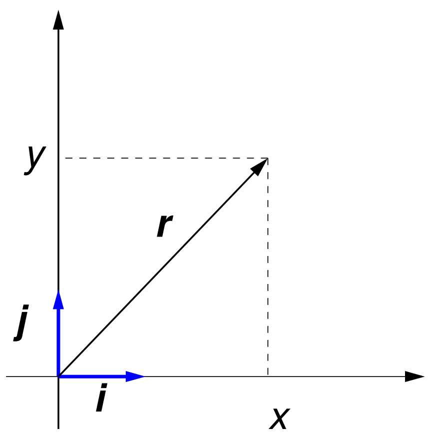
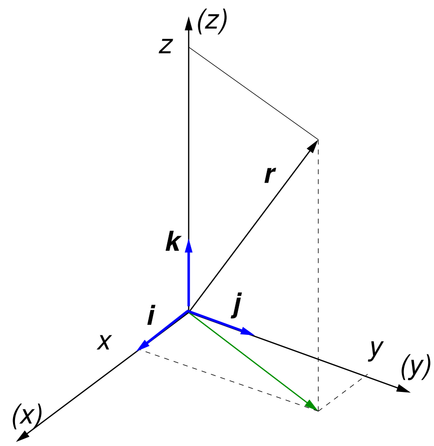
2D **3D**

Descartes koordináta rendszer



$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

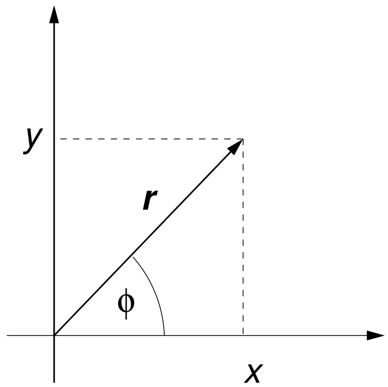


$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

2D

Polár koordináta rendszer



Polar koordináták: (r, φ).

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
tg(\varphi) &= \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

Áttérés Descartes koordinátákra:

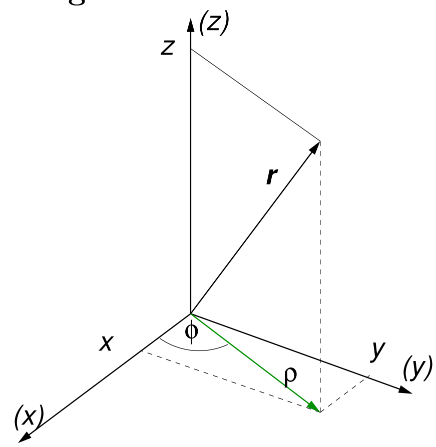
$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

Jacobi determináns:

$$
\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r
$$

3D

Henger koordináta rendszer



Polar koordináták: (ρ, φ, z).

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
tg(\varphi) &= \frac{y}{x} \\
z = z
\end{aligned}
$$

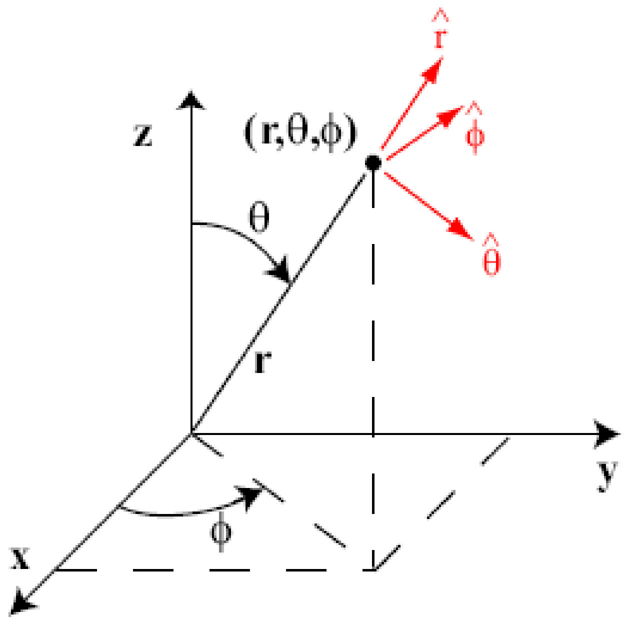
Áttérés Descartes koordinátákra:

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos(\varphi) \\
y &= \rho\sin(\varphi) \\
z &= z
\end{aligned}
$$

Jacobi determináns:

$$
\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\rho\sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho
$$

3D Gömbi koordináta rendszer



Polar koordináták: (r, φ, ϑ).

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
tg(\varphi) &= \frac{y}{x} \\
\cos(\vartheta) &= \frac{z}{r}
\end{aligned}
$$

Áttérés Descartes koordinátákra:

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\
z &= r\cos(\vartheta)
\end{aligned}
$$

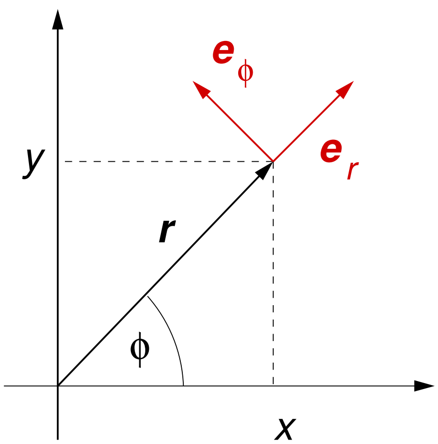
Jacobi determináns:

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\
\frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \\
-r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & 0 \\
r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -r\sin(\vartheta)
\end{vmatrix}
= r^2\sin(\vartheta)
$$

2D polár koordináta rendszer

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ \dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + r\dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



Vezessük be a

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

egységvektorokat! Ezek segítségével az $\mathbf{r}$ helyvektor idő szerinti deriváltját a következőképpen írhatjuk fel: $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{e}_r$ és $\mathbf{e}_\varphi$ merőlegesek egymásra: $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$, amint azt a baloldali ábrán is láthatjuk. Tanulságos meghatározni a második deriváltakat is:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$$

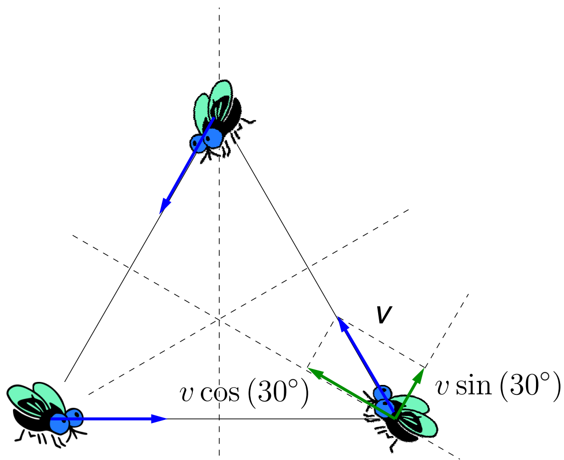
Idézzük fel, hogy mit tanultunk a körmozgásról! Válasszuk a koordináta rendszerünk origójának a kőr középpontját! Ebben az esetben, miután a kőr sugara állandó, $\dot{r} = 0$, így $\dot{\mathbf{r}}$ és $\ddot{\mathbf{r}}$ a következő alakra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -r\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Az első tag azt fejezi ki, hogy a sebességnek csak érintő irányú komponense van, amely $v = r\omega$ nagyságú, ahol $\omega = \dot{\varphi}$. A második egyenletben ráismerhetünk az $a_{cp} = r\omega^2 = r\dot{\varphi}^2$ centripetális gyorsulásra, amely a mozgás középpontja felé mutat és a $a_t = r\ddot{\varphi}$ tangenciális gyorsulásra, amely érintő irányú.

Példa:

Három légy ül egy szabályos háromszög három csúcsán. Egyszer csak elindulnak egymás felé úgy, hogy mindegyik légy a tőle jobbra lévő légy irányába mozog állandó v sebességgel. Mennyi idő múlva találkoznak, ha a háromszög oldalának a hossza a?



Válasszuk az origónkat a háromszög középpontjába és használjunk polár koordinátákat. Ekkor az ábráról leolvashatóan:

$$\dot{r} = -v\cos(30°)\,, \quad r\dot{\varphi} = v\sin(30°)$$

Kezdetben a legyek $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ távolságra vannak a középponttól és állandó $v\cos(30°) = v\frac{\sqrt{3}}{2}$ sebességgel mozognak felé:

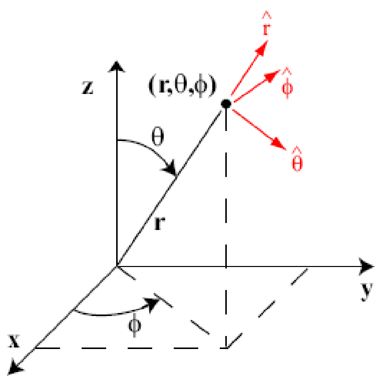
$$r(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}a - v\frac{\sqrt{3}}{2}t\,.$$

vagyis $t = \frac{2}{3}\frac{a}{v}$ idő mulva találkoznak az origóban.

3D gömbi koordináta rendszer

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) + r\dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \dot{r}\sin(\vartheta)\sin(\varphi) + r\dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \dot{r}\cos(\vartheta) - r\dot{\vartheta}\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \dot{r}\begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} + r\dot{\vartheta}\begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} + r\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Gömbi koordináta rendszer.
$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{e}_\vartheta$, $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{e}_\varphi$

Vezessük be a három egymásra merőleges egységvektort, amelyek egy jobbsodrású Descartes koordináta rendszert alkotnak:

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egységvektorok segítségével a helyvektor deriváltja a következőképpen írható fel:

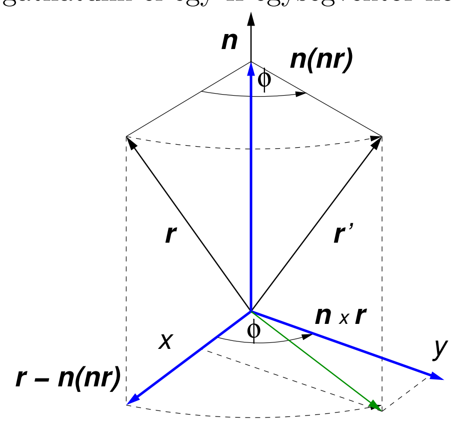
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + r\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\mathbf{e}_\varphi$$

Egységvektor idő szerinti deriváltja

Az egységvektor hossza időben állandó, ezért négyzetének idő szerinti deriváltja eltünik. Ebből következően az idő szerinti deriváltja merőleges lesz az eredeti egységvektorra:

$$\frac{de^2}{dt} = 2\dot{\mathbf{e}}\mathbf{e} = 0 \ .$$

Ha a vektorunk hossza az időbeli fejlődése során állandó, akkor nyilvánvalóan t pillanatból $t + \Delta t$-ba egy forgatással juthatunk. Ismételjük át azt, hogy egy tetszőleges $\mathbf{r}$ vektort miként forgathatunk el egy $\mathbf{n}$ egységvektor körül φ szöggel:



$$\mathbf{r}' = \mathbf{n}(\mathbf{nr}) + (\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{nr}))\cos(\varphi) + \mathbf{n} \times \mathbf{r} \sin(\varphi)$$

Határozzuk meg a fenti képlet segítségével az $\mathbf{e}$ egységvektor deriváltját:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{e}(t+\Delta t) - \mathbf{e}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{ne}) + (\mathbf{e} - \mathbf{n}(\mathbf{ne}))\cos(\Delta\varphi) + \mathbf{n} \times \mathbf{e} \sin(\Delta\varphi) - \mathbf{e}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \mathbf{n} \times \mathbf{e} = \dot{\varphi} \mathbf{n} \times \mathbf{e} \ ,
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\lim_{\Delta\varphi \to 0} \cos\varphi = 1$ és $\lim_{\Delta\varphi \to 0} \sin\varphi = \Delta\varphi$. Érdemes bevezetni az $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{n}$ szögsebesség vektort, amellyel egy állandó hosszúságú vektor deriváltja egyszerűen kifejezhető:

$$\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$$