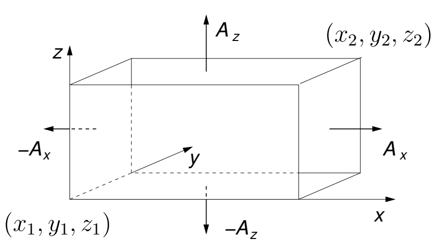
Integrál tételek

Gradiens tétel

Tétel: Legyen Φ egy elegendően sima skalár tér.

$$\oint \Phi d\mathbf{A} = \int \nabla \Phi dV \ ,$$

ahol a térfogati itegrál a felület által bezárt tartományra vonatkozik.
Először igazoljuk a tételt egy hasáb alakú tartományra!



Végezzük el a felületi integrált a hasáb oldalaira:

$$\begin{aligned}\oint \Phi d\mathbf{A} &= \int \Phi(x_2, y, z) dydz - \int \Phi(x_1, y, z) dydz \\ &+ \int \Phi(x, y_2, z) dydz - \int \Phi(x, y_1, z) dxdz \\ &+ \int \Phi(x, y, z_2) dydz - \int \Phi(x, y, z_1) dxdy\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg az első sorban szereplő integrált:

$$\int \Phi(x_2, y, z) dydz - \int \Phi(x_1, y, z) dydz = \int \left(\Phi(x_2, y, z) - \Phi(x_1, y, z)\right) dydz \ .$$

A jobb oldal integrandusát felírhatjuk egy z szerinti integrál segítségével:

$$\Phi(x_2, y, z) - \Phi(x_1, y, z) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx \ ,$$

tehát az integrálra a következő kifejezés adódik:

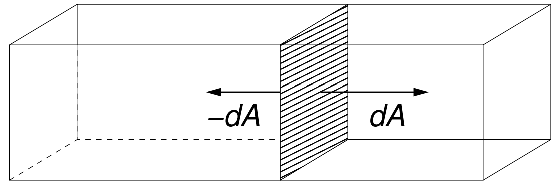
$$\int \left(\Phi(x_2, y, z) - \Phi(x_1, y, z)\right) dydz = \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} dxdydz \ .$$

Természetesen ennek az integrál eredménye egy x tengellyel párhuzamos vektor lesz. Hasonlóan eljárva a többi aldalpárra is megkaphatjuk a vektor többi komponensét is. Φ integrálja a hasáb felületére tehát könnyen felírható:

$$\oint \Phi d\mathbf{A} = \int \left(\mathbf{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dxdydz = \int \nabla \Phi dV \ .$$

Tetszőleges alakú tartomány esetén osszuk fel a térfogatot kis hasábokra. A felosztást addig finomítsuk, amíg kellő pontossággal kapjuk meg az integrál értékét. Vizsgáljunk meg két szomszédos hasábot:

az érinkező felületen a felületi integrál értéke megegyezik, de irányuk éppen ellentétes egymással, így kiejtik egymást. Könnyen beláthatjuk, hogy csak azok a hasábok adnak járulékot a felületi integrálhoz, amelyek a tartomány felületén vannak. A teljes felületi integrált tehát



előállíthatjuk az A_i hasábok felületi integráljainak az összegével:

$$\oint \Phi d\mathbf{A} = \sum_i \oint_{A_i} \Phi d\mathbf{A} = \sum_i \int_{A_i} \nabla \Phi dV = \int \nabla \Phi dV \ .$$

Alkalmazzuk a gradiens tételt a felhajtóerő meghatározására. Archimedesz óta tudjuk, hogy minden vízbe mártott test, annyit veszít súlyából, amennyi az általa kiszorított víz súlya. A hidrosztatikai nyomás attól függ, hogy milyen mélyen vagyunk a folyadék felszínétől: $p = -\rho g z$, amennyiben ρ a folyadék sűrűsége, g a gravitációs gyorsulás és z a felszíntől való távolság. Tudjuk, hogy a nyomásból adódó erő merőleges a felületre. Integráljuk a test felületére ható nyomást:

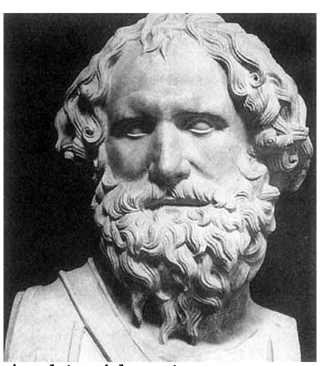
$$F = -\oint \rho g z d\mathbf{A} = -\rho g \int \mathrm{grad} z dV$$

Használjuk fel a gradiens definícióját:

$$(\mathrm{grad} z)_i = \frac{\partial r_3}{\partial r_i} = \delta_{3i} \ ,$$

amely nem más mint egy z irányú egységvektor ($\mathbf{k}$). Ne felejtsük el, hogy $r_3 = z$. Tehát a testre ható felhajtóerő:

$$F = -\rho g \mathbf{k} \int dV = -\rho g V \mathbf{k} \ .$$



Vitruvius vetette papírra Archimédesz felfedezésének a történetét. II. Hiero, Szicilia királya készítetett egy fogadalmi koronát egy ötvös mesterrel a Krisztus előtti 3. században. Gyanakvó természet lévén Archimédeszt kérte fel, hogy ellenőrizze a korona valóban színaranyból készül-e, vagy az ötvös mester megbolondította az alapanyagot egy kevés ezüsttel, ezzel is növelve a vállalkozás gazdaságosságát. Arról sajnos nincs hír, hogy a mester a megbízást közbeszerzésen nyerte volna el.

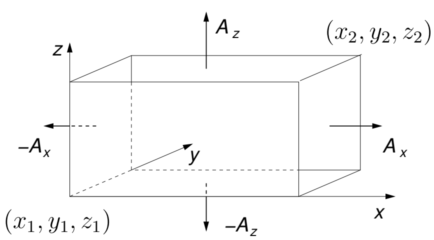
Archimédesz ismerte az arany sűrűségét, de a korona térfogatának pontos meghatározása nehézségekbe ütközött. A történetíró szerint a tudós éppen egy fürdőben próbálta rekreálni magát, amikor felismerte a törvényszerűséget a felhajtóerő és a kiszorított folyadék mennyisége között. A felfedezés öröme annyira elragadta, hogy a fürdőből egyenesen az utcára rohant így kiabálva: eureka, eureka (megtaláltam). Nagy sietségében arra sem volt ideje, hogy ruhát kapjon magára, így elég nagy feltünést keltett a korbeli városban.

Gauss (Osztogradszkij) tétel:

Tétel: Legyen $\mathbf{V}$ egy elegendően sima vektor tér.

$$\oint \mathbf{V} d\mathbf{A} = \int \mathrm{div}\mathbf{V} dV \ ,$$

ahol a térfogati itegrál a felület által bezárt tartományra vonatkozik.
Először igazoljuk ezt a tételt is egy hasáb alakú tartományra, majd az előzőekhez hasonlóan általánosítsuk tetszőleges zárt felületre.



Végezzük el a felületi integrált a hasáb oldalaira:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{V} d\mathbf{A} &= \int V_x(x_2, y, z) dydz - \int V_x(x_1, y, z) dydz \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{A} \\ &+ \int V_y(x, y_2, z) dydz - \int V_y(x, y_1, z) dxdz \\ &+ \int V_z(x, y, z_2) dydz - \int V_z(x, y, z_1) dxdy \end{aligned}$$

grediens tételhez hasonlóan járjunk el az integrálok kiszámításánál:

$$\oint \mathbf{V} d\mathbf{A} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial V_x}{\partial x} dx\, dydz + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial V_y}{\partial y} dy\, dxdz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial V_z}{\partial z} dz\, dxdy$$

$$\oint \mathbf{V} d\mathbf{A} = \int \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dxdydz = \int \mathrm{div}\mathbf{V} dV$$

Egy tetszőleges zárt felület esetén osszuk fel a tartományt kis hasábokra és bízzunk benne, hogy a finomitás növelésével konvergens sorozatot kapunk. A hasábok egymással szomszédos oldalain a felületi integrálok kiejtik egymást, ezért csak a zárt tartomány határán vett integrál számít:

$$\oint \mathbf{V} d\mathbf{A} = \sum_i \oint_{A_i} \mathbf{V} d\mathbf{A} = \sum_i \int_{A_i} \mathrm{div}\mathbf{V} dV = \int \mathrm{div}\mathbf{V} dV \ .$$

A Gauss tétel lehetőséget nyújt a divergencia integrál értelmezésére. Legyen $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ egy folytonosan deriválható vektormező. Integráljuk $\mathrm{div}\mathbf{V}$ az $\mathbf{r}_0$ pontot tartalmazó kicsiny tartományra:

$$\int \mathrm{div}\mathbf{V} dV = \oint \mathbf{V} d\mathbf{A} \ ,$$

és használjuk a középérték tételt:

$$int \mathrm{div}\mathbf{V} dV = \Delta \mathrm{div}\mathbf{V}|_{\mathbf{r}^*} \ ,$$

ahol $\mathbf{r}^*$ a tartomány egy pontja. A divergenciát az előző kifejezés segítségével a következőképpen adhatjuk meg:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \mathbf{V} d\mathbf{A} = \mathrm{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)$$

A Gauss tétel néhány alkalmazása:

A Gauss tétel segítségével számos esetben egyszerűsíthetjük az elektromos tér kiszámítását. Induljunk ki az eslő Maxwell egyenletből:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi k\rho \ ,$$

ahol ρ a töltéssűrűség. Egy pont töltés esetén a térerősség mindig párhuzamos a tér egy tetszőleges pontját és a pont töltést összekötő egyenessel. Vegyük körbe a ponttöltést egy r sugarú gömbbel úgy, hogy a töltés annak középpontjában legyen és írjuk fel a Gauss tételt erre a tartományra:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{A} = \int \mathrm{div}\,\mathbf{E}dV = 4\pi k \int \rho dV = 4\pi kQ \ .$$

A felületi integrált egyszerően elvégezhetjük, hiszen $\mathbf{E}$ mindig párhuzamos a gömb $d\mathbf{A}$ felület elemével:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{A} = 4\pi r^2 = 4\pi kQ \ ,$$

ahonnan az E térerősség nagyságára $E = kQ - r^2$ adódik.

Határozzuk meg a térerősséget egy egyenletes töltéssőrőségű gömb belselyében! Az előző esethez hasonlóan tekintsünk egy a töltéseloszlással koncentrikus, r sugarú gömböt és írjuk fel a Gauss tételt erre a tartományra:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{A} = 4\pi k \int \rho dV = 4\pi k\rho \frac{4\pi}{3} r^3 \ .$$

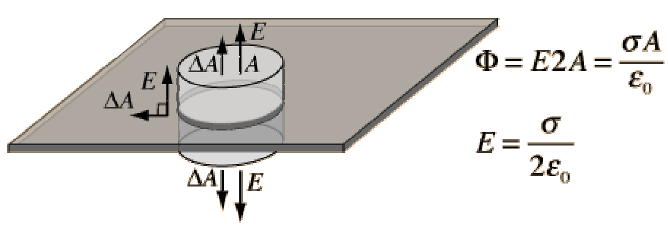
Elvégezve a felületi integrált kifejezhetjük a térerősség nagyságát:

$$E = \frac{4\pi}{3} k\rho r \ .$$

Ha feltételezzük, hogy a töltött gömb sugara Q, akkor a sűrűsége $\rho = Q/\frac{4\pi}{3}R^3$, amelyet az előző képletbe helyettesítve a következő kifejezést kapjuk:

$$E = k\frac{Qr}{R^3} \ .$$

Egy egyenletesen töltött sík esetében a térerősség mindenütt merőleges a felületre. Válasszunk egy olyan henger alakú tartományt, amelyben két oldala párhuzamos a síkkal és a területük legyen A.



Nyilvánvalóan a felületi integrál a henger palástján eltünik, tehát a Gauss tétel értelmében:

$$2AE = 4\pi kQ \ ,$$

ahol Q a töltött sík A felületén lévő töltés. A térerősség egyszerően adódik az előbbi egyenletből: $E = 2\pi k\sigma$, ahol $\sigma = Q/A$ a felületi töltéssűrűség. Egy sík kondenzátor esetében teljesen hasonlóan járhatunk el, de ott az erővonalak a két ellentétesen töltött lemez között koncentrálódnak, így a térerősség a siklapéhoz képest kétszeres lesz.

Kontinuitási egyenlet

Időben állandó tartomány

Tekintsük egy folyadék áramlását! Az áramlás sebessége az $\mathbf{r}$ pontban a $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ vektortérrel, az áramló anyag sűrűsége pedig $\rho(\mathbf{r}, t)$ skalár térrel írható le. Ezt a tárgyalásmódot, amelyben nem az egyes részecskék pályáját követjük nyomon, hane a tér egy pontjában vizsgálja az éppen ott lévő részecske jellemzőit, Euler leírásnak nevezzük.

Válasszunk egy időben állandó, zárt tartományt. Ebben a térrészben a folyadék tömege:

$$m(t) = \int \rho dV \ .$$

Ennek a tömegnek az idő szerinti deriváltját a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho dV \ .$$

Miután az a térrész, amelyre integrálunk időben állandó, a deriválás és az integrálás sorrendje felcserélhető lesz:

$$\frac{dm}{dt} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \ .$$

Az enyagmegmaradás törvényének értelmében egy adott térbeli tartományban csak akkor változhat meg a tömege, ha a tartomány határán befelé vagy kifelé anyag áramlik keresztül. Jelölje $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ a folyadék sebességét az $\mathbf{r}$ pontban. Ekkor a következő egyenletnek kell teljesülnie:

$$-\oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \ .$$

A Gauss tétel felhasználásával a felületi integrált térfogati integrállá alakíthatjuk:

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0q, .$$

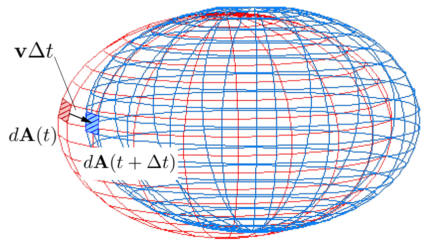
A fenti integrálnak tetszőleges tartomány esetén el kell tünnie, ez csak abban az estben teljesülhet, ha az integrandus azonosan nulla, vagyis:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \ .$$

Ezt az összefüggést hívjuk kontinuitási egyenletnek. A $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ mennyiséget értelmezhetjük áramsűrűségként is, amelynek a segítségével a kontinuitási egyenlet általános alakját a következőképpen adhatjuk meg:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{j}) = 0 \ .$$

Időben változó tartomány



A probléma a következő: hogyan határozhatunk meg egy olyan térfogati integrált, amelynek a határa is változik időben:

$$I(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{r}, t) dV \ .$$

Az integrál megváltozása két tagból tevődik össze: egyrészt a sűrűség explicit idő szerinti változásából, másrészt a a integrálási tartomány elmozdulásából. Az első tagot meghatározhatjuk a sűrűség idő szerinti parciális deriváltjából:

$$\Delta I_1 = \Delta t \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \ .$$

A második tag kiszámításához vizsgáljuk meg az felület elmozdulását! A $d\mathbf{A}$ felület elem Δt idő alatt $\Delta t \mathbf{v}$ távolságot mozdul el, miközben a felületelem $dV = \Delta t \mathbf{v} d\mathbf{A}$ térfogatot súrol. A sűrűség integrálja az elmozdult térfogatra

$$\Delta I_2 = \Delta t \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} \ .$$

A teljes integrál idő szerinti deriváltját a két járulékból határozhatjuk meg:

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta I_1 + \Delta I_2}{\Delta t} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

Használjuk fel a Gauss tételt a második tag átalakításra:

$$\frac{dI}{dt} = \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \rho \mathbf{v} \right) dV \ .$$

Az anyagmegmaradás törvényéből következik, hogy $\frac{dI}{dt} = 0$ tetszőleges tartományra, így az előző összefüggésből visszakapjuk az időben állandó tertományra levezetett kontinuitási egyenletet.