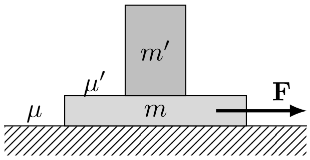
Függelék a 4. kisfiz gyakorlathoz

(*2.1.16) Egy asztalon $m = 1\,\mathrm{kg}$ tömegű deszka, a deszkán $m' = 2\,\mathrm{kg}$ tömegű teher fekszik. Mekkora vízszintes irányú F erővel kell hatni a deszkára, hogy az a teher alól kicsússzon? A teher és a deszka közötti tapadási súrlódási együttható $\mu' = 0{,}25$, a deszka és az asztal közötti tapadási súrlódási együttható pedig $\mu = 0{,}5$.



Megoldás:

A legelső lépés a feladat megoldásánál (amit egyesek időnként elfelejtenek), hogy végiggondoljuk a fizikailag értelmes lehetőségeket. Ezek pedig:

I. ha elég kicsi erővel húzzuk a deszkát, akkor az egész elrendezés nem moccan meg. Mivel ilyenkor se a deszka, se a teher nem gyorsul, ezért a két test között sem lép fel semmilyen súrlódási erő (tapadási sem!).

II. ha eléri maximális értékét az asztal és a deszka közötti tapadási súrlódás, akkor a deszka megindul. Ilyenkor a deszka és az asztal között csúszási súrlódás lép fel. Ami pedig a terhet illeti: egy darabig lépést tud tartani a deszka **a** gyorsulásával a teher és a deszka közötti tapadási súrlódás. A megadott fizikai paraméterek függvényében tehát lehet egy olyan tartomány, amikor a deszka csúszik az asztalon, de hozzá tapadva, vele együtt mozog a teher. Ez addig működik, amíg a közös **a** gyorsulást fenn tudja tartani a teherre ható tapadási súrlódási erő.

III. ha elegendően nagyot rántunk a deszkán, akkor biztos, hogy az okozott gyorsulást már nem tudja fenntartani a teherre ható súrlódási erő, vagyis a teher lemarad a deszka mögött, így minden súrlódás csúszási súrlódás lesz.

A feladat a III. eset alsó határára kérdez rá. A rendszer paramétereinek függvényében vagy a II. eset után következik a III., vagy pedig rögtön az I. után.

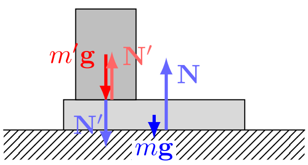
Mindhárom esetben ugyanazok az erők hatnak függőlegesen, lásd az 1. ábrát. A teherre (piros erők) ható $m'\mathbf{g}$ nehézségi erővel az $\mathbf{N}'$ nyomóerő tart egyensúlyt, így nagyságaikra $N' = m'g$. A deszkára (kék erők) az $m\mathbf{g}$ nehézségi erő mellett hat az asztal $\mathbf{N}$ nyomóerővel, és hat rá a már említett $\mathbf{N}'$ erő ellenereje. A mozgásegyenlet értelmében $N = N' + mg = (m + m')\,g$. Ezeknek összesen annyi a jelentősége, hogy a megfelelő súrlódási erőkkel kapcsolatban állnak, vagyis a teherre ható esetleges súrlódási erőkre

$$F'_\mathrm{t} < \mu'_\mathrm{t} N' = \mu'_\mathrm{t} m' g, \tag{1}$$
$$F'_\mathrm{cs} = \mu'_\mathrm{cs} N' = \mu'_\mathrm{cs} m' g, \tag{2}$$

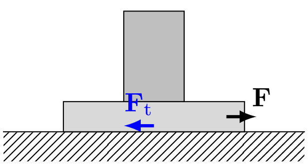
a deszkára ható esetleges súrlódási erőkre pedig

$$F_\mathrm{t} < \mu_\mathrm{t} N = \mu_\mathrm{t}\,(m + m')\,g, \tag{3}$$
$$F_\mathrm{cs} = \mu_\mathrm{cs} N = \mu_\mathrm{cs}\,(m + m')\,g \tag{4}$$

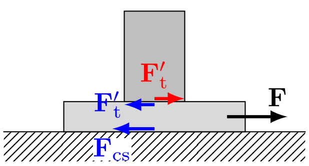
lesz érvényes, ahol $\mu^{(\prime)}_\mathrm{t}$ tapadási, $\mu^{(\prime)}_\mathrm{cs}$ pedig csúszási súrlódási együtthatókat jelöl. Vegyük észre, hogy a feladatban a *tapadási* súrlódási együtthatók adottak, vagyis $\mu_\mathrm{t} = \mu$, $\mu'_\mathrm{t} = \mu'$. Térjünk rá a vízszintes irányú erőkre!



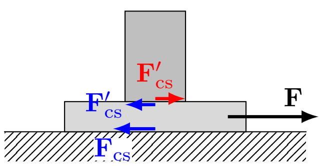
1. ábra: a testekre ható függőleges irányú erők



2. ábra: vízszintes irányú erők az I. esetben



3. ábra: vízszintes irányú erők a II. esetben



4. ábra: vízszintes irányú erők a III. esetben (erre nincs amúgy szükség)

Nézzük meg először az I. esetet (2. ábra)! Mivel mindkét test nyugalomban van, ezért nincs súrlódás a két test között, csak (tapadási) súrlódás a deszka és az asztal között. Pofonegyszerű tehát az erőkép: az **F** erő egyensúlyt tart az $\mathbf{F}_\mathrm{t}$ tapadási súrlódási erővel, $F = F_\mathrm{t}$. Ennek az állapotnak a feltétele, hogy a tapadási súrlódási erő ne haladja meg maximális értékét (lásd a (3) összefüggést):

$$F = F_\mathrm{t} < \mu \left(m + m'\right) g.$$

Ha tehát ennél kisebb erővel húzzuk a deszkát, akkor semmi nem megy sehova. Ha F eléri ezt a kritikus értéket, megindul a deszka, és vagy a II., vagy a III. eset lép érvénybe. Észrevehetjük, hogy a nyugalomban történő tapadás miatt a két test lényegében egyetlen $m + m'$ tömegű testet alkot, amelynek az asztallal fellépő nyomóerejével kell számolnunk.

Az esetleges II. esetet mutatja a 3. ábra. A két test össze van tapadva (vagyis kényszerként kettejük vízszintes elmozdulása, így gyorsulása is megegyezik), amit a köztük fellépő F'_t nagyságú tapadási súrlódási erőpár hivatott fenntartani. A mozgásegyenlet tehát a közös $\mathbf{a}$ gyorsulással

$$\begin{aligned} F'_\mathrm{t} &= m'a, \\ F - F'_\mathrm{t} - F_\mathrm{cs} &= ma. \end{aligned}$$

Az első egyenletből kifejezhetjük a gyorsulást, amit a második egyenletbe írva

$$\begin{aligned} F - F'_\mathrm{t} - F_\mathrm{cs} &= \frac{m}{m'} F'_\mathrm{t}, \\ \frac{m + m'}{m'} F'_\mathrm{t} &= F - F_\mathrm{cs}. \end{aligned} \tag{5}$$

Mivel a deszka csúszik az asztalon, ezért rá az alsó lapján egy *szabad erő* hat, a meghatározott nagyságú *csúszási* súrlódási erő,

$$F_\mathrm{cs} = \mu_\mathrm{cs} \left(m + m'\right) g,$$

lásd a (4) kifejezést. A feladat szépséghibája, hogy nem adtak nekünk csúszási súrlódási együtthatókat! Jobb híján feltételezzük, hogy $\mu_\mathrm{cs} = \mu_\mathrm{t} = \mu$, de vegyük észre, hogy ez korántsem triviális, és általában nem is igaz. Ezzel a feltevéssel az (5) egyenletből megkapjuk a tapadási súrlódási erőt mint az F erő függvényét,

$$F'_\mathrm{t} = \frac{m'}{m + m'} \left(F - F_\mathrm{cs}\right) = \frac{m'}{m + m'} \left(F - \mu \left(m + m'\right) g\right) = \frac{m'}{m + m'} F - \mu m' g.$$

Ha akarnánk, kiszámolhatnánk a gyorsulást is, de ezt senki sem kérdezte. A lényeg, hogy ennek az állapotnak a feltétele az, hogy ez a tapadási súrlódási erő ne haladja meg az (1) összefüggésben megadott korlátot:

$$\begin{aligned} F'_\mathrm{t} = \frac{m'}{m + m'} F - \mu m' g &< \mu' m' g, \\ F &< \frac{m + m'}{m'} \left(\mu + \mu'\right) m' g, \\ F &< \left(m + m'\right) \left(\mu + \mu'\right) g. \end{aligned}$$

Az erőt növelve tehát ott sérül először a feltétel, ahol $F = \left(m + m'\right) \left(\mu + \mu'\right) g$, erre vonatkozik a feladat kérdésfeltevése. Ennél nagyobb erőknél a deszka csúszik, tőle lemaradva pedig mindenhez képest csúszik a teher. Ennek az esetnek a számunkra érdektelen erőképét mutatja a 4. ábra.

Ha megnézzük a kapott két kritikus erőt, akkor láthatjuk, hogy

$$F_{\mathrm{krit},1} = \mu \left(m + m'\right) g < \left(m + m'\right) \left(\mu + \mu'\right) g = F_{\mathrm{krit},2}.$$

Magyarul az $\mathbf{F}$ erőt növelve tényleg a II. eset következik az I. után, ugyanis $F_{\mathrm{krit},1}$ és $F_{\mathrm{krit},2}$ között teljesül minden feltétel. Nem feltétlenül lenne ez a helyzet, ha értelmes csúszási súrlódási együtthatókat adott volna a feladat! Ugyanis a két kritikus erő valójában

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{krit},1} &= \mu_\mathrm{t} \left(m + m'\right) g, \\ F_{\mathrm{krit},2} &= \left(\mu_\mathrm{cs} + \mu'_\mathrm{t}\right) \left(m + m'\right) g. \end{aligned}$$

Ha tehát a csúszási súrlódási együtthatók eléggé eltérnek a tapadásiaktól, akkor lehetséges, hogy $F_{\mathrm{krit},1} > F_{\mathrm{krit},2}$ adódik. Ez az az eset, amit korábban pedzegettem: amikor megugrik az asztalon a deszka, akkor rögtön lemarad róla a teher, tehát az I. állapot a III-ba megy át. Ilyenkor a feladatra adandó válasz a nagyobbik küszöberő, vagyis $F_{\mathrm{krit},1}$ lenne.