Q-szgk feladatok 1.

1. A qubiteket kétféle reprezentációban szoktuk felírni:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

és

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right), \qquad \gamma, \theta, \varphi \in \mathbb{R}$$

Adjuk meg (α, β) és $(\gamma, \theta, \varphi)$ közötti összefüggést.

2. A negáció (NOT) művelet végzésére a $\sigma_x \equiv X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Pauli spinmátrix szolgál. Vonjunk ebből gyököt, azaz adjuk meg azt a $\sqrt{\text{NOT}} = \sqrt{X}$ unitér operátort, amelyre

$$\sqrt{X}\sqrt{X} = X \qquad \text{és} \qquad \sqrt{X}\sqrt{X}^{-1} = \sqrt{X}\left(\sqrt{X}\right)^{*T} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Bizonyítsuk, hogy a Hadamard operátornak az $|x\rangle$ bázisállapotra ($x \in \{0, 1\}$) való hatása a következő szuperpozíciót eredményezi:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad H|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((-)^x|x\rangle + |1-x\rangle\right)$$

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ és $P_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$ és $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, akkor

$$HP_{2\varphi}H|0\rangle = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -i\sin\varphi \end{pmatrix}$$

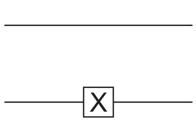
5. Bizonyítsuk be, hogy ha $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ és $R_{\left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right]}(\theta) = e^{-i\theta\left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right]/2}$, ahol $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, akkor

$$H = e^{i\varphi}R_X(\pi)R_Y\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ ahol } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

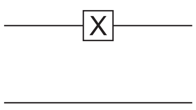
6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges 2×2-es U unitér operátor előállítható

$$U = e^{i\alpha}R_Z(\beta)R_Y(\gamma)R_Z(\delta), \qquad \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \in \mathbb{R}$$

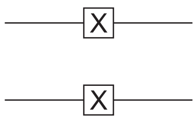
7. Számítsuk ki 2×2-es mátrixokat használva a következő 4×4-es unitér mátrixokat:



1. ábra.

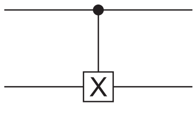


2. ábra.

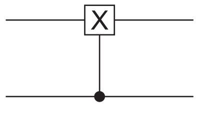


3. ábra.

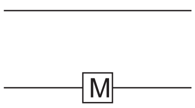
8. 2×2-es mátrixokat használva mátrixelemekként, számoljuk ki a következő 4×4-es szupermátrixokat:



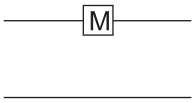
4. ábra.



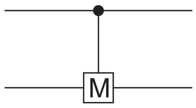
5. ábra.



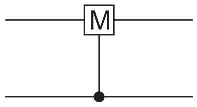
6. ábra.



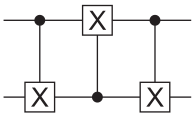
7. ábra.



8. ábra.



9. ábra.



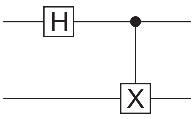
10. ábra.

9. Adjuk meg a következő áramköröknek megfelelő művelet 4×4-es unitérmátrixát szupermátrix alakban, ahol a mátrixelemeket 2×2-es mátrixok jelentik ($U \equiv M$):

10. Számítsuk ki az

    mátrixot, 2×2-es mátrixot használva mátrixelemként.

11. Adjuk meg a Bell bázist előállító 4×4-es U operátor mátrixot szupermátrix alakban.



11. ábra.

Q-szgk feladatok 2.

12. Mutassuk meg, hogy az $\overline{y} \in \{0,1\}^n$ kvantum regiszteren ható $H^{\otimes n}$ Hadamard operátor hatása

$$|\overline{y}\rangle \xrightarrow{H^{\otimes n}} \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\overline{x} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\overline{y} \cdot \overline{x}} |\overline{x}\rangle$$

13. Mutassa meg, hogy az $|x, y\rangle \xrightarrow{U_f} |x, y + f(x)\rangle$ transzformációval értelmezett U_f unitér operátor hatása $|y\rangle = \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ szuperpozíció esetén az $|x, y\rangle \xrightarrow{U_f} (-1)^{f(x)}|x, y\rangle$ eredményt szolgáltatja.

14. Mutassa meg, hogy az $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ koherens állapot

    (a) normált: $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$
    (b) sajátfüggvénye az a abszorpciós operátornak: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$
    (c) átlagenergiája: $\langle\alpha|a^+ a|\alpha\rangle = |\alpha|^2$
    (d) $|\alpha| = \sqrt{0.1}$ esetén 98%-os valószínűséggel 1 fotont tartalmaz.

15. Határozza meg a CNOT $= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ operátor sajátértékeit és sajátvektorait.

16. Mutassa meg, hogy a nyalábosztóval és fázistolóval megvalósított foton manipulátor ekvivalens a Hadamard transzformációval. (Ábra a házisoron.)

17. Mutassa meg, hogy egy R_1 és R_2 reflexiós tényezővel rendelkező Fabri–Perrot üregrezonátorban kialakuló foton-tér: $E_{cav} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} E_k = \dfrac{\sqrt{1 - R_1}}{1 + e^{i\varphi}\sqrt{R_1 R_2}} E_{in}$, ahol $\varphi = \omega \dfrac{d}{c}$ a foton fázisa, és d az üreg mérete.

18. Mutassa meg, hogy a $H = \frac{\hbar\omega}{2} Z + \hbar\omega a^+ a + g(a^+\sigma_- + a\sigma_+)$ foton-atom Hamilton-operátor felcserélhető az $N = a^+ a + \frac{Z}{2}$ teljesenergia operátorral: $[H, N] = 0$.

19. Mutassa meg, hogy a $H_{JC} = g(a^+\sigma_- + a\sigma_+)$ Jaynes–Cummings Hamilton-operátor sajátértékei: $\pm g\sqrt{n+1}$, sajátfüggvényei: $\left\{ \begin{array}{c} |n, 1\rangle \\ |n+1, 0\rangle \end{array} \right\}$

20. Mutassuk meg, hogy protonra $B = 11.7$ T homogén térben az NMR rezonancia frekvencia ω_0 körülbelül 500 MHz.