

11. Gyakor. anyag

Mátrix-invariánsok (Trace, determinans)

1, $O := \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ i, Ismerdjük, hogy O ortogonális!
 ii, O orientáció-tartó, vagy orientáció-váltó?

iii, Mely fohos röggel fogat O ?

iv, Milyen tengely kérés fogat O ?

2, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

A fenti mátrixok közül melyek ábrakelthetők egyenesen a lineáris transzformációk kétbázisú bázisban?

Függvények deriváltja, gradient

1, $f(x, y, z) := \frac{e^{xyz^2}}{xy^2}$

i, Határozzuk meg f első- és másodrendű parciális deriváltjait!

ii, $P(1, 2, 0)$; $\underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\text{grad } f|_P = ?$; $\left. \frac{df}{d\underline{u}} \right|_P = ?$ (iránymenti derivált)

2, $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{1 + y^2}$

Határozzuk meg a függvény grafikonján az $(2, 0)$ pontban érintő ritk egyenletét!

3,

$$f(x, y) = xy \quad ; \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ; \quad h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } x=y=0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{x^2-y^2}{2} \quad ; \quad \tilde{g}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } x=y=0 \end{cases} ; \quad \tilde{h}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } x=y=0 \end{cases}$$

i, Mi a kapcsolat a felső és az alsó sorban lévő függvények között?

ii, Ábrázoljuk f -et és \tilde{f} -t! (A függvények grafikonjához a térben.)

iii, Ábrázoljuk f (és \tilde{f}) szintfelületeit is gradiens és (x, y) síkban!

iv, Mely függvények folytonosak az origóban?

v, Mely függvényeknek létezik a parciális deriváltjai az origóban?

vi, Mely függvényeknek létezik az iránymenti deriváltjai az origóban?

vii, Mely függvényeknek létezik a gradiense (totális deriváltja) az origóban?

4, Egy origóban helyezett Q ponttöltés elektromos potenciálja

$$\phi(r) = \frac{kQ}{r} \quad (r = |\underline{r}|) \quad \text{Kétáramú meg a ponttöltés } \underline{E}(r) = -\text{grad } \phi(r) \text{ elektromos térerő!}$$

5, Egy origóban helyezett p elektromos dipólus potenciálja

$$\phi_{\text{dip}}(r) = \frac{p \cdot r}{r^3} \quad (|\underline{r}| = r) \quad \underline{E}_{\text{dip}}(r) = -\text{grad } \phi_{\text{dip}}(r) = ?$$

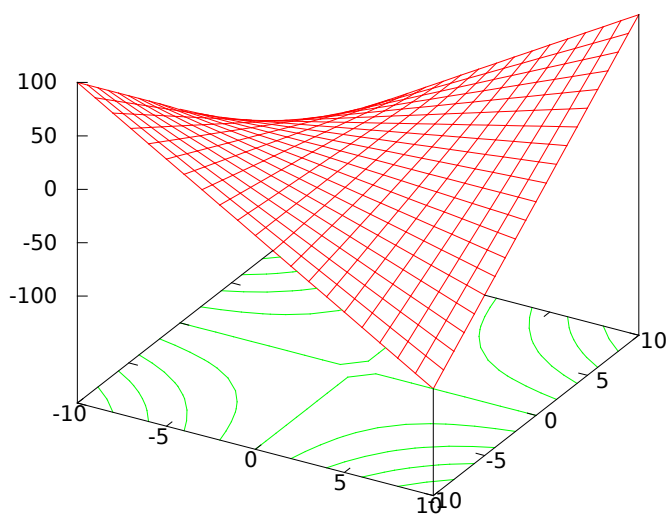
6, Van-e olyan függvény, melynek parciális deriváltjai az adott függvények? Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mellett? Ha igen, akkor határozzuk meg a függvényt!

$$i, \left. \begin{aligned} f'_x(x, \gamma) &= 2x + 3\gamma \\ f'_y(x, \gamma) &= \alpha x + 4\gamma \end{aligned} \right\} f(x, \gamma) = ? ; \alpha = ?$$

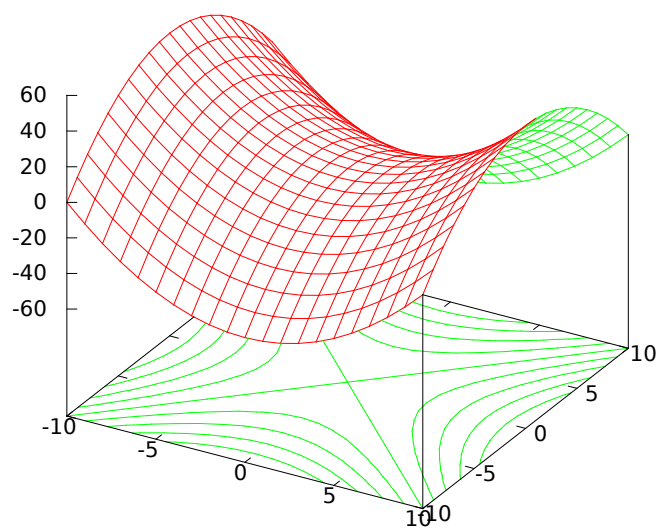
$$ii, \left. \begin{aligned} g'_x(x, \gamma) &= \frac{\gamma}{(x+\gamma)^2} \\ g'_y(x, \gamma) &= \frac{\alpha x}{(x+\gamma)^2} \end{aligned} \right\} \alpha = ? ; g(x, \gamma) = ?$$

3 Legyen $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ \gamma \\ z \end{bmatrix}$; $r = |\underline{x}| = \sqrt{x^2 + \gamma^2 + z^2}$ is f tetraédres egyenletű, folytonos deriválható valós függvény.
 $\phi(\underline{x}) := f(r)$. $\text{grad } \phi(\underline{x}) = ?$

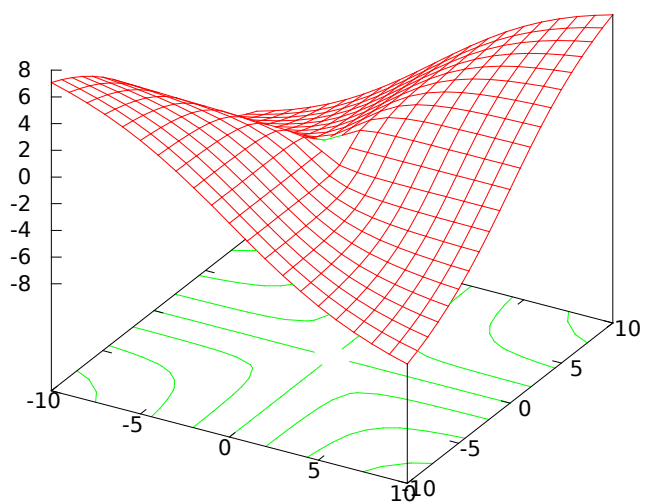
$$f(x,y)=xy$$



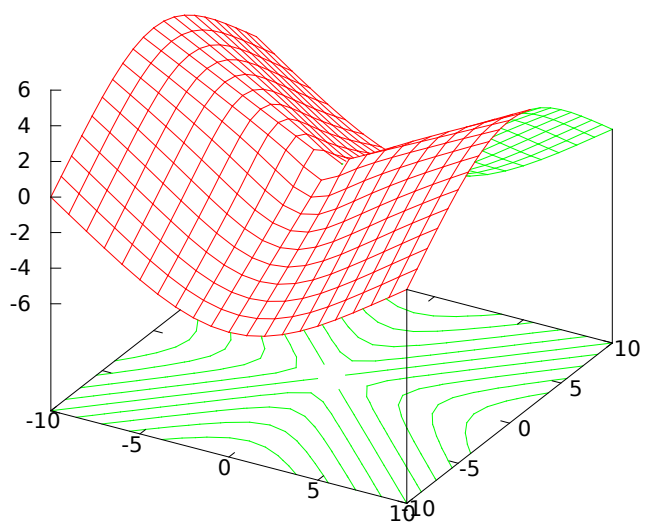
$$\tilde{f}(x,y)=(x^2-y^2)/2$$



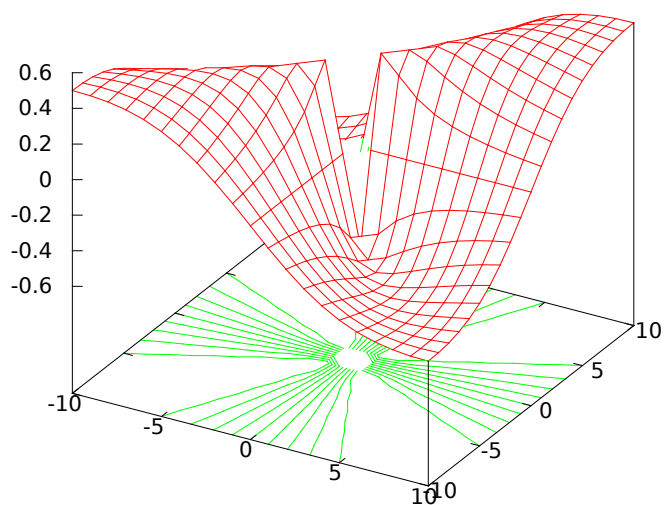
$$g(x,y)=xy/\sqrt{x^2+y^2}$$



$$\tilde{g}(x,y)=(x^2-y^2)/(2\sqrt{x^2+y^2})$$



$$h(x,y)=xy/(x^2+y^2)$$



$$\tilde{h}(x,y)=(x^2-y^2)/(2x^2+2y^2)$$

