Első, másod rendű k.d.e. Green függvénye

1. Feladat
   Határozzuk meg a következő elsőrendű k.d.e. Green függvényét és a partikuláris megoldást a következő esetre:

$$\dot{y} + \mathrm{cth}(t)y = \Theta(t)e^{-t}, \qquad\qquad G(0,t') = 0$$

Segítség:

$$\int \mathrm{cth}(x)dx = \ln(|\mathrm{sh}(x)|)$$

A Green függvény $t > 0$ esetére:

$$G(t,t') = \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(t')}\Theta(t-t')$$

A partikuláris megoldás:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_0^\infty G(t,t')f(t')dt' = \int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(t')}\Theta(t-t')e^{-t'}dt' = \mathrm{sh}(t)\int_0^t \frac{e^{-t'}}{\mathrm{sh}(t')}dt' \\ y_p(t) &= \mathrm{sh}(t)\int_0^t \frac{2e^{-t'}}{e^{t'}-e^{-t'}}dt' = \mathrm{sh}(t)\int_0^t \frac{2}{e^{2t'}-1}dt' = \mathrm{sh}(t)\left(\ln(1-e^{2t})-t\right) \end{aligned}$$

2. Feladat
   Határozzuk meg a lenti k.d.e. Green függvényét a $[0, \frac{7}{8}\pi]$ intervallumon a következő homogén feltétel mellett: $G(0,t') = 0$, $G(\frac{7}{8}\pi, t') = 0$.

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 17y = e^{-t}\sin(2t)$$

Segítség:
A két homogén megoldás, amely kielégíti az $y_1(0) = 0$ és $y_2(\frac{7}{8}\pi) = 0$:

$$y_1(t) = e^{-t}\sin(4t), \qquad\qquad y_2(t) = e^{-t}\cos(4t)\ .$$

A Wronski determináns $W(t) = y_1(t)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)y_2(t) = -4e^{-2t}$ A Green fv.

$$G(t,t') = \begin{cases} \frac{y_1(t)y_2(t')}{W(t')} = -\frac{1}{4}e^{t'-t}\sin(4t)\cos(4t') & \text{ha} \quad t < t' \\ \frac{y_2(t)y_1(t')}{W(t')} = -\frac{1}{4}e^{t'-t}\cos(4t)\sin(4t') & \text{ha} \quad t > t' \end{cases}$$

A partikuláris megoldás integrálás után adódik.

3. Feladat

Határozzuk meg az alábbi k.d.e. Green függvényét a $[0, \infty]$ intervallumon a következő homogén feltétel mellett: $G(0, t') = 0$, $G(\infty, t') = 0$.

$$t^2 \ddot{y} - 2y = t^3 e^{-t}$$

Segítség:

Keressük a megoldást $y(t) = t^n$ alakban. A két megoldás $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = 1/t$ lesz. A Wronski determináns: $W(t) = -3$, a Green fv.

$$G(t, t') = \begin{cases} -\frac{t^2 1/t'}{3t'^2} = -\frac{t^2}{3t'^3} & \text{ha} \quad t < t' \\ -\frac{1/pt'^2}{3t'^2} = -\frac{1}{3t} & \text{ha} \quad t > t' \end{cases}$$

$$\int t^3 e^{-t} dt = (t^3 + 3t^2 + 6t + 6)e^{-t}$$