# KVANTUMMECHANIKAI POTENCIÁLOK VIZSGÁLATA SZÓRÁSELMÉLETI MÓDSZEREKKEL

Akadémiai doktori értekezés tézisei

Írta:
Apagyi Barnabás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Elméleti Fizika Tanszék
2005.

# Kutatási háttér és célkitűzés

A XX. század 20-as éveiben kidolgozott kvantummechanika megmutatta, hogy a fizika egyes klasszikus mennyiségei, mint például a két objektum tömegközéppontja közti távolságtól függő hatóerő, vagy potenciál, csak átlagos (valószínűségi) értelemben léteznek.

Ugyanakkor a kvantummechanika effektív-tér elméletei, mint például az optikai potenciál elméletek, vagy az inverz szórás elméletek, megmutatták, miként lehet leszármaztatni ezen átlagos fizikai mennyiségeket, ha pontos értéküket nem is határozhatjuk meg sohasem egzaktul valós fizikai rendszer esetén.

Kutatási feladatnak ezért azt tűztem ki célul, hogy az összetett kvantumrendszerek közti effektív kölcsönhatások meghatározására szolgáló egyes módszereket, elméleteket továbbfejlesszem annak érdekében, hogy általuk az atom- és magfizikai kölcsönhatások mind pontosabb felderítésére nyíljon lehetőség.

A kölcsönhatások meghatározásának két lehetséges alapvető megközelítése, a kötött állapotok és a szórási állapotok vizsgálata közül az utóbbival foglalkozom behatóbban, s ezen belül is a nemrelativisztikus, tehát viszonylag alacsony energiájú ütközésekkel. Olyan ütközéseket vizsgálok, amelyekben mindig csak két fragmentum vesz részt. Alacsony energián indokolt ez a közelítés, mert ionizáció (break-up) csak magasabb energián, az ún. felbomlási küszöb felett valósulhat meg. A lehetséges rugalmatlan, illetve átrendeződéses folyamatokat a potenciál abszorpciós részével veszem figyelembe, de végzek vizsgálatot a reakciófolyamatokat kormányozó valós potenciálok inverz módszerrel történő meghatározására is.

A szóráselméleti módszerek és kölcsönhatások mind pontosabb ismerete igen fontos mind kísérleti, mind elméleti szempontból, amint azt az alábbi példák is mutatják.

A felső légkörben lejátszódó gerjesztési, ionizációs és rekombinációs folyamatok, amelyeket az elektron-atom, elektron-molekula kölcsönhatás szabályoz, nagy befolyással vannak mind a Föld hőháztartására (globális felmelegedés, ózon probléma, negatív ion formálódás), mind az időjárásra (ciklonok keletkezése).

Elektron-atom, elektron-molekula szórással tanulmányozhatók olyan atomi, illetve molekula állapotok, amelyekből vibrációs populációs inverzió révén új típusú lézerek fejleszthetők ki. Ezen atomi/molekula állapotok megismerését teszik lehetővé a fotoionizációs kísérletek is, amelyek elméleti számolására hatásos elméleti módszerek állnak rendelkezésre; olyan módszerek, amelyek a kvantumkémiai szerkezetszámolás teljes arzenálját felhasználják, ugyanakkor a kontínuumba ionizálódott részecskét szóráselméleti variációs módszerekkel (pl. Schwinger variációs módszer) kezelik. Itt igen fontos tényező a módszer pontossága, ha olyan állapotot tanulmányozunk, amelyre vonatkozóan nincs, vagy nem végezhető kísérlet. Bemutatom, hogy sikerült egy olyan direkt szórás módszert kifejleszteni, amely minden eddigi módszernél pontosabb értéket szolgáltat az elektron-hidrogénatom ütközés fázistolásaira és ugyanakkor mentes a számítási eredményeket néha félrevívő hamis szingularitásoktól.

Magashőmérsékletű szupravezetők elméleti vizsgálatában fontos szerepe van a sávszerkezet számolásra kifejlesztett szóráselméleti módszereknek (lmto, kkr-cpa), és ezen számolások eredményei érzékenyen függnek az anyagot (ez esetben speciális kerámiát) alkotó atomok törzse és a vezetési sávot létrehozó elektronok kölcsönhatását jellemző fázistolásoktól. Ezen kölcsönhatásokat általában ún. muffin-tin közelítésben veszik figyelembe, azonban az elektromos dipol polarizáció esetleg fontos hosszúhatótávolságú effektusokat eredményezhet. A polarizációs potenciál fázistolást módosító szerepével kapcsolatos vizsgálatokat az inverz szórás keretein belül eddig tudomásom szerint rajtam kívül még nem végzett senki.

Az atommagok szerkezetét, nívósémáját feltáró nehéz-ion kísérleteket továbbra is végeznek, elsősorban az egzotikus magok megismerése céljából (pl. neutrondús magok, szupernehéz elemek), de egy erős lézerforrás (röntgenlézer) lehetősége is benne rejlik a kutatásokban. Jóllehet a klasszikus magfizika manapság veszített az iránta érdeklődők táborából, számtalan megoldatlan kérdés tisztázása várat magára. Így például az az egyszerű alapkérdés is, hogy milyen a kölcsönhatás térbeli alakja két ütköző atommag között. A dolgozatban bemutatom, hogy a kvantum inverz szóráselmélet ennek a kérdésnek egy szeletére választ adhat.* Az atommagok kölcsönhatásainak részletesebb feltárása továbbra is fontos a radioaktivitás, a maghasadás, és az energiatermelés egyes kérdéseinek pontosabb megismerése szempontjából.

Ugyanakkor az atomi/molekuláris rendszerek közti kölcsönhatások megismerése egyre közelebb visz bennünket a kémiai reakciók tervezhetőségéhez, amely jelentősége egészségügyi (gyógyszervegyészet), táplálkozástudományi (enzimek szerepe), genetikai, stb. szempontból beláthatatlan távlatokkal kecsegtet. Ugyanígy, az új anyagok gyártása, az anyagtudomány, a nanotechnológia, a félvezető ipar, a szerves vezetők fejlesztése stb, mind igénylik ezen atomi/molekuláris kölcsönhatások ismeretét, modellezését.

Mindezek alapján az alábbi három konkrét területet választottam ki kutatásom céljául:

*Magreakciók leírása klaszter modellel* [T1/1-3];**

*Szóráselméleti variációs módszerek továbbfejlesztése és alkalmazása direkt szórásproblémák megoldására* [T2/1-4];

*Az inverz szóráselmélet módszereinek továbbfejlesztése és alkalmazása atom- és magfizikai kölcsönhatások meghatározására* [T3/1-10].

---

* Érdemes megjegyezni, hogy a kvantum inverz szórás egyik lényeges elemét képezi az inverz szórás transzformációnak, amely lehetővé tette a szolitonoknak (nemlineáris evolúciós parciális differenciál egyenletek stabil, részecskeszerű, haladóhullámú megoldásainak) a felfedezését. A szolitonoknak a műszaki és elméleti fizika sok területén jelentős szerep jut (optikai szálak, szökőárak, ciklonok, elemi részecskék leírása, szuperfolyékonyság, stb.)

** A tézisekben összefoglalt eredményeket tartalmazó cikkekre [T1/...], [T2/...], ... megjelöléssel, az általános irodalomra pedig [1], [2], ... felül indexelt számozással hivatkozom.

# A vizsgált problémakörök és a kutatás módszerei

*Magreakciók leírása klaszter modellel* [T1/1-3]

Mivel korábbi munkásságom[1] folytatásaként a transzfer reakciókkal még behatóbban szerettem volna foglalkozni, meg kellett vizsgálni a magreakció leírások elméleteit. Céljaimnak leginkább a rezonáló csoport módszer (rgm) felelt meg, mert ebben a leírásban a transzlációt végző tömegközéppont eleve nem szerepel, így a tömegközéppont mozgásából adódó ún. szellemállapotokat nem kell kitranszformálni. A módszer alapfeltevése az, hogy a két fragmentumból álló rendszer teljes hullámfüggvényét a fragmentumok szerkezetét leíró és ismertnek feltételezett belső hullámfüggvény, valamint a két fragmentum egymáshoz viszonyított mozgását jellemző relatív hullámfüggvény szorzatának sorozatából lehet felépíteni. A belső (vagy csatorna) hullámfüggvényben a klaszterek különböző partíciókban fordulhatnak elő s ezek az elosztás csoportok azonos energiához tartoznak, energetikailag egymással rezonálnak – innen az elnevezés. A módszert még csatolt reakció csatornák (crc) módszerének, vagy az atomfizikában szoros-csatolás módszernek (close-coupling) is szokták hívni.

Ezen kétfragmentumos magreakció elméletnek egy újszerűnek mondható, de mindenképpen kompaktnak tekinthető formulázását adtam az említett csatolt-csatornás klaszter modell közelítésben. A fellépő bonyolult, sokdimenziós integrálok kiszámítására általánosított multipol sorfejtési eljárást javasoltam. Ez az eljárás alkalmas olyan hullámfüggvények vagy potenciálok impulzusmomentum sajátfüggvények szerint haladó multipol sorba való fejtésére, amelyek tetszőleges számú vektor lineárkombinációjától függenek. A multipol sorfejtés együtthatói általában kétdimenziós integrálok, amelyek az eredeti függvény Fourier transzformáltját és szférikus Bessel-függvények szorzatát tartalmazzák az integrandusban. Ezt a kétdimenziós integrált sikerült analitikusan is kiértékelnem az eredeti hullámfüggvényre vonatkozó Fourier-Bessel, illetve Dini kifejtési technika alkalmazásával. Az így rendkívül hatásossá (egyszerűvé) vált multipol sorfejtési eljárást alkalmaztam a szén-alfa klaszterből összetettnek gondolt oxigén atommag ütközések leírásánál jelentkező matrixelemek kiértékelésére. A módszer teljesítőképességére jellemző, hogy az itt fellépő, tipikusan 8-dimenziós integrálokat gyorsan konvergáló egydimenziós integrálok sorozatának kiszámítására vezeti vissza [T1/1].

Tekintettel arra, hogy az azonos részecskék/klaszterek közötti kicserélődési szimmetria, illetve a reakciócsatornák figyelembevétele nemlokális potenciálok felléptére vezet, e téma keretén belül vizsgáltam azt is, hogy miként lehetne interpretálni a fellépő nemlokális potenciálokat. Mivel a potenciálok hatását általában csak lokális térben tudjuk elképzelni, ezért többféle lokalizációs eljárást fejlesztettek ki a 80-as években. Ezek közül az általunk még 1983-ban bevezetett Taylor sorfejtésre alapozott eljárást [T1/2] egy 2000-ben megjelent[2] összefoglalóban külön fejezetben ismertetik. Ugyancsak 2000-ben jelentettem meg a módszer egy továbbfejlesztett változatát [T1/3], amely atom- és magfizikai alkalmazásokkal együtt egy diplomamunka alapját képezte.[3]

Érdekes, hogy lokalizációs elméletünk első használata a visszafelé történő alkalmazás volt, amit inverz lokalizációnak, vagy delokalizációs eljárásnak is nevezhetünk. Az algebrai szóráselmélet különleges, az addigi modelleknek nem megfelelő (nem Woods-Saxon alakú), erősen oszcilláló, energia függő lokális potenciálokat produkált, amelyek jól leírták a szilícium-oxigén atommagok rugalmas ütközéseiben mért szögeloszlásokat (differenciális hatáskeresztmetszeteket). Delokalizációs eljárásunk eredménye az volt, hogy a potenciálok oszcilláló jellege a nemlokalitásból ered.[4]

*Szóráselméleti variációs módszerek továbbfejlesztése és alkalmazása direkt szórásproblémák megoldására* [T2/1-4]

Direkt szórásproblémának nevezzük azon reakcióelméleti leírásokat, amelyekben a potenciálok ismertek és a szórásamplitúdó, illetve a fázistolások meghatározására törekszünk. Ezen szórási mennyiségeket tehát a különféle reakcióelméletekből számíthatjuk ki, amik a Schrödinger egyenlet különféle közelítésekkel, feltevésekkel történő megoldását jelentik.

A magreakció elméletek csatolt-csatornás közelítése nagyszámú csatolt integro-differenciál egyenlet szimultán megoldását igényli.

Ilyen egyenletek direkt numerikus integrálási technikával történő megoldása még a legnagyobb számítógépek használatával is nehézségbe ütközik, mivel a nemlokális potenciálok fellépte miatt memória helyfoglalási problémák és összegzésből adódó pontatlansági hibák léphetnek fel. Azonban a kötött állapotok számolására kifejlesztett, bázisfüggvények szerinti kifejtési technika alkalmazásával e nehézségek megszűnnek. Ezért kezdtem el vizsgálni a kifejtési technikára épülő legkisebb négyzetes variációs módszert (LVM), amit Ladányi és Szondy[5] még a 60-as évek végén fejlesztett ki intézetünkben, potenciálszórásra. (Variációs direkt módszereknek az egyszerű direkt módszerekhez képest a pontosságban van előnyük.)

Az LVM módszert alkalmassá tettem reakciók számolására, azaz csatolt csatornás integro-differenciál egyenletek megoldására. Ez gondos formulázást, program írást, valamint megfelelő fizikai modellre való alkalmazást jelentett. Elméleti laboratóriumként főként az elektron-hidrogénatom ütközés szoros-csatolás (close-coupling) formalizmusát használtam, amely ekvivalens a magfizikában szokásos csatolt reakció-csatornák leírással. Az elektron-hidrogénatom ütközés eme modellje még ma is minden új metodikai fejlesztés próbakövének számít és kiválóan alkalmas volt az LVM teljesítőképességének felmérésére is. Egy másik szokásos példa a szórásproblémák számolására szolgáló módszerek tesztelésére az ún. Huck-modell, amely elektron-atom szórást modellez csatolt derékszögű potenciálokkal.

Az elektron-hidrogénatom ütközés egy- és két-csatornás közelítésére elvégzett számolások azt mutatták, hogy az LVM az addigi módszereknél nagyobb pontossággal képes a reaktancia matrix elemek meghatározására. Ezen belül a triplett szórás sztatikus-kicserélődési esetére vonatkozó fázistolás kiszámításában szinte spektroszkópiai (12jegyes) pontosságot sikerült elérni [T2/1] húsz Slater-bázisfüggvény alkalmazásával. Ezt a pontosságot azóta sem sikerült túlszárnyalni semmilyen módszernek. Jóllehet folyóiratban nem publikáltuk [T2/2], de a háromcsatornás Huck-modellre elvégzett számolásaim szintén azt mutatták, hogy az LVM még erre a numerikus szempontból nehéz esetre is igen pontos és stabil eredményeket szolgáltat.

Megjegyzendő, hogy az LVM sikerrel nyert alkalmazást több lefékeződést tárgyaló cikkben,[6] illetve egy elektron-argonatom modellpotenciálról szóló közleményben.[7] Így elmondható, hogy az LVM sikerei egy azóta is gyümölcsöző[8] kutatási témát indítottak be. Ugyanakkor azt is meg kell említeni, hogy az LVM fő alkalmazási területe a bonyolult reakciók számolásában van, mivel az egyszerű lokális potenciálproblémák megoldása direkt integrálási technikával gyorsabb és egyszerűbb. Elsősorban a három- és négyrészecskés ütközések, illetve a kémiai reakciók számolására való alkalmazás kerülhet előtérbe.

Az LVM-mel kapcsolatos kutatásaim talán legnagyobb figyelmet kiváltó része az anomáliákhoz, vagy hamis rezonanciákhoz fűződik. (Hamis rezonanciának olyan nemfizikai fázistolást nevezünk, amely $\pi/2$-vel egyezik meg.) Ladányi és Szondy a 60-as években éppen azért fejlesztette ki az LVM-et potenciálszórásra, hogy megmutassák: ebben a módszerben nem jelennek meg a hamis rezonanciák, ellentétben a Kohn variációs módszerrel (KVM), ahol az ilyen anomália megjelenése az egész szórás számolás eredményét tönkreteheti. Ezért intenzív metodikai kutatások folytak szerte a világon[9] olyan módszer kifejlesztése, vagy keresése érdekében, amely mentes a hamis szingularitásoktól. (Az LVM-ről eközben elfeledkeztek.) Így, főként Takatsuka, McKoy és Lucchese, valamint Truhlar és csoportja munkássága nyomán, elterjedt az a folyóiratokban is többször leírt vélemény, hogy a Schwinger variációs módszer (SVM) mentes az anomáliáktól. Explicit számolással demonstráltuk, hogy ez az állítás nem igaz. A tévhit elterjedésének oka az lehetett, hogy az eredeti bizonyításnál[10] lényeges szerepet játszó potenciál definitásáról (azonos előjelűségéről) elfeledkeztek. Nagy feltűnést keltő cikkünkben [T2/3] kimutattuk, hogy nem definit (negatív és pozitív értékeket egyaránt felvevő) gömbszimmetrikus potenciálok esetén a Schwinger variációs módszer hamis rezonanciák fellépéséhez vezethet. Ilyet találunk például a szinglett elektron-hidrogénatom ütközés esetében.

A hamis rezonanciák megjelenését könnyen megérthetjük, ha figyelembe vesszük, hogy a Schwinger variációs módszerrel történő számoláshoz szükség van az $U(1 - GU)$ operátor matrixelemeinek az *inverzére*. (Itt $U$ és $G$ a potenciál és a szabad Green operátort jelenti.) Részletes diszkusszióval kimutattuk, hogy az $U$ szorzóként való megjelenése kapcsolatos a hamis szingularitásokkal. Ugyanis az operátorok közé beszúrhatunk egy teljes ortonormált rendszerrel képezett egység operátort. Csonkítva a teljes rendszert a bázis függvények terére, négyzetes matrix szorzatok inverzét kell számítani, ami az egyes matrixok inverzeinek szorzatából adódik. Mivel az $U$ nemdefinit, matrixának sajátértékei között bizonyos energia, bázis függvény szám és egyéb, a számolást jellemző paraméter esetén előfordulhat a zérus, vagy ahhoz igen közeli sajátérték, ami az inverz számolást ellehetetleníti, szingularitást okozva a számolt fizikai mennyiségben, a reaktancia mátrixelemben [T2/3].

Az irodalomban a Newton variációs módszer (NVM) legnagyobb előnyének szintén az anomália mentességet tartották. Mivel itt a $G(1-UG)$ operátor inverzére van szükség, sejthető volt az SVM-re végzett vizsgálatunkból, hogy itt is találkozhatunk hamis szingularitásokkal. Jóllehet három év is eltelt az SVM anomáliák megjelenését bemutató és diszkutáló publikációnk óta, az NVM-mel kapcsolatos cikkekben továbbra is megjelentek az anomália mentességre utaló állítások; az egyik publikáció egyenesen a címben is szerepeltette azt.[11] Egy további tanulmányban ezért kénytelenek voltunk megmutatni, hogy a $G$ operátor matrixának is vannak zérus sajátértékei, amelyek hamis szingularitások felléptéhez vezetnek [T2/4]. Mivel $G$ sajátértékei függetlenek az aktuális fizikai modelltől, a hamis szingularitások jelenléte az NVM-ben sajnos univerzális, és definit potenciál esetén is fellépnek. Ebben a cikkben azt is bemutattam, hogy például egy legkisebb-négyzetes kiterjesztéssel az NVM-beli anomáliák kiküszöbölhetők [T2/4].

Végül meg kell jegyezni, hogy a kutatási háttérként vázolt bármelyik esetre vonatkozó nagy volumenű reakciószámolás végzése csak több kutató szoros intézeti vagy intézetközi együttműködése esetén valósítható meg. Minthogy erre a műegyetemen nem volt lehetőség, és egy amerikai (McKoy és csoportjával való) kapcsolatfelvétel is meghiúsult, a következő pontban vázolt témához fordultam. Ott adva volt a nemzetközi kooperáció, és a kísérleti háttér. Mindazonáltal, e pont zárásaként elmondható, hogy a szellemi kapacitás rendelkezésre áll intézetünkben, ami aktivizálható, ha ilyen igény jelentkezik bármely helyről. Variációs vizsgálataim eredményeként azt is elkönyvelhetem, hogy manapság már minden nagy nemzetközi kutatócentrumban, ahol nagy volumenű SVM vagy NVM számolást végeznek kémiai reakciókra, elektron–atom, illetve elektron–molekula ütközésekre, fotoionizációkra, rutinszerűen végzik a védekezést az általunk felfedezett hamis szingularitások ellen.[12]

*Az inverz szóráselmélet módszereinek továbbfejlesztése és alkalmazása atom- és magfizikai kölcsönhatások meghatározására* [T3/1-10]

A kvantummechanikai optikai potenciál elmélet[13] lehetőséget nyújt arra, hogy egymáson szóródó összetett kvantummechanikai objektumok (fragmentumok) között ható potenciált kiszámítsuk az összetevő részecske kölcsönhatások és a fragmentum állapotok ismeretében.[1,14] Tudjuk azonban, hogy e program megvalósítása csak elvben lehetséges, mivel a fragmentumokra vonatkozó soktest probléma egzakt megoldása kivitelezhetetlen. Még inkább megvalósíthatatlan az optikai potenciál kiszámítása az atommagok esetében, ahol az összetevő részecskék (nukleonok) közötti primér kölcsönhatást sem ismerjük egészen pontosan. Ezért igen fontosak a kvantummechanikai inverz szóráselméletek,[15] amelyek szórásadatokból képesek a potenciált származtatni – innen az inverz elnevezés.

Munkáimban (i) azonos atommag, (ii) nukleon-alfa részecske, (iii) $\pi-$mezonok, valamint (iv) elektron-argonatom ütközéseknél fellépő effektív kölcsönhatások meghatározásával foglalkoztam. Ezenkívül (v) a módosított Newton-Sabatier (mNS) inverz szóráselmélet[16] olyan sok-csatornás változatát adtam meg, amelyben monopol átmenetek indukálják a reakciót, valamint (vi) a mNS módszertől különböző potenciál-családot szolgáltató Cox-Thompson inverz szórás módszert[17] tettem használhatóvá gyakorlati alkalmazások számára.

Rögzített $E$ energia mellett mért differenciális hatáskereszt-metszetekből nyert fázistolás adatokból kiindulva, a mNS inverz szórás elmélet segítségével határoztam meg a szórást okozó potenciálokat. Ehhez építeni kellett egy gyors és pontos inverz szórás kódot[18] (BIC), amely a mNS elmélet alapján működik a következőképpen. A potenciál feltételezett $r_0$ hatósugarán kívüli tartomány két vagy több $r_i$ pontjában megoldja a Regge-Newton (RN) egyenletet a $\{c_l\}$ kifejtési együttható sorozatra, a bemenő $\{\delta_l\}$ fázistolás adatok felhasználásával. Ezen együtthatók azután, ugyancsak a RN egyenleten keresztül, meghatározzák a belső tartomány tetszőleges $r < r_0$ pontjában a Schrödinger egyenletet kielégítő $\varphi_\ell(r)$ reguláris függvényeket, amelyekből végül $r$-szerinti deriválással és $\ell_{max}-$ig terjedő $\ell$-re való összegzéssel nyerjük az $\ell$-től független (de $E$-től még függő) inverz potenciált. Jóllehet az eljárás során mindvégig egyszerű lineáris algebrai egyenleteket kell megoldani, az inverz potenciál számolás mégsem tartozik a jól kondicionált feladatok közé. Ennek oka az, hogy a kulcsfontosságú lépés, a $\{c_l\}$ együttható sorozat meghatározása érdekében (az eredeti NS eljárás[15] esetén) olyan hermitikus végtelen matrixot kell kezelni, amely szinguláris de *van* inverze. Ez úgy lehetséges, hogy a matrix zérus sajátértékéhez tartozó vektor nem tartozik a matrix teljes rendszeréhez, azaz a zérus sajátérték nem a spektrum része. Mégis, ennek a speciális állapotnak a figyelembevétele elengedhetetlen a fizikailag helyes aszimptotikát szolgáltató inverz megoldás kiválasztásához.

(i) Szén atommagok ütközéseire végzett vizsgálataim, azt mutatják, hogy a 8-14 MeV szórási energia tartományban a szórás olyan komplex optikai potenciállal is leírható, amely tartalmaz irreguláris (megjósolhatatlan) oszcillációkat, és nem egyezik meg az általánosan elfogadott Woods-Saxon alakkal (jóllehet közel áll hozzá). Természetesen a kapott potenciál sorozat reprodukálja az inputként használt hatáskeresztmetszeteket/fázistolásokat, ha behelyettesítjük őket a Schrödinger egyenletbe, a megfelelő energiával együtt. A potenciálokat úgy kaptam [T3/1,2], hogy nemfizikai (páratlan impulzusmomentumhoz tartozó) fázistolásokat is bevettem az input adatokba, illetve a $\{c_l\}$ együtthatókat tekintettem meghatározandó paramétereknek. Mivel szén atommagok ütközése esetén a lövedék azonos a céltárggyal, a kísérleti adatokból csak a páros impulzusmomentumokhoz tartozó fázistolásokat lehet meghatározni. A páratlan $\ell$-ekhez tartozó nemfizikai fázistolásokat részben interpolációval, részben "kézi vezérléssel" úgy állítottam be, hogy az eredményezett inverz potenciál a lehető legsimább legyen. A potenciálok tehát modell függetleneknek tekinthetők és az inverz számolások egyik kritériumát jelentő stabilitási követelményt a technikai paraméterek $(r_0, r_1, r_2, l_{max})$ elég tág tartományára teljesíti. A másik kritérium, az egyértelműség is teljesül, azaz nem található olyan másik potenciál, amely szintén reprodukálja a bemenő adatokat.

Analízisem eredményeképpen a szén atommagok rugalmas szóródását okozó inverz potenciálok a következő jellegzetességeket mutatják. A magerők hatótávolságán kívüli külső ($r \geq 8$ fm) tartományban a potenciálok valós része $1/r$-es Coulomb viselkedést mutat, imaginárius része pedig zérus. A közbenső ($4 \leq r \leq 8$ fm) tartományban a magerők már éreztetik hatásukat. Itt a potenciálok valós része kisebb oszcillációktól eltekintve fokozatosan csökken $r$ csökkenésével, imaginárius része pedig kezdetben kicsit csökken (gyenge abszzorpció) majd pozitív értékbe is áthajlik (fluxus visszaáramlás a rugalmatlan és reakció csatornákból).

(ii) Az inverz szóráselmélet keretén belül lehetőség van spin-pálya kölcsönhatási potenciálok meghatározására is. Melbourne-i együttműködő partnereimmel elsőként határoztam meg fázistolásokból a nukleon-alfa részecske közti centrális és spin-pálya kölcsönhatást [T3/3]. Ezen rendszer vizsgálata azért is igen érdekes volt, mert az 1 MeV-es szórást egy $p-$hullámú rezonancia uralja és kiderült,[19] hogy a fix$-\ell$ melletti inverzió (amely egészen más elmélet és eljárás, mint a fix-E melletti inverzió) a miénkkel teljesen megegyező potenciált szolgáltatott. Az 1-20 MeV szórási energia tartományban elvégzett vizsgálatunk eredménye az lett, hogy a spin-pálya köcsönhatás lényegesen gyengébb a centrális kölcsönhatásnál és a potenciálok nem hasonlítanak a Woods-Saxon alakhoz. Ezen kívül az 1 MeV-es potenciál gyökeresen eltér a többitől, amire magyarázatot az említett $p-$rezonancia szolgáltat.

(iii) Jelenlegi rács kvantum kromodinamikai (QCD) számolásokból az a következtetés vonható le,[20] hogy az $I = 0$ izo-skalár $\pi - \pi$ rendszer relatív $s$-állapotban olyan effektív lokális kölcsönhatási potenciállal írható le, amely *néhány* GeV erősségű és hatótávolsága kisebb *egy* ferminél. Ez a potenciál mind a kötött, mind a szórási állapotát jellemzi a $\pi - \pi$ rendszernek. Ugyanakkor, fix-$l$ esetén történt már kvantum inverz számolás a $\pi - \pi$ rendszerre nézve, s ez a számolás azt mutatta,[21] hogy az $s$-hullámhoz tartozó izoskalár $\pi - \pi$ potenciál valóban vonzó jellegű, azonban erőssége néhány *száz* GeV, és a hatótávolsága kisebb *fél* ferminél.

Fix energia mellett izo-skalár ($I = 0$) $\pi - \pi$ fázistolás adatokat Protopopescu és társai[22] származtattak le kísérleti $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ hatáskeresztmetszet adatokból. Ezen izo-skalár $\pi\pi$ fázistolás adatokra alkalmaztam a mNS fix-energiás kvantum inverz szórás módszert abból a célból, hogy pion-pion kölcsönhatások természetét tanulmányozzam a koordináta térben és a fenti irodalmi bizonytalanságot megvizsgáljam.

Vizsgálataim eredményeit összefoglalva elmondható [T3/4], hogy a mNS módszerrel kapott izo-skalár $\pi\pi$ potenciálok erős energia függést mutatnak. $K\bar{K}$ keletkezési küszöbenergia alatt hatótávolságuk igen rövid, kisebb 0.2 fm-nél. Ugyanakkor ebben a kis koordináta tartományban nagyon erős, Coulomb jellegű vonzást gyakorolnak egymásra a pionok, és ez a vonzás néhány száz GeV-nyi potenciál-erősségben nyilvánul meg. $K\bar{K}$ küszöb felett a potenciálok komplexszé és kiterjedtebbé válnak, kis távolságon taszítást, közepes távolságon ($0.1 < r < 0.3$ fm között) oszcillációt produkálva. A taszító jelleget az $l = 0$ mellett elvégzett fix-$l$ inverz számolásban is megtalálták[21] (ott küszöb alatt is megmaradt, nálam eltünt). Ugyancsak ezt a következtetést vonták le az adatok fenomenológikus újra-analizálása[23] után is.

(iv) A módosított NS inverz módszert elsőként alkalmaztam atomfizikai ütközések analízisére. Elektronok argonatomokon történő alacsonyenergiás szórásából származó fázistolásokat használva, olyan modell független elektron-argonatom potenciálokat kaptam 12 eV szórási energia esetén, ami kis távolságokon taszító törzs jelenlétét mutatta [T3/5]. Ahhoz, hogy ezt az eredményt megerősítsem, kifejlesztettem a mNS módszer egy olyan változatát is, amely tekintettel van az elektron-atom ütközéseknél fellépő polarizációs effektusokra [T3/6]. Itt szükség volt a reguláris és irreguláris Matthieu-függvények előállítására, amelyek az $r^{-4}$-es polarizációs potenciálok esetén oldják meg a Schrödinger egyenletet. [Mathieu-függvényeket komplex-rendű Bessel-függvények felhasználásával magamnak kellett megkonstruálnom, mivel ilyeneket nem találtam egyetlen programkönyvtárban sem; még a modern formula manipulációs programcsomagok (pl. Maple) sem tartalmazzák ezeket a nemtriviális függvényeket.] A módosítás az $\ell$ függvényeként csak lassan csökkenő polarizációs fázistolásoknak az eljárásból való kitranszformálását teszi lehetővé és ezáltal a módszer stabilabbá, megbízhatóbbá válik. A mNS ezen kiterjesztése az erősen polarizálható atomok (pl. nátriumatom) szóródó elektronnal való kölcsönhatásának meghatározásánál válhat fontossá, mivel az esetenként több száz input fázistolás adat helyett csupán néhány tíz fázistolással kell foglalkozni az inverzió során. Megjegyzésre érdemes még, hogy a taszítótörzs jelenléte a Pauli elvvel magyarázható, és egy független ab initio pszeudopotenciálos elmélet is hasonló eredményre jutott.[24]

(v) A fix energiás inverz szóráselmélet alapvetően egy-csatornás potenciál szórásra lett kifejlesztve. Ez, mint az eddigiekben láttuk, olyan eredmények elérését teszi lehetővé (például modell független komplex effektív optikai potenciálok meghatározása), amelyekre direkt módszerek alkalmazásával gondolni sem lehetett. Ugyanakkor tudjuk azt, hogy a valódi potenciálok hermitikusak. Rugalmatlan szórási, vagy reakció köszöb feletti energiákra ezen potenciálok meghatározásához csatolt-csatornás inverz módszerre lenne szükség. Fix energiás inverzió esetén azonban az elmélet sok-csatornás kiterjesztése nem triviális feladat. Ennek oka az, hogy az elmélet a jelenlegi megfogalmazásban csak impulzusmomentumtól független potenciálok leszármaztatására képes. Gerjesztéseket, vagy reakciókat okozó potenciálok azonban általában függenek a különböző impulzusmomentum kvantumszámoktól, így például a csatorna-spintől, a relatív és teljes impulzusmomentum kvantumszám különböző kombinációitól, valamint a potenciál multipol kifejtéséből származó impulzusmomentum kvantumszámtól.

Első lépésként az egy-csatornás elmélet olyan több-csatornás változatának adtam meg a formalizmusát [T3/7], amelyben a sok-csatornás potenciál monopol átmeneteket indukálhat. Később az elméletet kiterjesztettem transzfer reakciókra is [T3/8]. Ezek után elvégeztem egy olyan továbbfejlesztést, amely nemcsak monopol, hanem dipol átmenetre is működik, amint azt a modell példán való tesztelés mutatta [T3/9]. Valós esetekre való alkalmazás a kísérleti adatok hiányos volta miatt egyelőre várat magára.

(vi) Az eredeti NS módszer elvi hibája az, hogy olyan potenciálokat eredményez, amelyek elsőrendű momentuma zérus. (A mNS módszerben e hiba nem lép fel.) Ezért, még 1970-ben Cox és Thompson (CT) javasolt egy olyan fix energiás inverz módszert,[17] amely bizonyíthatóan nem zérus elsőrendű momentumot szolgáló potenciálokat generál. A potenciálnak fázistolásokból való megkonstruálásával azonban nem foglalkoztak, ezért eljárásukhoz én származtattam le olyan megoldható (nemlineáris) egyenletrendszert [T3/10], amely a fázistolásokat tartalmazza bemenő adatként. Ezt az egyenletrendszert ún. általánosított (eltolt) impulzusmomentum kvantumszámokra kell megoldani, amikből aztán a keresett inverz potenciál előállítható. Jelenleg e módszer vizsgálata és kiterjesztése Coulomb szórásra diplomamunka keretében folyik.

# Új tudományos eredmények

1. Általánosított multipol sorfejtési eljárást fejlesztettem ki a magreakciók csatolt csatornás elméletében fellépő potenciál matrixelemek analitikus számolására [T1/1].
2. Taylor-sorfejtésen alapuló lokalizációs eljárást javasoltam nemlokális potenciálok vizsgálatára [T1/2,3].
3. Reakciók leírására szolgáló csatolt integro-differenciál egyenletek megoldására legkisebb négyzetek variációs módszert javasoltam. Egy-, két- és három-csatornás esetekre explicit számolásokkal megmutattam, hogy a javasolt módszer az addig használatos módszerekhez viszonyítva számos előnnyel rendelkezik [T2/1,2].
4. Kimutattam, hogy az irodalomban anomáliamentesnek vélt Schwinger és Newton variációs módszer hamis rezonanciákat produkál a fizikailag releváns energia és skála paraméter tartományban és rámutattam a nemfizikai rezonanciák eredetének okára. Javaslatot tettem a hamis szingularitások kiküszöbölésének módjára [T2/3,4].
5. Szén atommagok rugalmas ütközéséből származó mérési adatokból határoztam meg a szórást okozó lehetséges potenciálok egy családját [T3/1,2].
6. Nukleon-alfa részecske centrális és spin-pálya potenciálokat határoztam meg kísérleti adatokat reprodukáló fázistolások felhasználásával az 1-20 MeV közötti energia tartományban, a módosított Newton-Sabatier eljárás segítségével [T3/3].
7. Mért adatok felhasználásával izo-skalár $\pi - \pi$ szórási potenciálokat származtattam le, amelyek kaon küszöb alatti és feletti energiájú pion-pion kölcsönhatásról adnak térbeli információt. Megállapítottam, hogy a küszöb alatti potenciálok valósak, a pionok Coulomb-szerű kölcsönhatást gyakorolnak egymásra 0.2 fm-nél kisebb tartományban, több száz GeV erősséggel vonzva egymást. A küszöb feletti potenciálok komplexek és sokkal kiterjedtebb térbeli folyamatokra utalnak [T3/4].
8. Elektron-argonatom szórási potenciálokat határoztam meg kísérleti adatok felhasználásával a gerjesztési küszöb alatti energiákra a mNS eljárás segítségével, és a potenciál $r^{-4}$-es hosszúhatótávolságát figyelembevéve az általam generált Mathieu-függvények segítségével [T3/5,6].
9. A fix energiás módosított Newton-Sabatier (mNS) inverz szóráselmélet olyan sok-csatornás változatát adtam meg, amelyben monopol

átmenetek indukálják a reakciót. Az elméletet először csatolt négyszög potenciálokra teszteltem, majd megadtam a Coulomb szórásra, a multipol és transzfer átmenetre való általánosítást is [T3/7-9].

10. Nemlineáris egyenletrendszert állítottam fel a Cox-Thompson (CT) inverz potenciál véges számú fázistolás adatokból történő meghatározására [T3/10]. A CT módszert általánosítottam és alkalmaztam komplex potenciáloknak S-matrix elemekből történő meghatározására [publikálás alatt (2005)].

# Köszönetnyilvánítás

Hálás szívvel emlékezem tanáromra, Marx György professzorra, aki lebilincselő előadásaival figyelmemet a kvantummechanika felé irányította, valamint Teller Ede professzorra, akinek a kilencvenes évek elején tartott emlékezetes előadás sorozatának kvantummechanikát érintő része megvilágította számomra ezt a diszciplinát. Nekik köszönhető, hogy egyetemi munkám során az oktatásban, és a kutatásban főként a kvantummechanika csodálatos világával foglalkoztam.

Ugyancsak szeretnék köszönetet mondani Ladányi Károly és Werner Scheid professzoroknak, akiktől a kutató munka szépségét és a fizika egységét tanultam el számos közös munkánk során.

Köszönet illeti Ken Amos, és Heinz von Geramb professzor urakat, amiért nagy tudásuk és tájékozottságuk révén az inverz módszerek világába bevezettek és főként szemléletük átadásával segítettek az ”inverz” gondolkodásmód elsajátításában.

Végül köszönöm tanítványaimnak és munkatársaimnak, nevezetesen dr. Lévay Péter, dr. Endrédi Gábor, dr. Matthias Eberspächer, dr. Harman Zoltán, dr. Barna Imre, dr. Schumayer Dániel, Báthory Barnabás, és Oliver Melchert uraknak az együttműködést, a számtalan diszkussziót, és a rengeteg munkát, amellyel közös cikkeinkhez hozzájárultak.

Jelen dolgozat elkészítéséhez a Széchenyi István Ösztöndíj nyújtott anyagi segítségét, amit szintén hálásan köszönök.

# Általános irodalom

(A tézispontok ismertetéséhez felhasznált cikkek jegyzéke)


[1] Apagyi Barnabás, A magszerkezet szerepe többnukleont átadó magreakciókban (kandidátusi értekezés, MFF 83/4, 273–336, 1983).

[2] K. Amos, P. J. Dortmans, H. V. von Geramb, S. Karataglidis, and J. Raynal: Nucleon-nucleus scattering: a microscopic nonrelativistic approach, Springer Series in Nuclear and Particle Physics, (2000), Ch. 11.

[3] Barna Imre: Nemlokális potenciálok vizsgálata direkt és inverz módszerrel (mérnök-fizikus diplomamunka, BME, 1997).

[4] Apagyi Barnabás, May Karl-Ernst, Häuser Thomas, and Scheid Werner, Search for a non-local potential from a local potential obtained with elastic scattering phase shifts of the algebraic scattering theory, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 16 (1990) 451–460.

[5] Ladányi K and Szondi T: Least-squares method for potential scattering, Nuovo Cimento B5, 70 (1969).

[6] Apagyi B and Nagy I: A simple calculation of the stopping power of an electron gas for slow proton, J. Phys. C 20 (1987) 1465–1468; Apagyi B and Nagy I: Two parameter model for screening of a proton in an electron gas, J. Phys. C 21 (1988) 3845–3849; Apagyi B and Nagy I: Variational approach to the scattering theory and its application in stopping phenomena, Proceedings of the 12th Werner Brandt Int. Conf on the "Penetration of charged particles in matter" 4–7 September (1989) San Sebastian, Spain, pp. 125–138;

[7] Endrédi G and Apagyi B: Analytical independent-particle model for electron scattering by argon at low energy, Few-Body Systems 17 (1994) 199–209.

[8] Nagy I, Apagyi B, and Ladányi K: Stopping power of an electron gas for a slow antiproton, Phys. Rev. A 42 (1990) 1806–1808; Nagy I, Apagyi B, and Ladányi K: On the stopping power of an electron gas for a slow proton and antiproton, in Interaction of charged particles with solids and surfaces ed by Flores F, Urbassek H M, Arista A, and Gras-Martí (Plenum, New York , 1991) 395–399; Ladányi K, Nagy I, and Apagyi B: Partially linearized Thomas-Fermi-von Weizsäcker theory for screening and stopping of charged particles in jellium, Phys. Rev. A45 (1992) 2989–2997; Nagy I, Apagyi B and Ladányi K: A Thomas-Fermi-von Weizsäcker approach to positron annihilation in electron gas, Solid State Comm. 86 (1993) 209–212; Apagyi B, Ladányi K, Lévay P, and Nagy I: Theoretical models and methods of scattering theory: Developments and applications, Per. Polytechnica 1 (1993) 225–37; Nagy I and Apagyi B: Scattering-theory formulation of stopping powers of a solid target for protons and antiprotons with velocity-dependent screening, Phys. Rev. A 58 (1998) R1653–6; Nagy I and Apagyi B: Slow antiprotons in an extended electron system:

The one-particle aspects of complete screening THEOCHEM accepted (1999); Nagy I and Apagyi B: Consistent model for the screening of slow muons in metals, Phys. Rev. B 60 (1999) R12546–8; Nagy I and Apagyi B: Stopping power of an electron gas for heavy unit charges: Models in the kinetic approximation, Adv. in Quantum Chemistry 46 (2004) 267–292.

[9] C. Schwartz: Schwinger variational principle for scattering, Phys.Rev. 141 (1966) 1468; Adhikari S K and Sloan I H: Separable expansion of the $t$ matrix with analitical form factors, Phys. Rev. C 11 (1975) 1133; E. Gerjuoy, A. K. P. Rau, and Larry Spruch, A unified formulation of the construction of variational principles, Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 725–774; Nesbet R K: Variational Methods in Electron-Atom Scattering Theory (Plenum, 1984); Abdel-Raouf M A: On the variational methods for bound-state and scattering problems, Phys. Reports 108 (1984) 1; Lucchese R R, Takatsuka K, and McKoy V: Application of the Schwinger variational principle to electron-molecule collisions and molecular photoionization, Phys. Reports 131 (1986) 147.

[10] Kato T: Variational methods in collision problems, 80 (1950) 475; Sugar R and Blankenbecler R: Variational upper and lower bounds for multichannel scattering, Phys. Rev. 136 (1964) 472.

[11] Meyer H -D, Horacek J, and Cederbaum L S: Schwinger and anomaly-free Kohn variational principles and a generalized Lanczos algorithm for nonsymmetric operators, Phys. Rev. A 43 (1991) 3587.

[12] V. McKoy, privát közlés.

[13] J. R. Taylor, Scattering Theory (Wiley, 1972), p.383.

[14] H.V. von Geramb, Microscopic Optical Potentials, LNP 89 (Springer, 1979).

[15] K. Chadan, P. Sabatier, Inverse Problems in Quantum Scattering Theory, Text and Monographs in Physics (Springer, 1977).

[16] M. Münchow and W. Scheid, Modification of the Newton method for the inverse-scattering problem at fixed energy, Phys. Rev. Lett. 44, 1299 (1980).

[17] J.R. Cox and K. W. Thompson, On the Inverse Scattering Problem at Fixed Energy for Potentials Having Nonvanishing First Moments, Journ. Math. Phys. 11, 805 (1970).

[18] B. Apagyi and G. Endrédi, Budapest Inversion Codes (BIC, BICPOL), unpublished (1994, 1996).

[19] Heidrun Becker, Nukleon-Alpha-Potentiale aus der Inversion, Interner Report, 16. Juni 1995, Kerntheorie Hamburg.

[20] H. R. Fiebig, H. Markum, A. Mihály, and R. M. Woloshyn, Two-body spectra of pseudoscalar mesons with an O(a2)-improved lattice action using Wilson fermions,*Nucl. Phys.* B. (Proc. Suppl.) **63** A-C, 188 (1998); H. R. Fiebig, H. Markum, A. Mihály, and K. Rabitsch,

Forces between composite particles in QCD, *Nucl. Phys.* B. (Proc. Suppl.) **53**, 804 (1997); H. R. Fiebig, O. Linsuain, H. Markum, and K. Rabitsch, On the nature of the residual meson-meson interaction from simulations with a QED2+1 model, *Nucl. Phys.* B. (Proc. Suppl.) **47**, 695 (1996).

[21] M. Sander and H.V. von Geramb, $\pi\pi$ ,$K\pi$ , and $\pi N$ potential scattering and a prediction of a narrow sigma meson resonance, *Phys. Rev.* C **56**, 1218 (1997).

[22] S. D. Protopopescu, M. Alston-Garnjost, A. Barbaro-Galtieri, S. M. Flatté, J. H. Friedman, T. A. Lasinski, G. R. Lynch, M. S. Rabin, and F. T. Solmitz, $\pi\pi$ Partial-Wave Analysis from Reactions $\pi^+p \to \pi^+\pi^-\Delta^{++}$ and $\pi^+p \to K^+K^-\Delta^{++}$ at 7.1 GeV/c, *Phys. Rev.* D **7**, 1279 (1973).

[23] S. Ishida, M. Ishida, T. Ishida, K. Takamatsu, and T. Tsuru, Analysis of a $K\pi$-Scattering Phase Shift and Evidence for the $\kappa(900)$ Meson, *Progr. of Theor. Physics,* **98**, 621 (1997).

[24] G. B. Bachelet, D. R. Hamann, and M. Schlüter, Pseudopotentials that work: From H to Pu, Phys. Rev. B 26, 4199 (1982); B. Plenkiewicz, P. Plenkiewicz, P. Baillargeon, and J.-P. Jay-Gerin, Pseudopotential approach to low-energy (0–3 eV) elastic electron-argon scattering, Phys. Rev. A 36, 2002 (1987).

# A tézisekhez tartozó dolgozatok jegyzéke


[T1/1] Apagyi Barnabás and Scheid Werner:
Taylor expansion for the localization of non-local coupling potentials,
J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 9 (1983) 73–84

[T1/2] Apagyi Barnabás and Scheid Werner:
Application of the Dini-expansion methods to the evaluation of non-local coupling potentials,
J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 10 (1984) 791–804

[T1/3] Barna I, Apagyi B, and Scheid W:
Localisation of nonlocal heavy-ion potentials
J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 26 (2000) 323–31

[T2/1] Apagyi Barnabás and Ladányi Károly:
Least-squares method in scattering theory,
Phys. Rev. A 33 (1986) 182 -190

[T2/2] Apagyi B, Ladányi K and Lévay P:
Application of the multichannel LVM–ST to the modified Huck problem,
Suppl. to Research Report of Laboratory of Nuclear Science, Tohoku University, 19 (1986) 164–165

[T2/3] Apagyi Barnabás, Lévay Péter and Ladányi Károly:
Anomalies of the Schwinger phase shifts in the static exchange approximation,
Phys. Rev. A 37 (1988) 4577–4581

[T2/4] Apagyi Barnabás, Lévay Péter and Ladányi Károly:
Spurious singularities in the generalized Newton variational method,
Phys. Rev. A 44 (1991) 7170–8

[T3/1] Apagyi Barnabás, Ostrowski Alexander, Scheid Werner, and Voit Helmut:
Phase shift analysis and inversion to a potential for $^{12}$C+$^{12}$C elastic scattering at $E_{c.m.}$=9.50 and 11.38 MeV,
J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 18 (1992) 195–204

[T3/2] Apagyi Barnabás, Schmidt Alexander, Scheid Werner, and Voit Helmut:
$^{12}$C+$^{12}$C elastic scattering potentials obtained by unifying phase shift analysis with the modified Newton-Sabatier inversion method,
Phys. Rev. C. 49 (1994) 2608–17

[T3/3] Alexander N, Amos K, Apagyi B, and Lun D R:
Nucleon-alpha particle interactions from inversion of scattering phase shifts,
Phys. Rev. C. 53 (1996) 88–95

[T3/4] Báthori B, Harman Z, and Apagyi B:
Pion-pion potentials by inversion of phase shifts at fixed energy,
in Hadrons, Nuclei and Applications (A. Zichichi ed, World Scientific, 2000), pp. 140–145

[T3/5] Apagyi Barnabás and Lévay Péter:
Electron-atom scattering potentials obtained by inversion at fixed energy,
Lecture Notes in Physics 427 (1993) 252–265

[T3/6] Apagyi B, Lévay P, and Scheid W:
Fixed-energy inversion of polarisation corrected electron-atom scattering phase-shifts,
Lecture Notes in Physics 488 (1997) 156–168

[T3/7] Eberspächer M, Apagyi B, and Scheid W:
Solution of coupled channel inverse scattering problem at fixed energy by a modified Newton-Sabatier method,
Phys. Rev. Letters 77 (1996) 1921–1924

[T3/8] Eberspächer M, Amos K, and Apagyi B:
Inverse scattering method for transfer reactions,
Phys. Rev. C. 62 (2000) 064610

[T3/9] Eberspächer M, Amos K, Scheid W, and Apagyi B:
An approximation method for the solution of the coupled channels inverse scattering problem at fixed energy,
J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 26 (2000) 1065–1077

[T3/10] Apagyi B, Harman Z, and Scheid W:
Solution of the Cox-Thompson inverse scattering problem using finite set of phase shifts,
J. Phys. A 36 (2003) 4815–4826