Számítási Módzsereka Fizikában 2. ZH.

Név: **Neptun kód:**

---

1. **Differenciál operátorok** 25 pont

   Tekintsük a következő vektorteret:
$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{a} \times \mathbf{r} \,.$$

   (a) Határozzuk meg a vektortér divergenciáját és rotációját Descartes koordináta rendszerben. (Használjuk az indexes jelőlésmódot, ha lehet!)

   (b) Írjuk fel a g_ρ, g_φ, g_z komponenseket!

   (c) Elenőrizzük henger koordináta rendszerben a kifejezés rotációját és divergenciáját!

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho f_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$
$$\nabla \times \mathbf{f} = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_z}{\partial \phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\varrho + \left(\frac{\partial f_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \varrho}\right)\mathbf{e}_\phi + \left(\frac{\partial(\rho f_\phi)}{\partial \varrho} - \frac{\partial f_\varrho}{\partial \phi}\right)\frac{1}{\varrho}\mathbf{e}_z$$

Megoldás:

(a)

$$\partial_i f(r) = \frac{df}{dr}\partial_i r = \frac{df}{dr}\frac{r_i}{r}$$
$$\partial_i r = \frac{\partial}{\partial r_i}\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \frac{r_i}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} = \frac{r_i}{r}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{g} = \partial_i f(r)\epsilon_{ijk}a_j r_k = \frac{df}{dr}\frac{r_i}{r}\epsilon_{ijk}a_j r_k + f(r)\epsilon_{ijk}a_j\delta_{ik} = \frac{df}{dr}\frac{1}{r}\epsilon_{ijk}a_j r_k r_i + f(r)\epsilon_{iji}a_j = 0$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{g} = \epsilon_{ijk}\partial_j f(r)\epsilon_{klm}a_l r_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\left(\frac{df}{dr}\frac{r_j}{r}a_l r_m + f(r)a_l\delta_{jm}\right)$$
$$= a_i\frac{df}{dr}\frac{r_j r_j}{r} + a_i f(r)\delta_{jj} - r_i\frac{df}{dr}\frac{r_j a_j}{r} - f(r)a_j\delta_{ij} = a_i r\frac{df}{dr} + 2a_i f(r) - r_i\frac{\mathbf{ra}}{r}\frac{df}{dr}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{g} = \mathbf{a}\left(r\frac{df}{dr} + 2f(r)\right) - \mathbf{r}\frac{\mathbf{ar}}{r}\frac{df}{dr} = a\mathbf{e}_z\left(\frac{r^2}{r}\frac{df}{dr} + 2f(r)\right) - (\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z)\frac{az}{r}\frac{df}{dr}$$
$$= a\left(\frac{r^2 - z^2}{r}\frac{df}{dr} + 2f(r)\right)\mathbf{e}_z - a\frac{\rho z}{r}\frac{df}{dr}\mathbf{e}_\rho$$

(b) Henger koordinátarendszerben:

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z, \qquad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$
$$\mathbf{g} = f(r)a\mathbf{e}_z \times (\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z) = a\rho f(r)\mathbf{e}_\varphi = g_\varphi\mathbf{e}_\varphi$$
$$\operatorname{div}\mathbf{g} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial g_\phi}{\partial \phi} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial a\rho f(r)}{\partial \phi} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{g} = -\frac{\partial g_\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_\varrho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho g_\varphi}{\partial \rho}\mathbf{e}_z = -\frac{\partial a\rho f(r)}{\partial z}\mathbf{e}_\varrho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a\rho^2 f(r)}{\partial \rho}\mathbf{e}_z$$
$$= -a\rho\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{e}_\varrho + a\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(a\rho^2 f(r)\right)\mathbf{e}_z = -a\frac{df}{dr}\frac{\rho z}{r}\mathbf{e}_\varrho + a\left(2f(r) + \rho\frac{df}{dr}\frac{\rho}{r}\right)\mathbf{e}_z$$

2. **Vonalmenti integrál** 25 pont

(a) Egy d vastagságú, l hosszúságú tüzölotó tömlőt feltekerünk. Mekkora lesz az átmérője?

(b) Egy R sugarú hengerre l hosszúságú, d átmérőjű drótot tekerünk szorosan egymás mellé. Milyen hosszú lesz az így kapott tekercs?

Megoldás:

(a) A spirál menet emelkedése megegyezik a tömlő vastagságával. Paraméterezzük a spirált:

$$\mathbf{r}(\varphi) = \frac{d}{2\pi}\mathbf{e}_\rho, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{2\pi}\left(\mathbf{e}_\rho + \varphi\mathbf{e}_\varphi\right), \qquad |\dot{\mathbf{r}}| = \frac{d}{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}$$

A spirál hossza:

$$\int_0^\Phi \sqrt{1+\varphi^2}d\varphi = \frac{2\pi L}{d}$$

Használjuk a $\sinh(x) = \varphi$ helyettesítést, $d\varphi = \cosh(x)dx$:

$$\int_0^\Phi \sqrt{1+\varphi^2}d\varphi = \int_0^X \cosh^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^X (\cosh(2x)+1)dx = \frac{1}{4}\sinh(2X) + \frac{X}{2} = \frac{2\pi L}{d}$$

Ez egy transzcendens egyenlet, amelyet csak numerikusan tudunk megoldani. Tegyük fel, hogy X a megoldása. Ekkor

$$D = \frac{d}{\pi}\operatorname{arsinh}(X)$$

(b) A menetemelkedés it is d lesz. A hengeren lévő spirál parametrizációja:

$$\mathbf{r}(\varphi) = R\mathbf{e}_\rho + \frac{d}{2\pi}\varphi\mathbf{e}_z, \qquad \dot{\mathbf{r}} = R\mathbf{e}_\varphi + \frac{d}{2\pi}\mathbf{e}_z, \qquad |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}$$

A drót hossza megegyezik a vonalmenti integrállal:

$$\int_0^\Phi \sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2} d\varphi = \Phi\sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2} = l$$

Tehát:

$$\Phi = \frac{l}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}}, \qquad L = \frac{d}{2\pi}\frac{l}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}}$$

3. **Felületi integrál** 25 pont

Egy háromszög csúcspontjai a következőek:: $\mathbf{r}_1 = (0, 0, -1)$, $\mathbf{r}_2 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{r}_3 = (2, 0, 0)$.

(a) Mekkora lesz a három pont által meghatározott háromszög területe?

(b) Mekkora lesz a felülete a $z = x^2 - y^2$ nyeregfelület háromszög feletti területének? Elegendő csak felírni az integrált!

(c) A háromszög és annak a nyereg felületre vett vetülete közötti tartománynak mekkora lesz a térfogata? Elegendő csak felírni az integrált!

Megoldás:

(a) Többféleképpen is kiszámolhatjuk a területtet. Pl.:

$$T = \frac{1}{2}|(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)|$$

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = (2, 0, 1), \qquad \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (1, -1, 1), \qquad (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = (1, -1, -2)$$

Tehát a terület: $T = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

(b) Parametrizáljuk a háromszög vetületét az xy síkban:

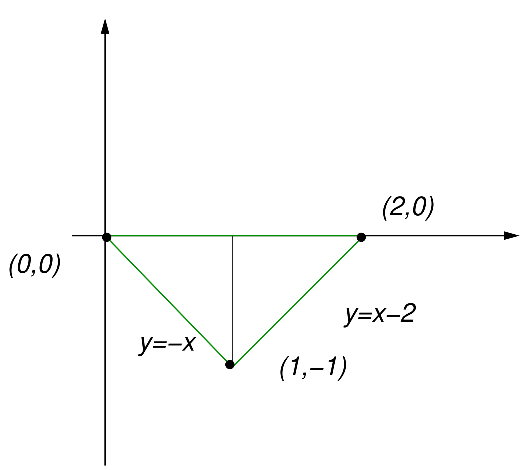
$$\mathbf{r}(u, v) = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)uv + \mathbf{r}_2 u, \qquad \mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} uv + u \\ uv - u \\ 0 \end{pmatrix}$$

A z komponens: $z = x^2 - y^2 = 4u^2 v$, vagyis

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} uv + u \\ uv - u \\ 4u^2 v \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} v + 1 \\ v - 1 \\ 8uv \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ 4u^2 \end{pmatrix}$$

$$dA = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \left|\begin{matrix} -4u^2(v + 1) \\ 4u^2(v - 1) \\ 2u \end{matrix}\right| dudv = \sqrt{(4u^2(v + 1))^2 + (4u^2(v - 1))^2 + 4u^2}dudv$$

Más lehetséges paraméterezés:



$$\mathbf{r}(t, s) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \qquad , \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dxdy \quad , dA = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$$

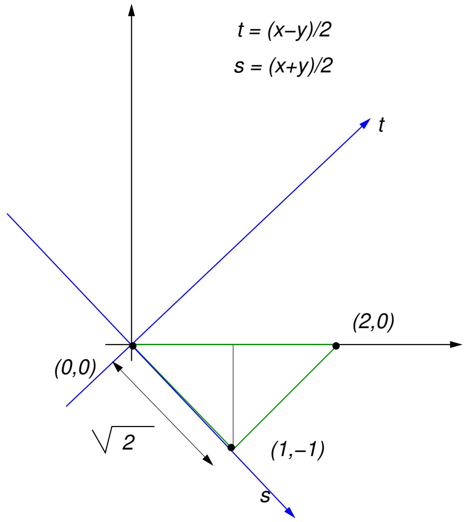
A felület figyelembe véve a határokat:

$$A = \int_0^1 dx \int_{-x}^0 dy \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} + \int_1^2 dx \int_{x-2}^0 \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

vagy

$$A = \int_0^{-1} dy \int_{-y}^{y+2} dx \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

Másik lehetséges paraméterezés:



$$x = t + s\ , \quad y = s - t \qquad ,\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} t+s \\ s-t \\ 4ts \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4s \end{pmatrix} \qquad , \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4t \end{pmatrix}$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \begin{pmatrix} -4(s+t) \\ 4(s-t) \\ 2 \end{pmatrix} dtds \quad ,dA = 2\sqrt{8s^2 + 8t^2 + 1}dtds$$

A felület figyelembe véve a határokat:

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} ds \int_0^s dt 2\sqrt{8s^2 + 8t^2 + 1}$$

(c) Vegyük az egyik előző paraméterezést, pl.:

$$x = t + s\ , \quad y = s - t, \quad \mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} t+s \\ s-t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad dA = 2dtds$$

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} ds \int_0^s dt \int_0^{4ts} 2dz = \int_0^{\sqrt{2}} ds \int_0^s dt 8ts$$

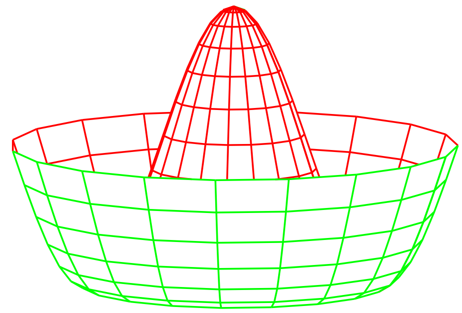
4. **Integrál tételek alkalmazása** 25 pont

(a) Az ábrán látható felületet a következőképpen paraméterezhetjük:

$$x = u\cos(v), \qquad y = u\sin(v), \qquad z = \cos(u)$$

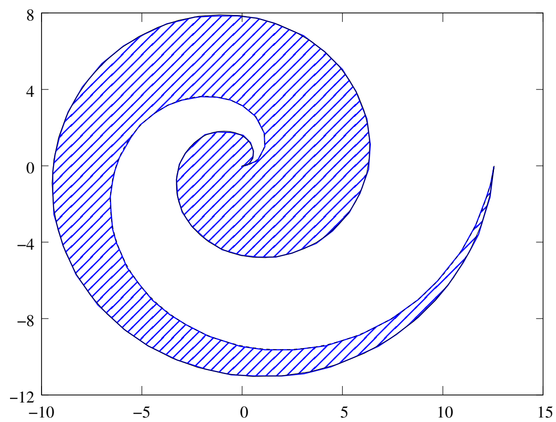
ahol $0 \le u \le 3/2\pi$ és $0 \le v \le 2\pi$. Számítsuk ki a következő vektortér fluxusát a felületen:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix} .$$



(b) Az ábrán látható két spirál egyenlete a következő:

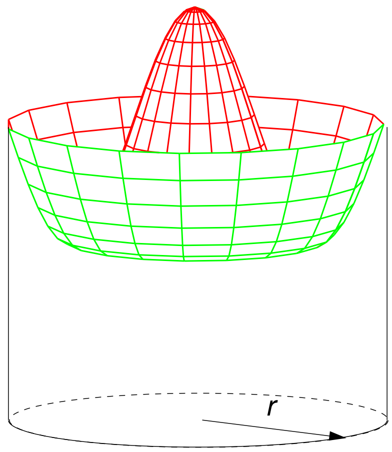
$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi\cos(\varphi) & ,x_2 &= \varphi\cos(2\varphi) \\ y_1 &= \varphi\sin(\varphi) & ,y_2 &= \varphi\sin(2\varphi) \\ \mathbf{r}_1 &= \varphi\mathbf{e}_\rho & ,\mathbf{r}_2 &= \frac{\varphi}{2}\mathbf{e}_\rho\ , \quad \varphi \in [0:4\pi] \end{aligned}$$



Határozzuk meg a két spirál közötti, satírozott tartomány területét! Mi lesz a $\mathbf{V} = \rho\varphi\mathbf{e}_\rho$ vektortér rotációja? A spirál centrumába állított z tengellyel párhuzamos egyenesre mekkora lesz a satírozott terület tehetetlenségi nyomatéka, ha σ a felületi sűrűség? (A tengelytől r távolságra lévő kicsiny m tömeg tehetetlenségi nyomatéka: $\Theta = mr^2$.)

Megoldások:

(a)



Egészítsük ki a felületet az ábra szerint egy zárt felületté. A megadott vektortér divergenciája nulla, így $\int \mathrm{div}\mathbf{E}dV = \int \mathbf{E}d\mathbf{A} = 0$. A szumszédos felület oldalán a vektortér mindenütt merőleges a felületre, ezért csak az alsó körlap és a felső felület ad járulékot a felület integrálhoz, amelyek csak egy előjelben különböznek egymástól. A fluxus az alsó körlapon:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho E_0 e^{-\rho^2} d\rho = \pi E_0 \left(1 - e^{-R^2}\right)$$

Az alap körlap sugara $R = 3/2\pi$, így

$$\Phi = \pi E_0 \left(1 - e^{-\frac{3\pi}{2}^2}\right)$$

(b) Alkalmazzuk a Stokes tételt:

$$\oint \mathbf{V}d\mathbf{r} = \int \mathrm{rot}\mathbf{V}d\mathbf{A}$$

A példában megadott vektortér rotációja:

$$\mathrm{rot}\mathbb{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\mathbf{e}_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho\varphi}{\partial \varphi} = -1\mathbf{e}_z \ ,$$

tehát

$$\oint \mathbf{V}d\mathbf{r} = -\int dA$$

A két csigavonal:

$$\mathbf{r}_1 = \varphi\mathbf{e}_\rho \qquad ,d\mathbf{r} = (\mathbf{e}_\rho + \varphi\mathbf{e}_\varphi)d\varphi$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\varphi}{2}\mathbf{e}_\rho \qquad ,d\mathbf{r} = (\frac{1}{2}\mathbf{e}_\rho + \frac{\varphi}{2}\mathbf{e}_\varphi)d\varphi$$

A körintegrált két részből állíthatjuk elő. Ne feledkezzünk meg arról, hogy a körbejárás miatt a második integrál negativ lesz.

$$\oint \mathbf{V}d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \rho\varphi\mathbf{e}_\rho(\mathbf{e}_\rho + \varphi\mathbf{e}_\varphi)d\varphi - \int_0^{4\pi} \rho\varphi\mathbf{e}_\rho(\frac{1}{2}\mathbf{e}_\rho + \frac{\varphi}{2}\mathbf{e}_\varphi)d\varphi$$

A görbék paraméterezéséből leolvasható, hogy $\rho = \varphi$ az első görbe esetén és $\rho = \varphi/2$ a második görbe esetén:

$$\oint \mathbf{V}d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi - \int_0^{4\pi} \frac{\varphi}{4} d\varphi = \frac{8\pi^3}{3} - \frac{16\pi^3}{3}$$

Tehát a satírozott részterülete:

$$T = \frac{16\pi^3}{3}$$