

Név:

Számítási Módszerek a Fizikában 1. ZH

1. **Fourier-transzformáció:** (30 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-transzformáltját!

(a) $f_a(t) = \sin(t)$

(b) $f_b(t) = \sin(bt)$

(c) $f_c(t) = a \sin(bt)$

(d) $f_d(t) = a \sin(bt + \phi)$

(e) $f_e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases}$

2. **Első rendű differenciálegyenlet:** (30 pont)

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$\dot{y} + \tanh(t)y = e^{-t}\Theta(t)$$

(a) Adjuk meg az egyenlet homogén megoldását!

(b) Adjuk meg a megoldást $y(0)=1$ kezdőfeltétel esetén!

(c) Határozzuk meg az egyenlet Green függvényét!

(d) Adjuk meg az egyenlet partikuláris megoldását a Green függvény segítségével!

3. **Másod rendű differenciálegyenlet:** (30 pont)

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$$

(a) Adjuk meg az egyenlet homogén megoldásait!

(b) Adjuk meg a megoldást $y(0)=1$, $\dot{y}(0) = 1$ kezdőfeltételek esetén!

4. **Tekintsük a következő differenciálegyenletet:** (30 pont)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f(x) \quad x \geq 0$$

(a) Határozzuk meg azt a két lineárisan független homogén megoldást, amely eltűnik az origóban és amelyek véges értéket vesz fel az origóban!

(b) Mi lesz a Wronski determináns?

(c) Határozzuk meg a $G(0, x') = 0$ feltétel mellett a differenciálegyenlet Green függvényét!

(d) Mi lesz a partikuláris megoldás az $g(x) = e^{-x}$ inhomogén tag esetén?

5. **Fourier-transzformáció:** (30 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-transzformáltját!

(a) $f_a(t) = e^{-t^2}$

(b) $f_b(t) = e^{-at^2}$

$$(c) f_c(t) = ae^{-t^2}$$

$$(d) f_d(t) = ae^{-(t-\tau)^2}$$

$$(e) f_e(t) = \begin{cases} 0 & t < -\pi \\ 1 + \cos(t) & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

6. Első rendű differenciálegyenlet:

(30 pont)

- (a) Egy tömegpontot állandó P teljesítménnyel gyorsítunk. Hogyan változik a sebessége az időben, ha kezdetben nyugalomban volt?
- (b) Hogyan változik a megoldás, ha egy sebességgel arányos surlódás is fellép a mozgás során? Mekkora lesz ekkor a maximális elérhető sebesség?
- (c) A surlódásos esetben határozzuk meg a sebesség négyzetére vonatkozó differenciálegyenlet Green függvényét!
- (d) Adjuk meg az egyenlet partikuláris megoldását a Green függvény segítségével is!

Segítség: A Newton egyenlet: $m\ddot{x} = F$. A teljesítmény: $P = F\dot{x}$. A súrlódási erő: $F_s = -\alpha\dot{x}$.

7. Másod rendű differenciálegyenlet:

(30 pont)

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

- (a) Adjuk meg az egyenlet homogén megoldásait!
- (b) Adjuk meg a megoldást $y(0)=1$, $\dot{y}(0) = 1$ kezdőfeltételek esetén!
- (c) Határozzuk meg a Green függvényt a $G(0, t') = 0$, $G(\infty, t') = 0$ feltételek esetén! Válasszuk a legegyszerűbb homogén megoldásokat, amelyek kielégítik a határfeltételeket!
- (d) Mi lesz a partikuláris megoldás a következő gerjesztés esetén:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = f(t), \quad f(t) = t\Theta(t)\Theta(\tau - t)$$

8. Fourier-transzformáció:

(30 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-transzformáltját!

$$(a) f_a(t) = e^{-t^2}$$

$$(b) f_b(t) = e^{-at^2}$$

$$(c) f_c(t) = ae^{-t^2}$$

$$(d) f_d(t) = ae^{-(t-\tau)^2}$$

$$(e) f_e(t) = \begin{cases} 0 & t < -\pi \\ 1 + \cos(t) & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

9. Első rendű differenciálegyenlet:**(30 pont)**

- (a) Egy tömegpontot állandó P teljesítménnyel gyorsítunk. Hogyan változik a sebessége az időben, ha kezdetben nyugalomban volt?
- (b) Hogyan változik a megoldás, ha egy sebességgel arányos surlódás is fellép a mozgás során? Mekkora lesz ekkor a maximális elérhető sebesség?
- (c) A surlódásos esetben határozzuk meg a sebesség négyzetére vonatkozó differenciálegyenlet Green függvényét!
- (d) Adjuk meg az egyenlet partikuláris megoldását a Green függvény segítségével is!

Segítség: A Newton egyenlet: $m\ddot{x} = F$. A teljesítmény: $P = F\dot{x}$. A súrlódási erő: $F_s = -\alpha\dot{x}$.

10. Másod rendű differenciálegyenlet:**(30 pont)**

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

- (a) Adjuk meg az egyenlet homogén megoldásait!
- (b) Adjuk meg a megoldást $y(0)=1$, $\dot{y}(0) = 1$ kezdőfeltételek esetén!
- (c) Határozzuk meg a Green függvényt a $G(0, t') = 0$, $G(\infty, t') = 0$ feltételek esetén! Válasszuk a legegyszerűbb homogén megoldásokat, amelyek kielégítik a határfeltételeket!
- (d) Mi lesz a partikuláris megoldás a következő gerjesztés esetén:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = f(t), \quad f(t) = t\Theta(t)\Theta(\tau - t)$$

11. Fourier-transzformáció: Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-transzformáltját!
(35 pont)

- (a) $f_a(t) = \sin(t)$
- (b) $f_b(t) = \sin(bt)$
- (c) $f_c(t) = a \sin(bt)$
- (d) $f_d(t) = a \sin(bt + \phi)$
- (e) $f_e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases}$
- (f) $f_f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} \sin(bt) & t \geq 0 \end{cases}$

12. Differenciálegyenlet: Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:**(35 pont)**

$$\ddot{x} + \alpha x = 0$$

- (a) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!
- (b) Adjuk meg a megoldást $x(0)=0$, $\dot{x}(0) = 1$ esetén!

- (c) Diszkutáljuk az eredményt α pozitív és negatív értéke esetén!
- (d) Adjuk meg az $\ddot{x} + \alpha x = F$ egyenlet partikuláris megoldását, F konstans esetén!
- (e) Adjuk meg az $\ddot{x} + \alpha x = a \exp(-bt)$ teljes megoldását $x(0)=0$ és $\dot{x}(0)=0$ kezdőfeltételekkel!

13. **Green-függvény, t térben** (30 pont)

- (a) Mi az $\dot{x} + \beta x = 0$ egyenlet Green-függvénye?
- (b) Mi a válasz az $f_1(t) = at + b$ gerjesztésre?
- (c) Mi a válasz az $f_2(t)$ gerjesztésre?

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

14. **Fourier transzformáció:** (25 pont)

- a) Egy jelet kis ideig bekapcsolunk. Számoljuk ki az alábbi függvény Fourier-transzformáltját!

$$f_1(t) = \Theta(t)\Theta(2-t), \quad f_2(t) = \Theta(t+2)\Theta(t)$$

Hogyan kaphatjuk meg az $f_2(t)$ függvényt az $f_1(t)$ függvényből?

- c) Számoljuk ki a az alábbi függvény Fourier-transzformáltját! (Használjuk a szorzat szabályt!)

$$f_3(t) = \Theta(t+2)\Theta(t) \cos(\pi t)$$

15. **Feladat: Differenciálegyenletek** (25 pont)

- a) Határozzuk meg az alábbi elsőrendű differenciálegyenlet megoldását $y(0) = 1$ feltétel mellett:

$$\dot{y} = \sin(\omega t)y^2$$

- b) Mi lesz a megoldása a következő homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek $y(0)=1$, $y(1)=1$ feltételek mellett!

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0. \quad (1)$$

Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet! Hány gyöke lesz az egyenletnek?

- c) Határozzuk meg a következő inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldását $y(0) = 0$ kezdőfeltétel esetén:

$$\dot{y} + \sin(\omega t)y = \sin(\omega t)$$

16. **Feladat:** Green-függvény normál-tér:

(25 pont)

a) Határozzuk meg a

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$$

differenciálegyenlet Green-függvényét normál t -térben! Figyeljünk a kauzalitásra! Milyen peremfeltételeket kell használnunk?

b) Határozzuk meg a partikuláris megoldást az alábbi gerjesztésre, Green-függvény segítségével:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t}$$

Képletgyűjtemény:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$$u(t) = e^{\int f(\tau) d\tau}$$

$$G(t, t') = e^{\int_{t'}^t f(\tau) d\tau} \Theta(t - t')$$

$$ch(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\frac{d}{dt} \ln(ch(t)) = th(t)$$

$$G(t, t') = \frac{y_1(t)y_2(t')}{W(t)} \Theta(t' - t) + \frac{y_1(t')y_2(t)}{W(t)} \Theta(t - t') \quad , W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

$$,y(t) = \frac{1}{u} \int u(t') g(t') dt' + \frac{C}{u}$$

$$sh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$,th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$