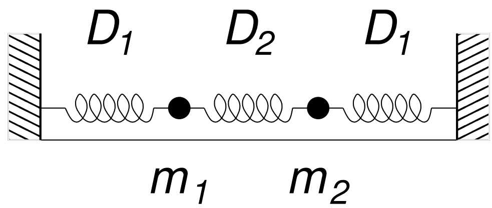
Közönséges Differenciál Egyenletek

1. Feladat
   A csillapított harmonikus oszcillátor mozgás egyenlete a következő:
   $$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - Dx\ .$$
   Írjuk fel a kezdőfeltételeket, ha a rugót a kezdő pillanatban A hosszúsággal megnyújtjuk és elengedjük! Hogyan változik az időben a rendszer energiája?

2. Feladat
   Határozzuk meg az ábrán látható rendszer jellemző frekvenciáit, ha egyensúlyi helyzetben a rugók nyújtatlanok. A testek csak vízszintesen, egy egyenes mentén mozoghatnak súrlódás nélkül!



Megoldás 1.
Először legyenek a tömegek egyformák! A rugók megnyúlása legyen rendre x_1 és x_2. Ekkor a Newton egyenletek a következő alakúek lesznek:
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -D_1x_1 - D_2(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -D_1x_2 - D_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$
Írjuk át az egyenletet mátrix alakba:
$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (D_1+D_2)/m & -D_2/m \\ -D_2/m & (D_1+D_2)/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
A sajátvektorok segítségével transzformáljuk át a mátrixot diagonális mátrixxá és mutassuk meg, hogy az $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$ változókkal szétesik a diff. egyenlet rendszer két független differenciálegyenletre, ahol $\mathbf{U}$ mátrix a sajátvektorokból felépülő mátrix: A diff. egyenlet mátrix jelőléssel:
$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{D}\mathbf{x}$$
ahol
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} (D_1+D_2)/m & -D_2/m \\ -D_2/m & (D_1+D_2)/m \end{pmatrix}$$
Ekkor
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$$
Ezek szerint
$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{D}\mathbf{x} = -\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{U}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$$

Az egyenletet soronkén kiírva:

$$\ddot{\tilde{x}}_1 = -\lambda_1 x_1, \qquad \ddot{\tilde{x}}_2 = -\lambda_2 x_2$$

Megoldás
A különböző tömegű eset nem olyan fontos. A diff. egyenlet:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Új változókat bevezetve: $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1$, $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2$ az egyenlet a következő alakra hozható

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{x}} \ ,$$

ahol

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix}$$

Ez az alak már a szokásos.

3. Feladat
Mi lesz az előző feladat megoldása sebességgel arányos súrlódás esetén?

Megoldás
A differenciálegyenlet ebben az esetben kiegészül a sebességgel arányos súrlódással:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{D_1+D_2}{m_1} & \frac{D_2}{m_1} \\ \frac{D_1}{m_2} & -\frac{D_1+D_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

Keressük a megoldást $\mathbf{u}e^{\gamma t}$ alakban, ahol $\mathbf{u}$ egy kételemű vektor, γ pedig egy komplex szám. Helyettesítsük be a differenciál egyenletbe:

$$\gamma^2 e^{\gamma t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{D_1+D_2}{m_1} & \frac{D_2}{m_1} \\ \frac{D_1}{m_2} & -\frac{D_1+D_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{\gamma t} - \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{m_1}\gamma & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{m_2}\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{\gamma t}$$

A fenti egyenletnek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha a következő mátrixnak eltünik a determinánsa:

$$\begin{vmatrix} \gamma^2 + \frac{D_1+D_2}{m_1} + \frac{\alpha}{m_1}\gamma & -\frac{D_2}{m_1} \\ -\frac{D_1}{m_2} & \gamma^2 + \frac{D_1+D_2}{m_2} + \frac{\alpha}{m_2}\gamma \end{vmatrix} = 0$$

(Ha a mátrix diagonálisait teljes négyzetté alakítjuk γ-ban, akkor megoldható a 4-ed rendű egyenlet.)

4. Feladat

Redükáljuk az

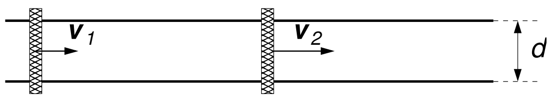
$$\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$$

harmadfokú differenciál egyenletet elsőrendű differenciál sgyenlet rendszerré és keressük meg a sajátértékeit! (Ha jól számoltam: 1, -1, 2) A karakterisztikus polinom: $(\lambda^2-1)(\lambda-2)$. (h.e.n.b.)

$$\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \ddot{x} \end{matrix} \;, \qquad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1.1. Példa

Egy hosszú sínpáron két m tömegű fémrúd csúszhat surlúdás nélkül a sín síkjára merőleges, $\mathbf{B}$ homogén, mágneses térben. A két rúd együttes ellenállása legyen R és a sinek közötti távolság d. Hogyan mozognak a a rudak?



A hurokban indukált feszültség

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -(v_2 - v_1)Bd \ ,$$

melynek hatására $I = U/R$ áram folyik a fémrudak és a sín alkotta hurokban.

A rudakra a sebességükkel ellentétes irányú $F = IdB$ Lorentz erő hat. A mozgásegyenleteket a következő alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\alpha(v_1 - v_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -\alpha(v_2 - v_1) \ , \end{aligned}$$

ahol $\alpha = \frac{d^2B^2}{R}$. A gyorsulásokat fejezzük ki a sebesség deriváltjaként:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_1 &= -\alpha(v_1 - v_2) \\ m\dot{v}_2 &= -\alpha(v_2 - v_1) \ . \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

vektort, ekkor a fenti egyenletet a következőképp írhatjuk fel:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} \tag{1}$$

Megoldás spektrál felbontás segítségével

A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \ ,$$

a két sajátérték tehát $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = -2\alpha/m$. A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A mátrix szimmetrikus, így a jobb és baloldali sajátvektorok megegyeznek. A megoldás a következő lesz:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}(0)) + e^{-\frac{2\alpha}{m}t}\mathbf{u}_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}(0)) \ .$$

A megoldásban szereplő két tagot módusoknak nevezzük. Vizsgáljuk meg a módusok jelentését! Az első módus

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}(0)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} v_{10} + v_{20} \\ v_{10} + v_{20} \end{pmatrix}$$

a tömegközéppont mozgását írja le. Külsö erők hiányában a tömegközéppont egyenletes mozgást végez. A második módus a relatív koordináták sebességét adja meg, amely az idővel exponenciálisan csökken:

$$e^{-\frac{2\alpha}{m}t}\mathbf{u}_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}(0)) = \frac{e^{-\frac{2\alpha}{m}t}}{2}\begin{pmatrix} v_{10} - v_{20} \\ v_{20} - v_{10} \end{pmatrix}$$

Example 2 Solve the following IVP and find the interval of validity for the solution.

$$y' = 5y + \mathbf{e}^{-2x} y^{-2} \qquad\qquad y(0) = 2$$

Solution

The first thing we'll need to do here is multiply through by y^2 and we'll also do a little rearranging to get things into the form we'll need for the linear differential equation. This gives,

$$y^2 y' - 5y^3 = \mathbf{e}^{-2x}$$

The substitution here and its derivative is,

$$v = y^3 \qquad\qquad v' = 3y^2 y'$$

Plugging the substitution into the differential equation gives,

$$\tfrac{1}{3}v' - 5v = \mathbf{e}^{-2x} \qquad \Rightarrow \qquad v' - 15v = 3\mathbf{e}^{-2x} \qquad\qquad \mu(x) = \mathbf{e}^{-15x}$$

We rearranged a little and gave the integrating factor for the linear differential equation solution. Upon solving we get,

$$v(x) = c\mathbf{e}^{15x} - \tfrac{3}{17}\mathbf{e}^{-2x}$$

Now go back to *y*'s.

$$y^3 = c\mathbf{e}^{15x} - \tfrac{3}{17}\mathbf{e}^{-2x}$$

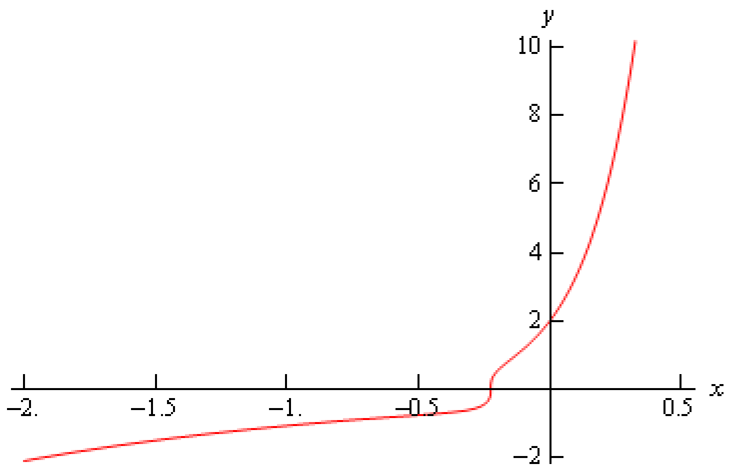
Applying the initial condition and solving for *c* gives,

$$8 = c - \tfrac{3}{17} \qquad \Rightarrow \qquad c = \tfrac{139}{17}$$

Plugging in *c* and solving for *y* gives,

$$y(x) = \left(\frac{139\mathbf{e}^{15x} - 3\mathbf{e}^{-2x}}{17}\right)^{\frac{1}{3}}$$

There are no problem values of *x* for this solution and so the interval of validity is all real numbers. Here's a graph of the solution.



Example 3 Solve the following IVP and find the interval of validity for the solution.

$$6y' - 2y = x\,y^4 \qquad\qquad y(0) = -2$$

Solution

First get the differential equation in the proper form and then write down the substitution.

$$6y^{-4}y' - 2y^{-3} = x \qquad \Rightarrow \qquad v = y^{-3} \qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Plugging the substitution into the differential equation gives,

$$-2v' - 2v = x \qquad \Rightarrow \qquad v' + v = -\tfrac{1}{2}x \qquad \mu(x) = \mathbf{e}^{x}$$

Again, we've rearranged a little and given the integrating factor needed to solve the linear differential equation. Upon solving the linear differential equation we have,

$$v(x) = -\tfrac{1}{2}(x-1) + c\mathbf{e}^{-x}$$

Now back substitute to get back into y's.

$$y^{-3} = -\tfrac{1}{2}(x-1) + c\mathbf{e}^{-x}$$

Now we need to apply the initial condition and solve for c.

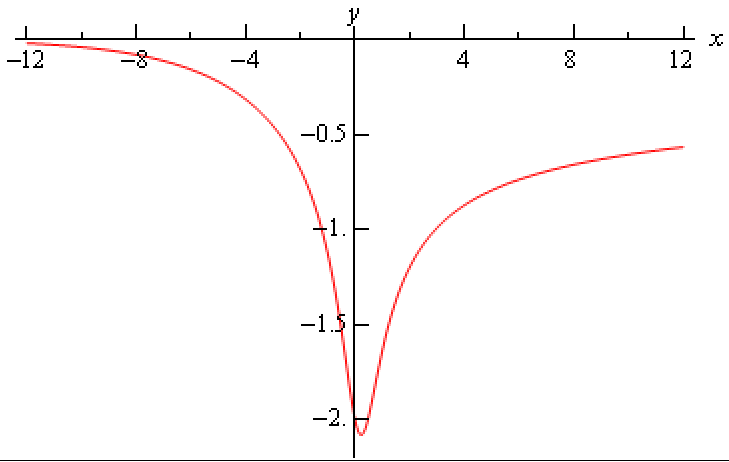
$$-\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = -\tfrac{5}{8}$$

Plugging in c and solving for y gives,

$$y(x) = -\frac{2}{\left(4x - 4 + 5\mathbf{e}^{-x}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Next, we need to think about the interval of validity. In this case all we need to worry about it is division by zero issues and using some form of computational aid (such as Maple or Mathematica) we will see that the denominator of our solution is never zero and so this solution will be valid for all real numbers.

Here is a graph of the solution.



To this point we've only worked examples in which n was an integer (positive and negative) and so we should work a quick example where n is not an integer.

Example 4 Solve the following IVP and find the interval of validity for the solution.

$$y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0 \qquad\qquad y(1) = 0$$

Solution

Let's first get the differential equation into proper form.

$$y' + \frac{1}{x}y = y^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad y^{-\frac{1}{2}}y' + \frac{1}{x}y^{\frac{1}{2}} = 1$$

The substitution is then,

$$v = y^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad v' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$$

Now plug the substitution into the differential equation to get,

$$2v' + \frac{1}{x}v = 1 \qquad \Rightarrow \qquad v' + \frac{1}{2x}v = \frac{1}{2} \qquad\qquad \mu(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

As we've done with the previous examples we've done some rearranging and given the integrating factor needed for solving the linear differential equation. Solving this gives us,

$$v(x) = \tfrac{1}{3}x + cx^{-\frac{1}{2}}$$

In terms of *y* this is,

$$y^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}x + cx^{-\frac{1}{2}}$$

Applying the initial condition and solving for *c* gives,

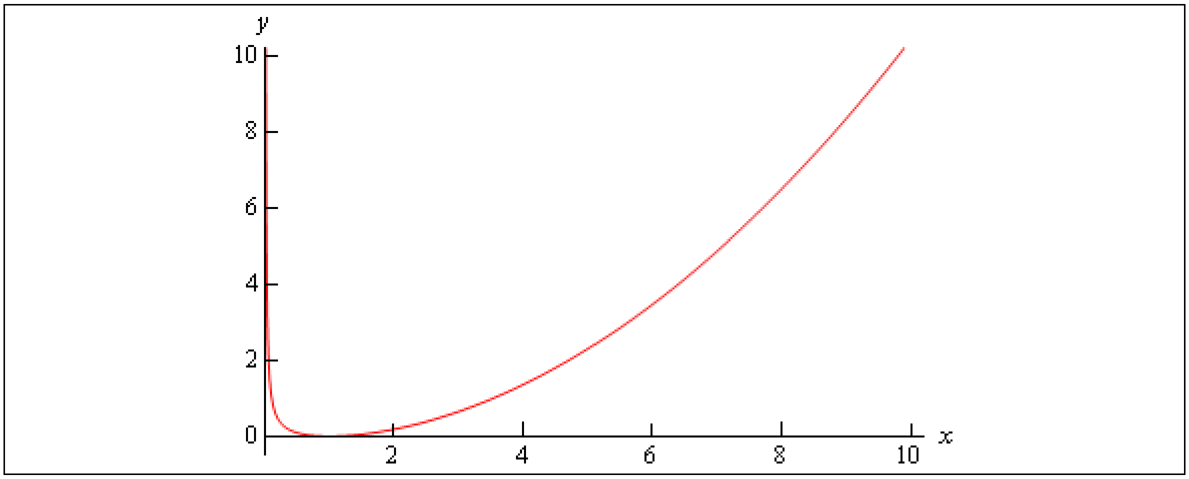
$$0 = \tfrac{1}{3} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = -\tfrac{1}{3}$$

Plugging in for *c* and solving for *y* gives us the solution.

$$y(x) = \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{x^3 - 2x^{\frac{3}{2}} + 1}{9x}$$

Note that we multiplied everything out and converted all the negative exponents to positive exponents to make the interval of validity clear here. Because of the root (in the second term in the numerator) and the *x* in the denominator we can see that we need to require $x > 0$ in order for the solution to exist and it will exist for all positive *x*'s and so this is also the interval of validity.

Here is the graph of the solution.


y
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
x