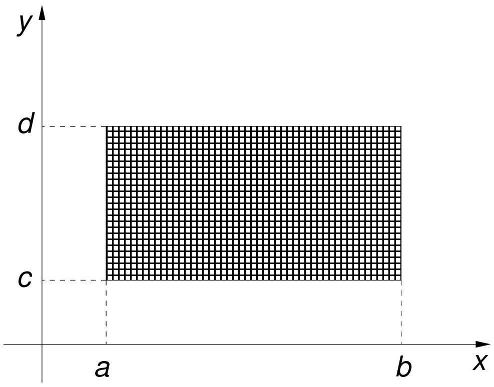
Többdimenziós integrálok

Integrál téglalap alakú tartományon



Az $I = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$ integrált

két egymás utáni integrállal végezhetjük el:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx \ , \quad I = \int_c^d F(y)dy \ .$$

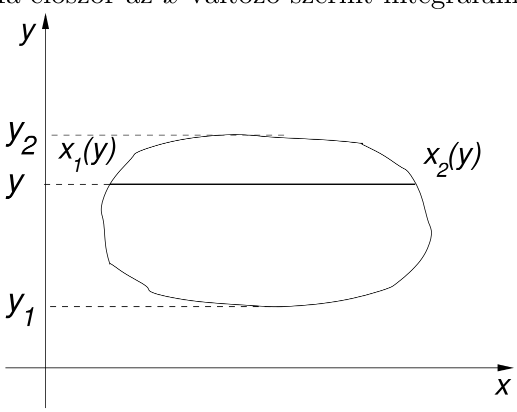
Példaként határozzuk meg egy téglalap tömegközéppontját, amelynek a sűrűségét a következőképpen adhatjuk meg: $\rho(x,y) = \alpha x + \rho_0$. A téglalap két különböző oldalának a hossza legyen a és b.

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^b \int_0^a (\alpha x + \rho_0)dxdy = \int_0^b a(\alpha x + \rho_0)dx = \frac{1}{2}a\alpha b^2 + a\rho_0 b = ab(\frac{1}{2}a\alpha + \rho_0) \\
XM &= \int_0^b \int_0^a (\alpha x + \rho_0)xdxdy = \int_0^b a(\alpha x + \rho_0)xdx = \frac{1}{3}a\alpha b^3 + \frac{1}{2}a\rho_0 b^2 = ab^2(\frac{1}{3}a\alpha + \frac{1}{2}\rho_0) \\
YM &= \int_0^b \int_0^a (\alpha x + \rho_0)ydxdy = \int_0^b \frac{1}{2}a^2(\alpha x + \rho_0)dx = \frac{1}{2}a^2(\frac{1}{2}ab\alpha + b\rho_0) \\
X &= \frac{b}{3}\frac{2a\alpha + 3\rho_0}{a\alpha + 2\rho_0} \ , \quad Y = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Integrál tetszőleges alakú tartományon

Tetszőleges tartományon is az előzőekhez hasonlóan, két egymás utáni integrállal végezhetjük el a műveletet, de ebben az esetben az első integrál határai is függeni fognak a másik változótól.

Ha először az x változó szerint integrálunk:

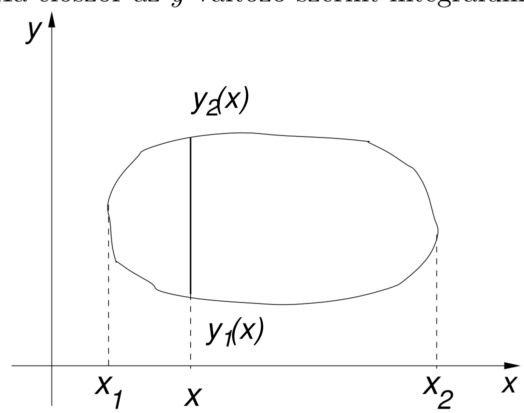


$$\int_T f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2} F(y)dy$$

ahol

$$F(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\ .$$

Ha először az y változó szerint integrálunk:



$$\int_T f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2} F(x)dx$$

ahol

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\ .$$

A két integrálnak természetesen meg kell egyeznie!

Határozzuk meg egy ellipszis területét!

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

A kérdéses területre fennáll a következő feltétel:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$$

A tartomány határán az egyenlőség teljesül. Az y változók nyilvánvalóan $-b$ és b között változhatnak, míg az x változó határára a következő egyenlet érvényes:

$$-f(y) = -a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \leq x \leq a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2} = f(y)$$

$$T = \int_{-b}^{b} dy \int_{-f(y)}^{f(y)} dx = \int_{-b}^{b} 2a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2} dy$$

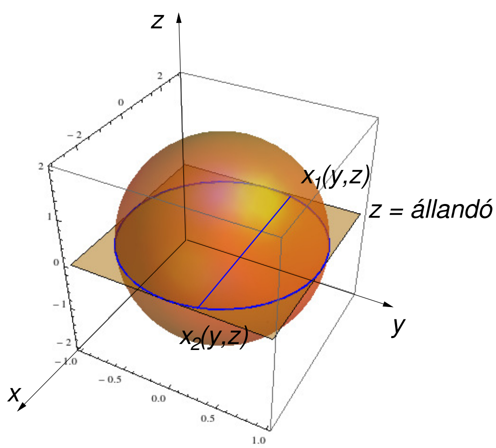
Az integrál meghatározásához használjuk a $y = b\sin(\varphi)$ helyettesítést. Ekkor $dy = b\cos(\varphi)$, az integrál pedig a következő lesz:

$$T = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(\varphi)d\varphi = ab\pi\ .$$

Természetesen fordított sorrendben is elvégezhettük volna az integrálást, ekkor, természetesen, azintegrálási határok is változtak volna, de a végeredmény változatlan marad.

3D integrálok

A két domenziós integrálokhoz hasonlóan három dimenzióban háromszor kell integrálnunk az egyes Descartes koordináták szerint.



Először rögzítjük y és z értékét és integrálunk az x változó szerint:

$$F(y,z) = \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx\ ,$$

így egy kétváltozós függvényt kapunk, amelyet az előzőekhez hasonlóan integrálhatunk. Összefoglalva:

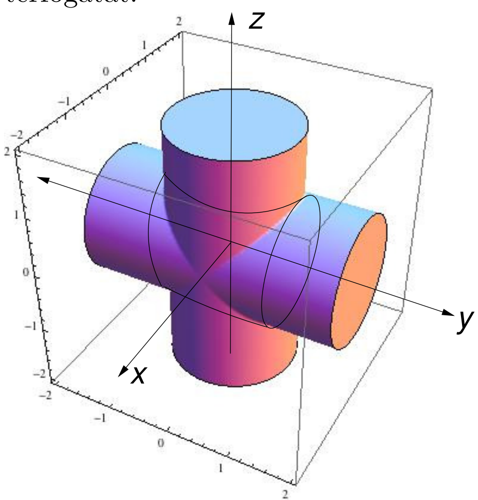
$$I = \int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1(z)}^{y_2(y)}\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}$$

Az eljárást kiterjeszthetjük tetszőleges dimenzióra! Egy tipikus példa hat dimenziós integrálra egy $\rho(\mathbf{r})$ töltésfelhő energiájának a meghatározása:

$$E = \frac{1}{2}\int\frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}d\mathbf{r}_1^3 d\mathbf{r}_2^3\ ,$$

ahol a $d\mathbf{r}^3 = dxdydz$ jelölést használtuk.

Határozzuk meg két R sugarú, egymásra merőleges tengelyű henger közös részének a térfogatát!



A hengerek tengelyei essenek egybe az y és z temgelyekkel. Ebben az esetben a két henger egyenlete a következő lesz:

$$R^2 = x^2 + y^2, \qquad R^2 = x^2 + z^2$$

A két henger közös részére a következő két feltételnek kell teljesülnie.

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \qquad x^2 + z^2 \leq R^2$$

A térfogat meghatározásához integráljuk az $f(x, y, z) \equiv 1$ függvényt!

Rögzítsük x és y értékét úgy, hogy eleget tegyenek az előző feltételeknek és integráljunk z szerint:

$$I_1(x, y) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

Második lépésként integráljuk az $I_1(x, y)$ függvényt az y változó szerint figyelembe véve a határokra vonatkozó feltételt:

$$I_2(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2 - x^2} dy = 4\left(R^2 - x^2\right)$$

Végül integráljunk $-R$-től R-ig:

$$V = \int_{-R}^{R} 4\left(R^2 - x^2\right) dx = \frac{16}{3} R^3$$

Többdimenziós integrálok polár és gömbi koordináta rendszerekben

Az integrálokat gyakran kényelmesebb polár vagy gömbi koordinátákban számítani, gondoljunk csak pl. a kőr területének a kiszámítására. Hogyan térhetünk át Descartes koordinátákról polár koordinátákra? Először vizsgáljuk meg a 2D polár koordináták esetét! Ebben az esetben az a feladatunk, hogy a kis dx, dy, egymásra merőleges elmozdulások által kifeszített négyzet területét meghatározzuk az r, φ polár koordináták segítségével.

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \end{aligned}$$

A dx,dy elmozdulásokat a sebességekből kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{dt}dt = \left(\frac{dr}{dt}\cos(\varphi) - \frac{d\varphi}{dt}r\sin(\varphi)\right)dt = dr\cos(\varphi) - rd\varphi\sin(\varphi) \\ dy &= \frac{dy}{dt}dt = \left(\frac{dr}{dt}\sin(\varphi) + \frac{d\varphi}{dt}r\cos(\varphi)\right)dt = dr\sin(\varphi) + rd\varphi\cos(\varphi) \end{aligned}$$

Írjuk fel az előző egyenletet az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ x és y tengelyekkel párhuzamos egység vektorok és az $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, az előzőekben bevezetett egységvektorok segítségével:

$$\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\varphi r d\varphi$$

A dx, dy, egymásra merőleges elmozdulások által kifeszített négyzet területét a polár koordináták segítségével egyszerűen felírhatjuk:

$$dxdy = rdrd\varphi \ .$$

Gömbi koordináta rendszerben hasonlóan járhatunk el:

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx &= dr\sin(\vartheta)\cos(\varphi) + r\cos(\vartheta)\cos(\varphi)d\vartheta - r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)d\varphi \\ dy &= dr\sin(\vartheta)\sin(\varphi) + r\cos(\vartheta)\sin(\varphi)d\vartheta + r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)d\varphi \\ dz &= dr\cos(\vartheta) - r\sin(\vartheta)d\vartheta \end{aligned}$$

Az előző esethez hasonlóan írjuk fel az infinitezimális tartományt az egységvektorok segítségével:

$$\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\vartheta r d\vartheta + \mathbf{e}_\varphi r\sin(\vartheta)d\varphi \ .$$

Az infinitezimális térfogat elemet egyszerűen kifejezhetjük a gömbi változókkal:

$$dxdydz = r^2\sin(\vartheta)drd\vartheta d\varphi \ .$$

Általánosságban ha az i-dik Descartes koordinátát az $r_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ függvénnyel adjuk meg, amelyben $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ az új koordináták, akkor a térfogat elemet kifeszítő három vektort ezek parciális deriváltjaival állíthatjuk elő:

$$\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz = \mathbf{a}_1 d\zeta_1 + \mathbf{a}_2 d\zeta_2 + \mathbf{a}_3 d\zeta_3 \ ,$$

ahol $\mathbf{a}_i = \left(\frac{\partial r_1}{\partial \zeta_i}, \frac{\partial r_2}{\partial \zeta_i}, \frac{\partial r_3}{\partial \zeta_i}\right)^t$. A térfogat elem az $\mathbf{a}_i$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata lesz $d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$ szorzattal beszorozva. A paralelepipedon térfogata nyilvánvalóan a három vektorból képzett 3×3-as mátrix determinánsával, az úgy nevezett Jacobi-determinánssal egyezik meg.