Kanonikus eloszlás alakjának motivációja

Keressük azt a *szép* (mondjuk analitikus, bár ennyire nem kellene szigorúnak lennünk) függvényt, amelyre

$$f(x+y) = f(x)\, f(y)\,. \tag{1}$$

Ez a tulajdonság nagyon komoly megszorításokat ad, pl.

$$f(0) = f(0+0) = f(0)^2 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 \text{ vagy } f(0) = 1. \tag{2}$$

Tekintsük a függvényt egy általános, fix x helyen, amit felbontunk N egyenlő részre:

$$x = \sum_i \mathrm{d}x_i, \qquad \mathrm{d}x_i = \frac{x}{N} \tag{3}$$

$$f(x) = f\left(0 + \sum_i \mathrm{d}x_i\right) = f(0) \prod_{i=1}^{N} f(\mathrm{d}x_i)\,. \tag{4}$$

nagy N-ekre $\mathrm{d}x_i$ pici, így fejtsük sorba a függvényünket 0 körül, és álljunk meg a lineáris tagnál. Ahogy az $N \to \infty$ limeszt vesszük, ez a közelítés pontos lesz.

$$f(x) = f(0) \lim_N \prod_{i=1}^{N} \left[f(0) + f'(0)\, \mathrm{d}x_i\right] = f(0) \lim_N \left[f(0) + f'(0)\, \frac{x}{N}\right]^N . \tag{5}$$

A (2). észrevétel szerint f(0)=0 vagy f(0)=1. Ha f(0)=0, akkor viszont

$$f(x) = f(0) \cdot \ldots = 0, \tag{6}$$

tehát ez esetben a függvény azonosan nulla. Ez tényleg tudja az (1). egyenletet, de ez a függvény egyrészt triviális, másrészt nem használható valószínűségi sűrűségfüggvényként, pedig mi ilyet keresve jutottunk el az (1). egyenlethez. Akkor viszont csak f(0)=1 esetén kaphatunk értelmes eredményt.

De ha f(0)=1, akkor

$$f(x) = \lim_N \left[1 + f'(0)\, \frac{x}{N}\right]^N = e^{f'(0)x}. \tag{7}$$

Ez valóban jó és konzisztens, hiszen

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{f'(0)x}\right|_0 = f'(0)\,, \tag{8}$$

$$f(x+y) = e^{f'(0)(x+y)} = e^{f'(0)x} e^{f'(0)y} = f(x)\, f(y)\,. \tag{9}$$

Az összes ilyen függvény felírható tehát ilyen alakban, és egyetlen paraméter jellemzi a függvényeket: $f'(0) := -\beta$. Ezzel az érdekes esetekben az (1). tulajdonságnak megfelelő összes függvény általános alakja

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}, \tag{10}$$

tehát az exponenciális függvényalak sajátja az (1). tulajdonság. A teljes, $f(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}/Z$, $\beta > 0$ függvényalakhoz még dolgozni kellene, de az exponenciális függvényalak látszik.