1. Bizonyítsuk be a következő azonosságot: $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$.

2. írjuk fel a következő mennyiségeket henger és gömbi koordináta rendszerekben:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 &= (\mathbf{r} \times \mathbf{p})^2 \\ \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

3. Egy vektor Descartes koordinátái a következő egyenletnek tesznek eleget:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 3x + 2y + z &= t \\ 2x - y - z &= 3 \ . \end{aligned}$$

   Határozzuk meg a vektor idő (t) szerinti deriváltját!

4. írjuk fel a mozgás egyenletét polár koordináta rendszerben egy síkban mozgó, l_0 nyugalmi hosszúságú, D direkciós állandójú rugó végére kötött tömegpontnak. A potenciális energiáját a következőképpen adhatjuk meg:

$$V = \frac{D}{2} (r - l_0)^2 \ .$$

5. Határozzuk meg egyenletes körmozgás esetén a sebesség rotációját!

6. Határozzuk meg a divergenciáját a következő vektor tereknek:

   henger. koord. r.

$$\begin{pmatrix} -y(x^2 + y^2) \\ x(x^2 + y^2) \\ 1/z^2 \end{pmatrix}$$

   gömbi koord. r.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{xz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ \dfrac{yz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ \sqrt{1 - z^2} \end{pmatrix}$$

7. Számítsuk ki a gradiensét gömbi koordináta rendszerben a következő potenciálnak:

$$\Phi = \frac{\mathbf{P}\mathbf{r}}{r^3} \ ,$$

   ahol $\mathbf{P}$ állandó vektor!

8. Számítsuk ki a rotációját henger vagy gömbi koordináta rendszerben a következő vektortérnek:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \ ,$$

   ahol $\mathbf{m}$ egy állandó vektor! Henger koordináta rendszerben célszerű a z tengely irányát $\mathbf{m}$-mel párhuzamosan választani.

9. Határozzuk meg a divergenciáját gömbi koordináta rendszerben a következő áramsűrűségnek:

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \sin{(kr)}$$

10. Legyen hengerkoordináta-rendszerben (ϱ, ϕ, z) felírva $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\phi / z^\alpha + \mathbf{e}_z / \varrho^\alpha$, Határozza meg $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ divergenciáját!

11. Határozza meg $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ rotációját!
Vizsgálja meg, milyen α értékre igaz az eredmény!

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho f_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial f_z}{\partial \phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\varrho + \left(\frac{\partial f_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \varrho} \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{\partial (\varrho f_\phi)}{\partial \varrho} - \frac{\partial f_\varrho}{\partial \phi} \right) \frac{1}{\varrho} \mathbf{e}_z$$

12. Számoljuk ki az alábbi kifejezéseket $r > 0$ esetén ($\mathbf{m} = (0, 0, m)$ konstans vektor):

(a) $\operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{m}\mathbf{r}}{r^3} \right) = ?$ (b) $\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{m}}{r^3} \right) = ?$