightarrow \tanh \eta = \tanh \bar{\eta} &\Rightarrow \eta = \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (3.362)$$

Emiatt

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \\ \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix}. \quad (3.363)$$

Hogy ennek fizikai jelentését megtaláljuk, alkalmazzuk a helyvektorra:

$$x'^0 = \cosh \eta x^0 + \sinh \eta x^1, \quad x'^1 = \sinh \eta x^0 + \cosh \eta x^1. \quad (3.364)$$

A vesszős rendszer origójának egyenlete az eredeti rendszerben: $x'^1 = 0$, azaz

$$x'^1 = 0 = \sinh \eta x + \cosh \eta ct \Rightarrow x = -c \tanh \eta t \Rightarrow \tanh \eta = -\frac{v}{c}. \quad (3.365)$$

Emiatt az η paraméter a mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérésnél a mozgó rendszer sebességével van kapcsolatban – emiatt neve *rapiditás*. A fenti példa az x irányban mozgó rendszerre való áttérést jelentette, hasonló módon az y illetve z irányba való áttérést is meg lehet tenni: ez a Lorentz transzformációk újabb 3 paraméterét adják. A Lorentz transzformációk 6 paramétere tehát: 3 forgatás és 3 “boost”.

Mivel

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma, \quad \sinh \eta = \frac{\tanh \eta}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = -\gamma\beta \Rightarrow \Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.366)$$

Nézzük meg különböző négyesvektorok transzformációját: a helyvektor esetén

$$x^\mu = (ct, x) \Rightarrow t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.367)$$

Az áramsűrűség esetén

$$\mathcal{J}^\mu = (c\rho, J) \Rightarrow \rho' = \frac{\rho - vJ/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad J' = \frac{J - v\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.368)$$

A négyespotenciálok esetén

$$\mathcal{A}^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, A\right) \Rightarrow \Phi' = \frac{\Phi - vA}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A' = \frac{A - v\Phi/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.369)$$

A térerősség-tenzor tenzorként transzformálódik

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} F^{\mu'\nu'}. \quad (3.370)$$

A különböző komponensek transzformációja:

$$\begin{aligned}
F'^{01} &= \Lambda^0_{\mu'} \Lambda^1_{\nu'} F^{\mu'\nu'} = \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 F^{10} = (\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta) F^{01} = F^{01} \\
F'^{0i} \Big|_{i>1} &= \Lambda^0_{\mu'} \Lambda^i_{\nu'} F^{\mu'\nu'} = \Lambda^0_{\mu'} F^{\mu'i} = \cosh \eta F^{0i} + \sinh \eta F^{1i} \\
F'^{1i} \Big|_{i>1} &= \Lambda^1_{\mu'} \Lambda^i_{\nu'} F^{\mu'\nu'} = \Lambda^1_{\mu'} F^{\mu'i} = \sinh \eta F^{0i} + \cosh \eta F^{1i} \\
F'^{23} &= \Lambda^2_{\mu'} \Lambda^3_{\nu'} F^{\mu'\nu'} = F^{23}.
\end{aligned} \tag{3.371}$$

Az elektromágneses térrel megfogalmazva

$$\begin{aligned}
E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \frac{E_2 - vB_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & E'_3 &= \frac{E_3 + vB_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \frac{B_2 + vE_3/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & B'_3 &= \frac{B_3 - vE_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{3.372}$$

3.9.3 Tömegpont relativisztikus dinamikája

Einstein arra mutatott rá, hogy ha egy tömegpont kölcsönhat az elektromágneses térrel, akkor ott is a Lorentz-transzformációkat kell használni a mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérésnél. A mozgásegyenleteknek relativisztikusan kovariánsnak kell lenniük.

Először azt állapítsuk meg, hogy egy részecske pályája mentén milyen invariánsok illetve négyesvektorok definiálhatók, hiszen ezek használhatók egy kovariáns mozgásegyenlet felírásához. A pálya a négyes térben $\gamma^\mu(s) = (ct(s), \mathbf{x}(s))$ alakú, ahol s a paraméter. A pálya ívhossza, illetve az ebből definiált sajátidő

$$c\tau = \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{\frac{d\gamma^\mu}{ds} \frac{d\gamma_\mu}{ds}} \tag{3.373}$$

egy skalárszorzatot tartalmaz, vagyis relativisztikusan invariáns. Az idővel paraméterezve a pályát $\gamma^\mu(t) = (ct, \mathbf{x}(t))$, azaz

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma d\tau = dt. \tag{3.374}$$

Kovariáns mennyiség a *négyessebesség* – szokásosan normálni szokták c -vel

$$u^\mu = \frac{1}{c} \frac{d\gamma^\mu}{d\tau} = \gamma \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \Rightarrow u^\mu u_\mu = 1. \tag{3.375}$$

Az impulzus $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$, ahol most m_0 -lal jelöljük a részecske tömegét. Ennek relativisztikusan invariáns négyesvektor megfelelője tehát:

$$P^\mu = m_0 c u^\mu. \tag{3.376}$$

Ez szintén négyesvektor, a nulladik komponensének jelentését a $v \ll c$ limeszből lehet leolvasni:

$$P^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{c} \left(m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \dots \right) \Rightarrow P^0 = \frac{\mathcal{E}}{c}, \quad \mathcal{E} = m_0 \gamma c^2 \equiv mc^2, \tag{3.377}$$

ahol \mathcal{E} a részecske energiája, és a relativisztikus, sebességfüggő tömegnek

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.378}$$

mennyiséget definiáltuk. Az energia és impulzus négyesvektort képez tehát

$$P^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right) = (mc, m\mathbf{v}), \quad P^2 = m_0^2 c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \Rightarrow \mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4. \tag{3.379}$$

A mozgásegyenlet tiszta elektromos térben az volt, hogy $\partial_t \mathbf{p} = q\mathbf{E}$. Ennek relativisztikus kiterjesztéséhez vegyük figyelembe, hogy $E_i = cF^{i0} = cF^{i0}u_0/\gamma$, és a $\partial_t = \partial_\tau/\gamma$, vagyis:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(m_0 u^\mu) = qF^{\mu\nu} u_\nu. \quad (3.380)$$

A térszerű indexekre

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(m_0 \gamma \frac{v_i}{c} \right) = qF^{i\mu} u_\mu = qF^{i0} u_0 + qF^{ij} u_j = q \frac{E_i}{c} \gamma + q(-\varepsilon_{ijk} B_k) \left(-\gamma \frac{v_j}{c} \right) = \frac{\gamma}{c} q (E_i + \varepsilon_{ijk} v_j B_k), \quad (3.381)$$

átrendezve

$$\partial_t(m\mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.382)$$

Vagyis a jobb oldalon megkapjuk a Lorentz erőt, mint a Coulomb-erő relativisztikus kiterjesztését. A bal oldalon az egyetlen módosulás, hogy a tömeg sebességfüggő lett, $m_0 \rightarrow m$. Ez azt jelenti, hogy a töltött részecske tömege $v \rightarrow c$ esetén egyre nagyobb lesz, így egyre nehezebb a sebességét növelni. Dinamikailag tehát a fénysebesség nem léphető át.

Az időszzerű indexre

$$\frac{\partial m}{\partial \tau} = qF^{0i} u_i = q \left(-\frac{E_i}{c} \right) \left(-\gamma \frac{v_i}{c} \right) = \frac{\gamma}{c^2} q \mathbf{E} \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \partial_t(m c^2) = \partial_t \mathcal{E} = q \mathbf{E} \mathbf{v}, \quad (3.383)$$

ami az energia változását írja le.

A mozgásegyenletet energia-impulzus mérlegegyenlet formájában is írhatjuk. Tömegpontra ugyanis $\gamma J^\mu = \gamma(qc, q\mathbf{v}) = cu^\mu$, ezért

$$\partial_t(m_0 cu^\mu) = F^{\mu\nu} J_\nu = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\nu}^{\rho} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\rho \left[-F^{\mu\nu} F_{\nu}^{\rho} + \frac{1}{4} g^{\mu\rho} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} \right]. \quad (3.384)$$

Ez utóbbi formula bizonyításához

$$\begin{aligned} F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= (\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho) (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu - \partial^\rho \partial^\nu A^\mu) = \\ &= (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu) (\partial_\rho A_\nu) - (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu) (\partial_\nu A_\rho) - (\partial^\rho \partial^\nu A^\mu) (\partial_\rho A_\nu) + (\partial^\rho \partial^\nu A^\mu) (\partial_\nu A_\rho) = \\ &= (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu) (\partial_\rho A_\nu) - (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu) (\partial_\nu A_\rho), \end{aligned} \quad (3.385)$$

hiszen a $\rho \rightarrow \nu$ indexcserére a középső sor utolsó két tagja egymásba megy át. Másrészt

$$\begin{aligned} \partial^\mu (F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'}) &= \partial^\mu (\partial^\nu A^{\nu'} - \partial^{\nu'} A^\nu) (\partial_\nu A_{\nu'} - \partial_{\nu'} A_\nu) = 2\partial^\mu [(\partial^\nu A^{\nu'}) (\partial_\nu A_{\nu'}) - (\partial^{\nu'} A^\nu) (\partial_{\nu'} A_\nu)] = \\ &= 4[(\partial^\mu \partial^\nu A^{\nu'}) (\partial_\nu A_{\nu'}) - (\partial^\mu \partial^{\nu'} A^\nu) (\partial_{\nu'} A_\nu)]. \end{aligned} \quad (3.386)$$

Emiatt $4F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} = \partial^\mu (F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'})$, azaz

$$\partial_\rho \left[-F^{\mu\nu} F_{\nu}^{\rho} + \frac{1}{4} g^{\mu\rho} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} \right] = -F^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\nu}^{\rho} - F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \partial^\mu (F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'}) = -F^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\nu}^{\rho}. \quad (3.387)$$

A (3.384) egyenletet átírva

$$\partial_t P^\mu + \partial_\rho T^{\rho\mu} = 0, \quad \text{ahol} \quad T^{\rho\mu} = \frac{1}{\mu_0} \left[-F^{\mu\nu} F_{\nu}^{\rho} + \frac{1}{4} g^{\mu\rho} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} \right], \quad (3.388)$$

vagy komponensekben kiírva

$$\partial_t(\mathcal{E} + T^{00}) + \partial_i(cT^{i0}) = 0, \quad \partial_t(p_i + \frac{1}{c}T^{i0}) + \partial_j T^{ij} = 0. \quad (3.389)$$

Ennek értelmezése: a mechanikai és az elektromágneses tér összes energiájára illetve impulzusára mérlegegyenlet vonatkozik. $T^{\mu\nu}$ neve energia-impulzus tenzor, komponenseinek jelentése pedig: $T^{00} = w$ energiasűrűség, $S_i = cT^{i0}$ az energia-áramsűrűség, $g_i = T^{0i}/c$ az impulzussűrűség és T^{ij} az impulzus-áramsűrűség (Maxwell-féle feszültségtenzor). A térerőségekkel kifejezve:

$$\frac{1}{4\mu_0} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} = \frac{1}{4\mu_0} [2F^{0i} F_{0i} + F^{ij} F_{ij}] = \frac{1}{2\mu_0} \left[-\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right], \quad (3.390)$$

ezért

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^{0i}F^0_i] + \frac{1}{2\mu_0} \left[-\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right] = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \\
T^{0i} &= T^{i0} = -\frac{1}{\mu_0} F^{0j}F^i_j = \frac{1}{c\mu_0} E_j \varepsilon_{ijk} B_k = \frac{1}{c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_i \\
T^{ij} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^{i0}F^j_0 - F^{ik}F^j_k] - \frac{1}{2\mu_0} \left[-\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right] = \frac{1}{2} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}) \delta_{ij} - (E_i D_j + B_i H_j), \quad (3.391)
\end{aligned}$$

megegyeznek a korábban (3.34), (3.35), (3.47) és (3.48) egyenletekben megfogalmazott képletekkel. Mivel $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ emiatt $\mathbf{S} = c^2 \mathbf{g}$ most természetes módon teljesül.

3.9.4 Alkalmazások

A relativisztikus invariancia illetve kovariancia elve sok esetben jelentősen leegyszerűsít a számolásokat. Erre nézzünk néhány példát

- Ha egy rendszerben $\mathbf{B} = 0$, akkor egy másik rendszerben

$$E'_\parallel(x) = E_\parallel(\Lambda^{-1}x), \quad \mathbf{E}'_\perp(x) = \gamma \mathbf{E}_\perp(\Lambda^{-1}x). \quad (3.392)$$

Pl. z irányú egyenesvonalú egyenletes mozgás esetén az álló rendszerben

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.393)$$

A mozgó rendszerben $x' = (ct, x, 0, 0)$ pontban keressük a télerősségeket. Az ennek megfelelő pont az álló koordinátarendszerben

$$x = \Lambda^{-1}x' = (c\gamma t, x, 0, -\gamma vt) \Rightarrow \mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \gamma x \\ 0 \\ -\gamma vt \end{pmatrix}, \quad (3.394)$$

ami megegyezik a közvetlen számolás eredményével.

- A d'Alambert operátor

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 = -\partial_\mu \partial^\mu, \quad (3.395)$$

relativisztikusan invariáns. Emiatt mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve is ugyanaz lesz a fénysebesség.

- Ha egy elektromágneses síkhullámot nézünk mozgó vonatkoztatási rendszerből, akkor mit látunk? Az egyszerűség kedvéért legyen a hullám terjedési iránya ugyanaz, mint a mozgó koordinátarendszer sebességének iránya. Az álló rendszerben legyen

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_y e^{-i\omega(t-x/c)}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{e}_x \times \mathbf{E} = \frac{E_0}{c} \mathbf{e}_z e^{-i\omega(t-x/c)}. \quad (3.396)$$

A mozgó vonatkoztatási rendszer sebessége $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ legyen. Ekkor

$$E'_x = E'_z = 0, \quad B'_x = B'_y = 0, \quad E'_y(x) = \gamma(E_y(\bar{x}) - v B_z(\bar{x})), \quad B'_z(x) = \gamma(B_z(\bar{x}) - \frac{v E_y(\bar{x})}{c^2}), \quad \bar{x} = \Lambda^{-1}x. \quad (3.397)$$

Beírva E_y és B_z alakját

$$E'_y(x) = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} E_0 e^{-i\omega(\bar{t}-\bar{x}/c)}, \quad B'_z(x) = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \frac{E_0}{c} e^{-i\omega(\bar{t}-\bar{x}/c)}. \quad (3.398)$$

Az exponensben szereplő kifejezés

$$\bar{t} = \gamma\left(t + \frac{xv}{c^2}\right), \quad \bar{x} = \gamma(x + vt) \quad \Rightarrow \quad \omega(\bar{t} - \frac{\bar{x}}{c}) = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \omega\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (3.399)$$

Vagyis a mozgó rendszerben is síkhullámot látunk, azonban az amplitúdó és a frekvencia különbözik az álló rendszerbeli értékektől, a sebesség azonban marad fénysebesség:

$$\mathbf{E}'(x) = E'_0 \mathbf{e}_y e^{-i\omega'(t-x/c)}, \quad E'_0 = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} E_0, \quad \omega' = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \omega. \quad (3.400)$$

A frekvencia változása a *Doppler-effektus*. Ha $v = c$ rendszerbe tudnánk átmenni, akkor $\omega' = 0$ és $E'_0 = 0$ lenne, azaz eltűnne a hullám!

A fenti megoldást úgy is megkaphattuk volna, hogy észrevesszük, hogy

$$\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} = k_\mu x^\mu, \quad \text{ahol} \quad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right). \quad (3.401)$$

Emiatt

$$e^{-ikx'} = e^{-ik\Lambda^{-1}x} = e^{-ik'x}, \quad \text{ahol} \quad k' = \Lambda k, \quad (3.402)$$

vagyis

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \gamma k \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \omega. \quad (3.403)$$

- Ha egy egyenletesen mozgó tömegpontot nézünk: $x' = v't'$ az egyenlete valamely rendszerből nézve. Egy hozzá képest mozgó rendszerből:

$$\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = v' \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}} t \quad \Rightarrow \quad V = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}} \quad (3.404)$$

az eredő sebesség képlete. Ha bármely sebesség c , akkor $V = c$ is igaz. Ha rapiditásban nézzük: $v = -c \tanh \eta$, $v' = -c \tanh \eta'$ és $V = -c \tanh \bar{\eta}$ jelöléssel

$$\tanh \bar{\eta} = \frac{\tanh \eta + \tanh \eta'}{1 + \tanh \eta \tanh \eta'} = \tanh(\eta + \eta') \quad \Rightarrow \quad \bar{\eta} = \eta + \eta', \quad (3.405)$$

vagyis a rapiditásban additívek a sebességek.

3.9.5 Sugárzások relativisztikus tárgyalása

Mivel a d'Alambert operátor invariáns, így a sugárzások képletei is relativisztikusan átírhatók.

Először nézzük a Green-függvények relativisztikus invarianciáját: amint láttuk (3.154)-ben

$$G_{R/A}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta\left(t \mp \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right). \quad (3.406)$$

Ez is relativisztikusan invariáns? Ehhez felhasználjuk, hogy

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0, f(x_0)=0} \frac{\delta(x-x_0)}{f'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad \delta(x^2) = \delta(c^2 t^2 - \mathbf{x}^2) = \frac{1}{2|\mathbf{x}|} (\delta(ct - |\mathbf{x}|) + \delta(ct + |\mathbf{x}|)) = \frac{1}{2c|\mathbf{x}|} (\delta(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}) + \delta(t + \frac{|\mathbf{x}|}{c})). \quad (3.407)$$

Emiatt

$$G_R(x) = \frac{c\Theta(t)}{2\pi} \delta(x^2), \quad G_A(x) = \frac{c\Theta(-t)}{2\pi} \delta(x^2). \quad (3.408)$$

A fenti kifejezés Lorentz invariáns, ha nem használunk időtükrözést is.

Mozgó ponttöltés sugárzását a Liénard-Wiechert potenciálok írják le. A (3.210) és (3.211) képletek összefoglalhatók

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{(c, \mathbf{v})}{R - \boldsymbol{\beta} \mathbf{R}} \Big|_{t'}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t'), \quad c(t - t') = R. \quad (3.409)$$

A bal oldal négyesvektor, a jobb oldalt hogyan kell ilyen formában átfogalmazni? A részecske pályájának négyesvektora, valamint a négyessebesség:

$$\gamma^\mu(t) = (ct, \boldsymbol{\gamma}(t)), \quad u^\mu = \frac{(1, \mathbf{v}/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.410)$$

Ekkor a fenti \mathbf{R} négyesvektor általánosítása:

$$R^\mu = x^\mu - \gamma^\mu(t') = (c(t - t'), \mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')) = (c(t - t'), \mathbf{R}) \Rightarrow R^\mu u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (R - \boldsymbol{\beta} \mathbf{R}), \quad (3.411)$$

hiszen $R = c(t - t')$ a retardálás egyenlete. Emiatt

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{\mu_0 q c}{4\pi} \frac{u^\mu}{R^\mu u_\mu} \Big|_{t'}, \quad (3.412)$$

már expliciten invariáns képlet.

Nemrelativisztikus közelítésben gyorsuló töltés által kisugárzott teljesítmény a dipól-közelítéssel írható le: a Larmor képletet a (3.203) egyenletben írtuk le:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} a^2, \quad \text{ha} \quad v \ll c. \quad (3.413)$$

A bal oldal itt relativisztikusan invariáns, hiszen álló rendszerben $cP^\mu = (E, 0)$ és $x^\mu = (ct, 0)$, vagyis mozgó rendszerben

$$E' = \gamma E, \quad t' = \gamma t \Rightarrow \frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt}, \quad (3.414)$$

a teljesítmény minden mozgó megfigyelő számára ugyanaz mint az álló rendszerben. A jobb oldal a Larmor képletben azonban nem relativisztikusan invariáns. Viszont a $v \rightarrow 0$ limeszt ismerve invariánssá tehetjük. Ehhez először a négyesgyorsulás képletét vezetjük le:

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}(\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = \gamma(c, \mathbf{v}) \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2(0, \mathbf{a}), \quad (3.415)$$

ahol $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ hármagysulás. Mivel $d\gamma/dt = \gamma^3 \mathbf{v} \mathbf{a}/c^2$, ezért

$$a^\mu = (\gamma^4 \boldsymbol{\beta} \mathbf{a}, \gamma^4 \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \mathbf{a}) + \gamma^2 \mathbf{a}). \quad (3.416)$$

Álló koordinátarendszerben $a^\mu \rightarrow (0, \mathbf{a})$, azaz

$$a^\mu a_\mu \rightarrow -\mathbf{a}^2, \quad (3.417)$$

vagyis megtaláltuk a \mathbf{a}^2 relativisztikus kiterjesztését. Ezzel a relativisztikus Larmor képlet:

$$P = -\frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} a^\mu a_\mu. \quad (3.418)$$

Sebességekkel és gyorsulásokkal kifejezve:

$$-a^\mu a_\mu = \gamma^4 \mathbf{a}^2 + \gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \mathbf{a})^2 = \gamma^6 (\mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2). \quad (3.419)$$

Ezzel tehát

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} \gamma^6 (\mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2). \quad (3.420)$$

Kifejezhetjük az impulzussal is a kisugárzott teljesítményt: mivel $p^\mu = m_0 c u^\mu$, ezért

$$a^\mu = c \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{\gamma}{m_0} \partial_t p^\mu \Rightarrow -a_\mu a^\mu = \frac{\gamma^2}{m_0^2} \left[(\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{1}{c^2} (\partial_t \mathcal{E})^2 \right]. \quad (3.421)$$

Figyelembe véve, hogy $p^2 = p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2$, azaz $\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$, azaz

$$\mathcal{E} \partial_t \mathcal{E} = c^2 \mathbf{p} \partial_t \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad \partial_t \mathcal{E} = \frac{c^2 \mathbf{p} \partial_t \mathbf{p}}{\mathcal{E}}. \quad (3.422)$$

ezt visszaírva

$$-a_\mu a^\mu = \frac{\gamma^2}{m_0^2} \left[(\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{c^2 (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2}{\mathcal{E}^2} \right] = \frac{\gamma^2}{m_0^2} \left[\frac{(\partial_t \mathbf{p})^2}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} (\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{c^2 (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2}{\mathcal{E}^2} \right]. \quad (3.423)$$

Továbbá

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{c \mathbf{p}}{\mathcal{E}} \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 \left[\frac{v^2}{c^2} (\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{c^2 (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2}{\mathcal{E}^2} \right] = \frac{\gamma^2 c^2}{\mathcal{E}^2} [\mathbf{p}^2 (\partial_t \mathbf{p})^2 - (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2] = \frac{(\mathbf{p} \times \partial_t \mathbf{p})^2}{m_0^2 c^2}. \quad (3.424)$$

Vagyis végül (3.418) alapján

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m_0^2 c^2} \left[(\partial_t \mathbf{p})^2 + \frac{(\mathbf{p} \times \partial_t \mathbf{p})^2}{m_0^2 c^2} \right]. \quad (3.425)$$

Ha $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$, azaz $\mathbf{p} \parallel \partial_t \mathbf{p}$, vagyis 1D mozgásról van szó. Ekkor $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0$, azaz

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m_0^2 c^2} (\partial_t \mathbf{p})^2. \quad (3.426)$$

Mekkora a kisugárzott teljesítmény a részecske energiájának egységnyi időbeli növekedéséhez képest? Felhasználva, hogy a külső erő munkája $\partial_t \mathbf{p} = \mathbf{F} = d\mathcal{E}/dx = \partial_x \mathcal{E}$:

$$\frac{P}{\partial_t \mathcal{E}} = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m_0^2 c^2} \frac{(\partial_x \mathcal{E})^2}{\partial_t \mathcal{E}} = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m_0^2 c^2} \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{d\bar{x}}, \quad \text{ahol} \quad \bar{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2}, \quad \bar{x} = \frac{6\pi m_0 v}{Z_0 q^2} x. \quad (3.427)$$

A kisugárzott teljesítmény tehát akkor összemérhető a gyorsító teljesítménnyel, ha $\delta x = Z_0 q^2 / (6\pi m_0 v)$ távolságon a részecske energiája a nyugalmi energiájával növekszik. Ezt ultrarelativisztikus ($v \approx c$) elektronra kiszámolva ($q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$, $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$, $c = 2.99 \cdot 10^8 \text{m/s}$): $\delta x \approx 1.88 \cdot 10^{-15} \text{m} = 2.14 R_p$, ahol $R_p = 0.88 \cdot 10^{-15}$ a proton töltéssugara. Az elektron saját tömegének megfelelő energia $5.11 \cdot 10^5 \text{V}$ gyorsító feszültség során keletkezik, vagyis ekkora feszültségesés lenne szükséges atommagnyi méreteken – ez rendkívül nagy! A megfelelő télerősség $E \approx 5 \cdot 10^5 \text{V} / 2.14 R_p \approx 2.7 \cdot 10^{20} \text{V/m}$. A ma elérhető legnagyobb télerősségek rövid impulzusú lézerekben $\sim 10^{12} \text{V/m}$ nagyságrendűek, messze a fenti nagyságrend alatt. Emiatt a sugárzási veszteség lineáris gyorsítás esetén mindig elhanyagolható.

Appendix A

A.1 A Liénard-Wiechert potenciálokból származó térerősségek

Az elektromos térerősség

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A}, \quad (\text{A.1})$$

ahol a potenciálokat (3.210) és (3.211) képletek adják meg. Felhasználva (3.215) képleteket

$$\begin{aligned} \partial_i\Phi &= \partial_i \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \beta\mathbf{R}} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^2} (\partial_i R - \beta_j \partial_i R_j - R_j \partial_i \beta_j) = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^2} \left(\frac{R_i}{R - \beta\mathbf{R}} - \beta_j \left(\delta_{ij} + \frac{\beta_j R_i}{R - \beta\mathbf{R}} \right) - \frac{R_j a_j}{c} \partial_i \bar{t} \right) = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left(R_i(1 - \beta^2) - \beta_i(R - \beta\mathbf{R}) + \frac{R_i \mathbf{a}\mathbf{R}}{c^2} \right), \\ \partial_t A_i &= \partial_t \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{v_i}{R - \beta\mathbf{R}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{R}{R - \beta\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{v_i}{R - \beta\mathbf{R}} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{R}{R - \beta\mathbf{R}} \left[\frac{a_i}{R - \beta\mathbf{R}} - \frac{v_i}{(R - \beta\mathbf{R})^2} \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{t}} - \frac{R_j a_j}{c} - \beta_j \frac{\partial R_j}{\partial \bar{t}} \right) \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left[\frac{R a_i (R - \beta\mathbf{R})}{c^2} - \frac{R v_i}{c^2} \left(-\frac{R\mathbf{v}}{R} - \frac{R_j a_j}{c} + c\beta^2 \right) \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left[\frac{R a_i (R - \beta\mathbf{R})}{c^2} + \beta_i \beta\mathbf{R} + \frac{R \mathbf{a}\mathbf{R} \beta_i}{c^2} - R \beta_i \beta^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Azt kapjuk összesítve, hogy:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left(R_i(1 - \beta^2) - \beta_i(R - \beta\mathbf{R}) + \frac{R_i \mathbf{a}\mathbf{R}}{c^2} - \frac{R a_i (R - \beta\mathbf{R})}{c^2} - \beta_i \beta\mathbf{R} - \frac{R \mathbf{a}\mathbf{R} \beta_i}{c^2} + R \beta_i \beta^2 \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left((R_i - \beta_i R)(1 - \beta^2) + \frac{1}{c^2} [(R_i - \beta_i R) \mathbf{a}\mathbf{R} - R a_i (R - \beta\mathbf{R})] \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left((R_i - \beta_i R)(1 - \beta^2) + \frac{1}{c^2} [\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\beta) \times \mathbf{a}]_i \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A mágneses térerősségre:

$$\begin{aligned} H_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\frac{q}{4\pi} \frac{v_k}{R - \beta\mathbf{R}} \right) = \frac{q}{4\pi} \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_j} a_k \frac{1}{R - \beta\mathbf{R}} + \epsilon_{ijk} v_k \partial_j \left(\frac{1}{R - \beta\mathbf{R}} \right) \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[-\epsilon_{ijk} \frac{R_j a_k}{c(R - \beta\mathbf{R})^2} - \frac{\epsilon_{ijk} v_k R_j}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left((1 - \beta^2) + \frac{\mathbf{a}\mathbf{R}}{c^2} \right) \right] = \\ &= \frac{qc}{4\pi} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \epsilon_{ijk} \hat{R}_j \left[-\beta_k R(1 - \beta^2) + \frac{1}{c^2} (-\beta_k R(\mathbf{a}\mathbf{R}) - R a_k (R - \beta\mathbf{R})) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Összehasonlítva az elektromos térerősség (utolsó előtti) kifejezésével, látjuk, hogy

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}. \quad (\text{A.5})$$