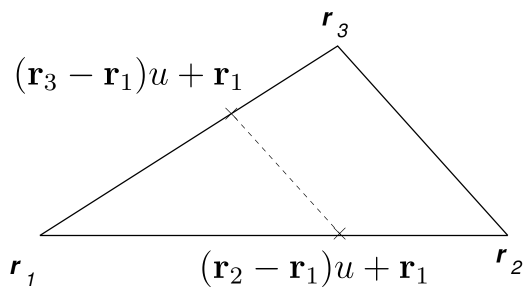
Számítási módszerek a fizikában 2. pót ZH

Név: **Neptun kód:**

---

1. **Feladat**

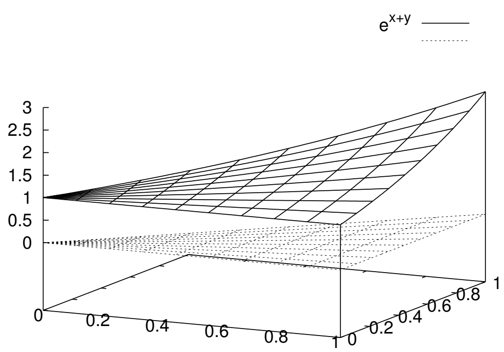


Az $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ és $\mathbf{r}_3$ pontok egy háromszöget határoznak meg. Mutassuk meg, hogy a háromszög felületét a következőképpen is paraméterezhetjük:

$$\mathbf{r}(u, v) = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)uv + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)u + \mathbf{r}_1$$

ahol $0 \le u \le 1$ és $0 \le v \le 1$.

Legyen a három pont: $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}_3 = (1, 1, 0)$ és a három pont felett tekintsük az $f(x, y) = e^{x+y}$ függvényt.



a.) Határozzuk meg a felületelem vektort!

b.) Mekkora a függvény háromszög feletti területe? Csak írjuk fel az integrált!

c.) Integráljuk ki az $\mathbf{v} = (0, 0, z)$ vektorteret a függvény által meghatározott felületen!

2. **Feladat**

Egy kétdimenziós spirált a következőképpen paraméterezünk polár koordinátákban:

$$r = r_0(1 + u), \qquad \varphi = \varphi_0 \ln(1 + u)$$

a.) Mekkora lesz az átmérője egy L hosszúságú spirálnak?

b.) Tételezzük fel, hogy az L hosszúságú spirálban I nagyságú áram folyik. A mágneses teret a Biot-Savart törvény segítségével határozhatjuk meg:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathbf{dr} \times \mathbf{r}}{r^3} \,.$$

Mekkora lesz a térerősség a spirál középpontjában (origóban)?

3. **Feladat**
Tekintsük a következő vektorteret:

$$\mathbf{f} = \mathbf{r}\frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

a.) Írjuk fel a vektortér f_r, f_φ és f_ϑ gömbi koordinátáit!

b.) Határozzuk meg a vektortér divergenciáját és rotációját gömbi koordináta rendszerben!

c.) Adjuk meg a következő vektortér f_ρ, f_φ, f_z henger koordinátáit és határozzuk meg a divergenciáját és rotációját henger koordináta rendszerekben:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Segítség:

$$div\mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(V_\vartheta \sin(\vartheta)\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{f} = {} & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi \sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{r}} \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned}$$

$$\nabla\mathbf{f} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho f_\varrho)}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_z}{\partial\phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\varrho + \left(\frac{\partial f_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial\varrho}\right)\mathbf{e}_\phi + \left(\frac{\partial(\varrho f_\phi)}{\partial\varrho} - \frac{\partial f_\varrho}{\partial\phi}\right)\frac{1}{\varrho}\mathbf{e}_z$$