Név:

Számítási Módszerek a Fizikában 1. ZH

---

1. **Fourier-transzformáció:** **(30 pont)**
   Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-transzformáltját!
   (a) $f_a(t) = \sin(t)$
   (b) $f_b(t) = \sin(bt)$
   (c) $f_c(t) = a\sin(bt)$
   (d) $f_d(t) = a\sin(bt + \phi)$
   (e) $f_e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases}$

2. **Első rendű differenciálegyenlet:** **(30 pont)**
   Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:
   $$\dot{y} + \mathrm{th}(t)y = e^{-t}\Theta(t)$$
   (a) Adjuk meg az egyenlet homogén megoldását!
   (b) Adjuk meg a megoldást $y(0)$=1 kezdőfeltétel esetén!
   (c) Határozzuk meg az egyenlet Green függvényét!
   (d) Adjuk meg az egyenlet partikuláris megoldását a Green függvény segítségével!

3. **Másod rendű differenciálegyenlet:** **(30 pont)**
   Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:
   $$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$$
   (a) Adjuk meg az egyenlet homogén megoldásait!
   (b) Adjuk meg a megoldást $y(0)$=1, $\dot{y}(0) = 1$ kezdőfeltételek esetén!
   (c) Írjuk fel a differenciálegyenletet Fourier térben!
   (d) Határozzuk meg az egyenlet Green függvényét Fourier térben!

4. **Tekintsük a következő differenciálegyenletet:** **(30 pont)**
   $$\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f(x) \;\; x \geq 0$$
   (a) Határozzuk meg azt a két lineárisan független homogén megoldást, amely eltünik az origóban és amelyek véges értéket vesz fel az origóban!
   (b) Mi lesz a Wronski determináns?
   (c) Határozzuk meg a $G(0, x') = 0$ feltétel mellet a differenciálegyenlet Green függvényét!
   (d) Mi lesz a partikuláris megoldás az $g(x) = e^{-x}$ inhomogén tag esetén?

5. **Fourier-transzformáció:** **(30 pont)**
   Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-transzformáltját!

(a) $f_a(t) = e^{-t^2}$

(b) $f_b(t) = e^{-at^2}$

(c) $f_c(t) = ae^{-t^2}$

(d) $f_d(t) = ae^{-(t-\tau)^2}$

(e) $f_e(t) = \begin{cases} 0 & t < -\pi \\ 1 + cos(t) & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$

6. **Első rendű differenciálegyenlet:** **(30 pont)**

(a) Egy tömegpontot állandó P teljesítménnyel gyorsítunk. Hogyan változik a sebessége az időben, ha kezdetben nyugalomban volt?

(b) Hogyan változik a megoldás, ha egy sebességgel arányos surlódás is fellép a mozgás során? Mekkora lesz ekkor a maximális elérhető sebesség?

(c) A surlódásos esetben határozzuk meg a sebesség négyzetére vonatkozó differenciálegyenlet Green függvényét!

(d) Adjuk meg az egyenlet partikuláris megoldását a Green függvény segítségével is!

Segítség: A Newton egyenlet: $m\ddot{x} = F$. A teljesítmény: $P = F\dot{x}$. A súrlódási erő: $F_s = -\alpha\dot{x}$.

7. **Másod rendű differenciálegyenlet:** **(30 pont)**

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

(a) Adjuk meg az egyenlet homogén megoldásait!

(b) Adjuk meg a megoldást $y(0)$=1, $\dot{y}(0) = 1$ kezdőfeltételek esetén!

(c) Határozzuk meg a Green függvényt a $G(0, t') = 0$, $G(\infty, t') = 0$ feltételek esetén! Válasszuk a legegyszerűbb homogén megoldásokat, amelyek kielégítik a határfeltételeket!

(d) Mi lesz a partikuláris megoldás a következő gerjesztés esetén:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = f(t), \qquad f(t) = t\Theta(t)\Theta(\tau - t)$$

8. **Tekintsük a következő differenciálegyenletet:** **(30 pont)**

$$\ddot{y} + aty + by = 0$$

(a) Írjuk fel y Fourier transzformáltjára a differenciálegyenletet!

(b) Mi lesz y Fourier transzformáltja? (Oldjuk meg a differenciálegyenletet!)

9. **Fourier-transzformáció:** **(30 pont)**
Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-transzformáltját!

(a) $f_a(t) = e^{-t^2}$

(b) $f_b(t) = e^{-at^2}$

(c) $f_c(t) = ae^{-t^2}$

(d) $f_d(t) = ae^{-(t-\tau)^2}$

(e) $f_e(t) = \begin{cases} 0 & t < -\pi \\ 1 + cos(t) & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$

10. **Első rendű differenciálegyenlet:** **(30 pont)**

(a) Egy tömegpontot állandó P teljesítménnyel gyorsítunk. Hogyan változik a sebessége az időben, ha kezdetben nyugalomban volt?

(b) Hogyan változik a megoldás, ha egy sebességgel arányos surlódás is fellép a mozgás során? Mekkora lesz ekkor a maximális elérhető sebesség?

(c) A surlódásos esetben határozzuk meg a sebesség négyzetére vonatkozó differenciálegyenlet Green függvényét!

(d) Adjuk meg az egyenlet partikuláris megoldását a Green függvény segítségével is!

Segítség: A Newton egyenlet: $m\ddot{x} = F$. A teljesítmény: $P = F\dot{x}$. A súrlódási erő: $F_s = -\alpha\dot{x}$.

11. **Másod rendű differenciálegyenlet:** **(30 pont)**
Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

(a) Adjuk meg az egyenlet homogén megoldásait!

(b) Adjuk meg a megoldást $y(0)$=1, $\dot{y}(0) = 1$ kezdőfeltételek esetén!

(c) Határozzuk meg a Green függvényt a $G(0, t') = 0$, $G(\infty, t') = 0$ feltételek esetén! Válasszuk a legegyszerűbb homogén megoldásokat, amelyek kielégítik a határfeltételeket!

(d) Mi lesz a partikuláris megoldás a következő gerjesztés esetén:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = f(t), \qquad f(t) = t\Theta(t)\Theta(\tau - t)$$

12. **Tekintsük a következő differenciálegyenletet:** **(30 pont)**

$$\ddot{y} + aty + by = 0$$

   (a) Írjuk fel y Fourier transzformáltjára a differenciálegyenletet!

   (b) Mi lesz y Fourier transzformáltja? (Oldjuk meg a differenciálegyenletet!)

13. **Fourier-transzformáció:** Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-transzformáltját! **(35 pont)**

   (a) $f_a(t) = \sin(t)$

   (b) $f_b(t) = \sin(bt)$

   (c) $f_c(t) = a\sin(bt)$

   (d) $f_d(t) = a\sin(bt + \phi)$

   (e) $f_e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases}$

   (f) $f_f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t}\sin(bt) & t \geq 0 \end{cases}$

14. **Differenciálegyenlet:** Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet: **(35 pont)**

$$\ddot{x} + \alpha x = 0$$

   (a) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

   (b) Adjuk meg a megoldást $x(0)$=0, $\dot{x}(0) = 1$ esetén!

   (c) Diszkutáljuk az eredményt α pozitív és negatív értéke esetén!

   (d) Adjuk meg az $\ddot{x}+\alpha x = F$ egyenlet partikuláris megoldását, F konstans esetén!

   (e) Adjuk meg az $\ddot{x}+\alpha x = a\exp(-bt)$ teljes megoldását $x(0)$=0 és $\dot{x}(0)$=0 kezdőfeltételekkel!

15. **Green-függvény, t térben** **(30 pont)**

   (a) Mi az $\dot{x} + \beta x = 0$ egyenlet Green-függvénye?

   (b) Mi a válasz az $f_1(t) = at + b$ gerjesztésre?

   (c) Mi a válasz az $f_2(t)$ gerjesztésre?

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{egyébkent} \end{cases}$$

16. **Green-függvény, Fourier-térben** **(20 pont)**

   (a) Mi az $\dot{x} + \beta x = 0$ egyenlet $G(\omega)$ Green-függvénye?

   (b) Mi a válasz Fourier transzformáltja $f_b(t) = a\sin(bt)$ gerjesztésre?

17. **Fourier transzformáció:** **(25 pont)**

   a) Egy jelet kis ideig bekapcsolunk. Számoljuk ki az alábbi függvény Fourier-transzformáltját!

$$f_1(t) = \Theta(t)\Theta(2-t), \qquad f_2(t) = \Theta(t+2)\Theta(t)$$

   Hogyan kaphatjuk meg az $f_2(t)$ függvényt az $f_1(t)$ függvényből?

c) Számoljuk ki a az alábbi függvény Fourier-transzformáltját! (Használjuk a szorzat szabályt!)

$$f_3(t) = \Theta(t+2)\Theta(t)\cos(\pi t)$$

18. **Feladat:** Differenciálegyenletek **(25 pont)**

a) Határozzuk meg az alábbi elsőrendű differenciálegyenlet megoldását $y(0) = 1$ feltétel mellett:

$$\dot{y} = \sin(\omega t) y^2$$

b) Mi lesz a megoldása a következő homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek $y(0)$=1, $y(1)$=1 feltételek mellett!

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0\ . \tag{1}$$

Írjuk fel a karakterisztikus eyenletet! Hágy gyöke lesz az egyenletnek?

c) Határozzuk meg a következő inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldását $y(0) = 0$ kezdőfeltétel esetén:

$$\dot{y} + \sin(\omega t) y = \sin(\omega t)$$

19. **Feladat:** Green-függvény Fourier-tér: **(25 pont)**

a) Fourier-térben határozzuk meg az 1 számú differenciálegyenlet Green-függvényét!

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$$

b) Adjuk meg a partikuláris megoldás Fourier transzformáltját az előző differenciálegyenletnek ha a gerjesztés $\cos(\omega_0 t)$ alakú!

c)* Transzformáljuk vissza normál t térbe a kapott megoldást!

20. **Feladat:** Green-függvény normál-tér: **(25 pont)**

a) Határozzuk meg a

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$$

differenciálegyenlet Green-függvényét normál t-térben! Figyeljünk a kauzalitásra! Milyen peremfeltételeket kell használnunk?

b) Határozzuk meg a partikuláris megoldást az alábbi gerjesztésre, Green-függvény segítségével:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t}$$

Képletgyűjtemény:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$$u(t) = e^{\int f(\tau) d\tau} \qquad ,y(t) = \frac{1}{u} \int u(t')g(t')dt' + \frac{C}{u}$$

$$G(t,t') = e^{\int_{t'}^{t} f(\tau)d\tau} \Theta(t-t')$$

$$ch(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \qquad sh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\ln(ch(t)) = th(t) \qquad ,th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

$$G(t,t') = \frac{y_1(t)y_2(t')}{W(t)}\Theta(t'-t) + \frac{y_1(t')y_2(t)}{W(t)}\Theta(t-t') \qquad ,W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$