Feladtok integrálszámításból

Előfordulhat, hogy a feladatok olyan integrálra vezetnek, amelyeket nem lehet anlítikusan meghatározni. Elegendő ekkor csak az integrált felírni.

1. Feladat

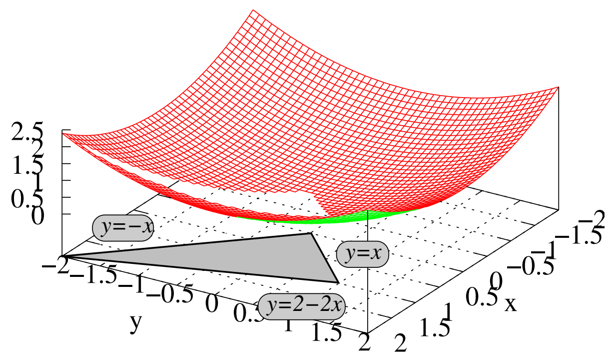
   A Hubble-teleszkóp parabolatükréből űrszeméttel való ütközés miatt kitörött egy kis darab. A pótláshoz szükséges a tükördarab mögötti szigetelőanyag, az ezüsttel bevont üveg pótlása és persze ragasztóra is szükség lesz. Számoljuk ki ezek mennyiségét!

   Az alábbi feladatnál csak az integrálok felírása a feladat, a apontos határokkal!

   Legyen adott az S felület:

$$z = a(x^2 + y^2) \tag{1}$$

   Az S tartóját az $x - y$ síkban legyen T. A T háromszöget határoló egyenesek egyenleteit lásd az ábra mellett:



$y = x$

$y = -x$

$y = 2 - 2x$

   (a) Paraméterezzük fel az T háromszöget s, t változókkal, ha $s = x - y$, illetve $t = x + y$! (Adjuk meg a határokat!)

   (b) Számoljuk ki T felületét!

   (c) Számoljuk ki a S parabola alatti térrész térfogatát! (Miért 1 a Jakobi-determináns? Mik az integrálási határok?)

   (d) Mekkora S felülete?

   (e) Mekkora S határának hossza?

2. Feladat

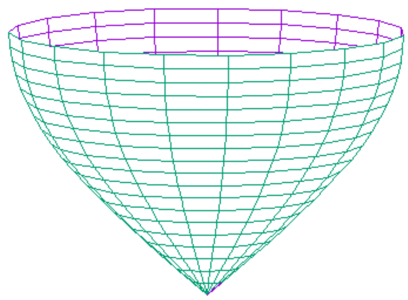
   a.) Egy R sugarú hengerre d átmérőjű huzalból l hosszúságút tekerünk szorosan egymás mellé. Milyen hosszan fedhetjük be a henger felületét a huzallal?

   Segítség: A henger felületére feltekeredő drót egyenlete:

$$x = R\cos(t)$$
$$y = R\sin(t)$$
$$z = at,$$

   ahol az a paramétert úgy kell megválasztani, hogy egy menet feltekerése esetén a z változó éppen egy huzal vastagságnyit emelkedjen.

b.)



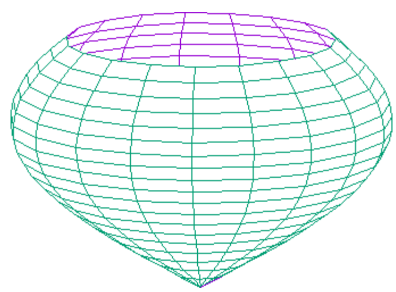
Az szomszéd ábrán látható felületre feltekeredő fonal egyenletét a következőképpen adhatjuk meg:

$$x = \sin(t)\cos(t)$$
$$y = \sin(t)\sin(t)$$
$$z = at$$

Hogyan válasszuk meg az a paramétert, ha egy l hosszúságú fonállal, amely a az alakzat csúcsáról indul fel akarunk érni a peremére?

3. Feladat
   Az ábrán látható nyílt felületet a következőképpen parametrizálhatjuk:

$$x = \sin(u)\cos(v)$$
$$y = \sin(u)\sin(v) \quad ,0 \leq u \leq 3/4\pi \quad ,0 \leq v \leq 2\pi$$
$$z = au$$



   Számítsuk ki a fluxust, ha a felület a következő erőtérben helyezkedik el:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}.$$

   Mekkora az erőtér divergenciája? Mekkora lenne a fluxus, ha zárt felületre számítanánk ki? (Gauss tétel) Érdemes polár koordináta rendszerben dolgozni!

4. Feladat
   Legyen adott a $z = b - a(x^2 + y^2)$ egyenletű paraboloid
   (a) Paraméterezze hengerkoordináta rendszerben!
   (b) Ha $z \geq 0$ mekkora a paraboloid térfogata?
   (c) Mekkora a paraboloid felszíne?
   (d) Mekkora a paraboloid fluxusa a $\mathbf{F} = (x, y, z)$ vektormezővel?

5. Feladat
   Egy $alpha$ nyításszögű kúp felületére egy fonalat tekerünk fel h menetemelkedéssel. Milyen hosszú fonalra lesz szükségünk n menetszámhoz? Mekkora lesz a fonal helyzeti energiája, ha $1m$ fonal súlya $10g$?

6. Feladat
   Egy R sugarú gömb felszinén számítsuk ki egy a gömb középpontjától z_0 távolságra helyezett pozitív ponttöltés elektromos terének a fluxusát! Dolgozzunk henger koordináta rendszerben!

7. Feladat
   Egy ellipszoidnak a következő az egyenlete:

$$x^2 + 5y^2 + 4zy + 2z^2 = 1$$

   Határozzuk meg az ellipszoid és az xy sík metszetének a területét!

8. Feladat

Egy kúp köré tekeredő drótot a következőképpan parametrizálunk:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} b\varphi\cos(\varphi) \\ b\varphi\sin(\varphi) \\ a\varphi \end{pmatrix}$$

a.) Írjuk fel az $\mathbf{r}(\varphi)$ vektort henger koordinátákban és a henger koordináta rendszerben használatos $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ egységvektorok felhasználásával!

b.) Milyen hosszú drótra lesz szükségünk, ha n menetet szeretnék a kúpra tekerni?

c.) Ha a drótot nem a kúp csúcsában, hanem z_0 magasságban kezdjük feltekerni, akkor mekkora lesz a mágneses indukció z komponense a kúp csúcsában, ha I áram folyik a tekercsben? Alkalmazzuk a Biot-Savart törvényt:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

9. Feladat

Egy szolenoidban a tekercset a következőképpen parametrizálhatjuk:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ a\varphi \end{pmatrix} = r\mathbf{e}_\rho + a\varphi\mathbf{e}_z \ ,$$

ahol r a tekercs sugara, az a paraméter pedig a menetemelkedést határozza meg. Mutassik meg, hogy a mágneses térerősség a henger tengelyével párhuzamos komponense a tengelye mentén a henger közepén lesz a legnagyobb!

10. Feladat

Egy testet felületét a következőképpen parametrizálhatjuk:

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} (1+\cos(u))\cos(v) \\ (1+\cos(u))\sin(v) \\ u \end{pmatrix} \qquad u \in [-\pi, \pi] \ , \quad v \in [0, 2\pi]$$

Mekkora lesz a térfogata? Mutassuk meg hogy a test térfogatát a következő felületi integrálokkal is megadhatjuk:

$$\int \frac{1}{3}\mathbf{r}d\mathbf{A} = \int z\mathbf{e}_z d\mathbf{A} = \int \frac{1}{2}\rho\mathbf{e}_\rho d\mathbf{A}$$