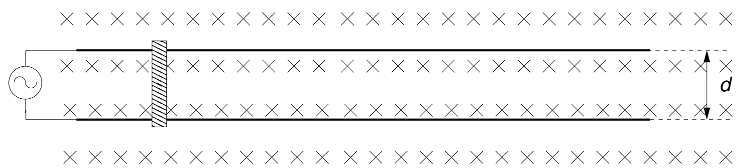
1. Gyakorlat

1. Egy m tömegű, R ellenállású fém rúd egy hosszú sínen mozoghat súrlódás nélkül a sín síkjára merőleges homogén mágneses térben. A sín ellenállása elhanyagolható. A sínpár egyik végére időben változó $V(t)$ feszültséget kapcsolunk. Hogyan fog mozogni a sínen a rúd?



Legyen a sínpárra kapcsolt feszültség $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ alakú. A Faraday törvény értelmében az indukált feszültség: $V = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, ahol Φ mágneses tér fluxusát jelőli. A mi esetünkben: $\Phi = Bxd$, ahol x a rúd elmozdulását jelöli. Ekkor az indukélt feszültség $V = Bdv$, ahol $v = \dot{x}$, a rúd sebessége. A rúdra ható erő a Lorentz erő: $\mathbf{F} = I\,\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ melynek nagysága az esetünkben $F = IBd$. Írjuk fel a hurok törvényt és a Newton egyenletet a rúdra:

$$V_0 \sin(\omega t) - Bdv = IR, \qquad\qquad IBd = m\dot{v}\ .$$

Vonjuk össze a két egyenletet:

$$\frac{mR}{Bd}\dot{v} + Bdv = V_0 \sin(\omega t)\ ,$$

$$\dot{v} + \frac{B^2 d^2}{mR} v = \frac{V_0 Bd}{mR} \sin(\omega t)\ .$$

Vezessük be az $\alpha = \dfrac{B^2 d^2}{mR}$ és $\beta = \dfrac{V_0 Bd}{mR}$ változókat. Az új változókkal kapott alakot vessük össze az előadáson tanult formával:

$$\dot{v} + \alpha v = \beta \sin(\omega t) \qquad \leftrightarrow \qquad \dot{v} + p(t)v = q(t)$$

Az ilyen típusú k.d.e esetén kövessük a megoldási sémát:

$$u(t) = e^{\int p(t)dt}, \qquad\qquad u(t) = e^{\alpha t}$$

$$v(t) = \frac{1}{u}\int u(t)q(t)dt + \frac{C}{u}, \qquad\qquad v(t) = e^{-\alpha t}\int \beta e^{\alpha t}\sin(\omega t)dt + Ce^{-\alpha t}$$

$$\int e^{\alpha t}\sin(\omega t)dt = \frac{1}{2i}\int \left(e^{(\alpha+i\omega)t} - e^{(\alpha-i\omega)t}\right)dt = e^{\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\cos(\omega t)\right)$$

Tehát a megoldás:

$$v(t) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{\omega\beta}{\alpha^2+\omega^2}\cos(\omega t) + Ce^{-\alpha t}$$

2. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$\begin{aligned} &\text{a.)} \quad y' = \ln(x)y \\ &\text{b.)} \quad y' - \frac{2y}{x} = 0 \end{aligned}$$

3. An integrating factor is any expression that a differential equation is multiplied by to facilitate integration and is not restricted to first order linear equations. For example, the nonlinear second order equation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Ay^{2/3}$$

admits $\frac{dy}{dt}$ as an integrating factor:

$$\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} = Ay^{2/3}\frac{dy}{dt}.$$

To integrate, note that both sides of the equation may be expressed as derivatives by going backwards with the [[chain rule]]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = \frac{d}{dt}\left(A\frac{3}{5}y^{5/3}\right).$$

Therefore

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{6A}{5}y^{5/3} + C_0.$$

This form may be more useful, depending on application. Performing a separation of variables will give:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{6A}{5}y^{5/3} + C_0}} = t + C_1;$$

this is an implicit solution which involves a nonelementary integral. Though likely too obscure to be useful, this is a general solution. Also, because the previous equation is first order, it could be used for numeric solution in favor of the original equation.

4. Határozzuk meg a következő kezdetiérték probléma megoldását:

$$t\dot{y} + 2y = t^2 - t + 1, \qquad\qquad y(1) = \frac{1}{2}$$

(Dowkins könyv 37. oldal)
Vegyük észre, hogy az egyenlet átírható a

$$\frac{d}{dt}(t^2 y) = t^3 - t^2 + t$$

alakba.

5. Határozzuk meg a következő kezdetiérték probléma megoldását (Dowkins: 44. old.):

$$\dot{y} = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y - 4}, \qquad\qquad y(1) = 3$$

6. Bolygómozgás
Egy rendszer energiáját 2D polárkoordinátákban a következőképpen tudjuk megadni:

$$E = \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} - \frac{\alpha}{r}\ .$$

Határozzuk meg a rendszer $r(\varphi)$ pályáját!