Név: Neptun kód:

Kérem minden feladatot külön lapra írjon!

1. **Feladat: Vonal menti integrál** **(34 pont)**

   a) Gyerekek szánkóznak egy lejtőn, amelynek egyenlete $y = \operatorname{arsinh}(x)$ és a gyerekek $y = 3$ből csúsznak le $y = 0$-ba. Milyen hosszú a lejtő. Válasszon alkalmas paraméterezést!

   b) A gyerekek elmennek egy egyenes, 45 fokos lejtőhöz, amely szintén $y = 3$-ból megy $y = 0$-ba. Vonalintegrállal számolja ki a lejtő hosszát és azt, hogy mennyi idő alatt érnek le a gyerekek!

   c) Legyen adott hengerkoordináta rendszerben az alábbi vektortér és görbe:
   $\mathbf{v}(\phi) = (R\sin(\phi), R\cos(\phi), 0) \qquad \mathbf{r}_g(\phi) = (R\cos(\phi), R\sin(\phi), c\phi)$,
   ahol $\phi \in [0, 2\pi]$ Számolja ki az alábbi vonalintegrálokat:

$$I_1 = \int_g \mathbf{v} d\mathbf{r}$$
$$I_2 = \int_g \mathbf{v} \times d\mathbf{r} \tag{1}$$

2. **Feladat: Felületi integrál** **(33 pont)**

   a) Számolja ki a gömb felületét gömbi koordinátákba! Paraméterezze a felületet ϑ, φ szerint, írja fel a felületelemet, végezze el a felületi integrált!

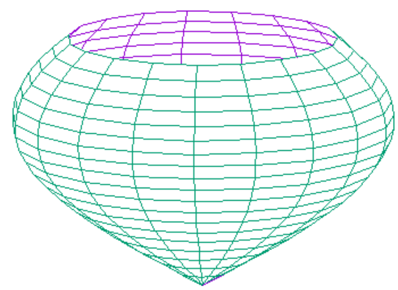
   b) Adott egy csónak, amelynek az alját a $z = x^2 + \frac{1}{4}y^2$ függvény adja meg. Miután Garfield belemászik a csónak alja $z = -1$-ig merül. Mekkora felületen lesz vízes a csónak?

   c) A csónak aljában a $(0,0)$, $(0,a)$, (a,a), $(a,0)$ alakú darabka meglazult ($a = \frac{1}{4}$). Mekkora és milyen irányú erővel kell Garfieldnek nyomnia, hogy az a helyén maradjon? ($\rho = 1$, $g = 10$ megfelelő egységekben.)

3. **Feladat:** **Integrál tételek, görbe vonalú rendszerek** **(33 pont)**

a) Az ábrán látható nyílt felületet a következőképpen parametrizálhatjuk:

$$x = \sin(u)\cos(v)$$
$$y = \sin(u)\sin(v) \quad ,0 \le u \le 3/4\pi \quad ,0 \le v \le 2\pi$$
$$z = au$$



Számítsuk ki a fluxust, ha a felület a következő erőtérben helyezkedik el:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix} .$$

Mekkora az erőtér divergenciája? Mekkora lenne a fluxus, ha zárt felületre számítanánk ki? (Gauss tétel) Érdemes henger koordináta rendszerben dolgozni!

b) Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix} = \mathrm{rot}(z\rho\mathbf{e}_\varphi)$$

c) Az *a)* pontban szereplő felületen határozzuk meg a *b)* feladat $\mathbf{V}$ vektorterének a fluxusát:

$$\Phi = \int \mathbf{V} d\mathbf{A}$$

Használjuk a Stokes tételt!

$$\mathrm{div}\mathbf{f} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho f_\varrho)}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{f} = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_z}{\partial\phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\varrho + \left(\frac{\partial f_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial\varrho}\right)\mathbf{e}_\phi + \left(\frac{\partial(\varrho f_\phi)}{\partial\varrho} - \frac{\partial f_\varrho}{\partial\phi}\right)\frac{1}{\varrho}\mathbf{e}_z$$