1 Lineáris vektortér

1.1 Formális definíció

Legyen F egy Test. Egy V nemüres halmazt vektortérnek nevezünk az F test felett, ha

- V halmazon értelmezve van egy *összeadás* nevű művelet, $V \times V \to V$ függvény, $\forall$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ elempárhoz hozzárendel egy és csak egy V-beli elemet ($\mathbf{u}$+$\mathbf{v}$), valamint
- F és V között értelmezve van egy *skalárral való szorzás* nevű művelet, $F \times V \to V$ függvény, $\forall \lambda \in F$ és $\mathbf{v} \in V$ elempárhoz egyértelműen hozzárendel egy V-beli elemet ($\lambda\mathbf{v}$),

úgy, hogy az alábbi azonosságok, úgynevezett vektortér-axiómák teljesülnek:

1. V az *összeadás*ra nézve kommutatív, azaz az összeadás:
   - Asszociativitás: $\forall$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.
   - Kommutativitás: $\forall$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
   - létezik neutrális elem: $\mathbf{0} \in V$, V nullvektora: $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall$ $\mathbf{v} \in V$.
   - Invertálhatóság: $\forall$ $\mathbf{v} \in V$: $\exists$ olyan -$\mathbf{v} \in V$ additív inverz: $\mathbf{v}$ + (-$\mathbf{v}$) = $\mathbf{0}$.
2. *Skalárral való szorzás* disztributivitás szabályai:
   - $\forall \lambda \in F$ és $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$: $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$.
   - $\forall \lambda$, $\mu \in F$ és $\mathbf{v} \in V$: $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$.
   - $\forall \lambda$, $\mu \in F$ és $\mathbf{v} \in V$: $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$.
   - $\forall$ $\mathbf{v} \in V$: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, ahol 1 az F test egységeleme.

Lineáris függetlenség

Legyen a és $\{b_i\}$ egy lineáris vektortér elemei. Ha a nem állítható elő a b_i elemek lineáris kombinációjaként, akkor a lineárisan független a $\{b_i\}$ elemektől. Bázisnak nevezzük azokat a lineárisan független vektortér elemeket, amelyek lineáris kombinációjával minden vektortér elem előállítható.

1.2 Példák lineáris vektorterekre

- a közönséges síkbeli és térbeli, origóból kiinduló vektorok a valós test felett a szokásos vektorösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve,
- a valós szám n-esek $\mathbb{R}$ felett, a komplex szám n-esek $\mathbb{C}$ felett, és
- általában F n, F felett (F tetszőleges test), a szokásos módon értelmezett, komponensenként végzett műveletekre; ezeket a vektorokat általában oszlopvektorként ábrázolják,
- F n × k, F felett, azaz az n×k-as mátrixok F test felett, a mátrixok szokásos, komponensenkénti összeadására és skalárral való szorzására nézve.
- F [x], azaz az F feletti polinomok, F felett, a polinomok összeadására és skalárral való szorzására nézve,
- a legfeljebb n-edfokú polinomok F felett,

- valós számsorozatok a valós test felett a szokásos műveletekre,
- az $[a, b]$ intervallumon folytonos $\mathbb{R}$-be képező függvények a valós test felett, a szokásos pontonkénti összeadásra, és skalárral való szorzásra nézve,
- az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható $\mathbb{R}$-be képező függvények a valós számok teste felett, a szokásos pontonkénti összeadásra, valamint a skalárral való szorzásra nézve,
- a komplex számok a valós test felett, a komplex számok körében értelmezett műveletekre,
- a komplex számok a komplex számok teste felett,
- a valós számok a valós számok teste felett,
- a komplex számok a valós számok felett,
- a valós számok a racionális számok felett,
- általában, testbővítés esetén a bővebb test a szűkebb felett,
- a valószínűségi változók a szokásos összeadásra és skalárral való szorzásra nézve,
- az euklideszi sík, illetve tér eltolásai, hiszen az eltolások egymás utáni végzése megfelel a vektorok összeadásának, és a skalárszoros eltolás megfelel az eltolásvektor skalárszorosának. A nullelem az identitás, aminek megfelelője a nullvektor.

2 Lineáris operátorok

Egy lineáris operátor egy V lineáris vektortérről képez le egy U lineáris vektortérrre. A pontos definíció helyett tekintsünk egy példát. A lineáris vektorterünk legyen a legfeljebb n-ed fokú polinomok alkotta vektortér. Az operáció, egy művelet a vektortér elemein, legyen a differenciálás:

$$\hat{D}p_n(x) = \frac{d}{dx}p_n(x) ,$$

ahol $p_n(x)$ egy legfeljebb n-ed fokú polinom. Nyilvánvalóan

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j , \qquad \frac{d}{dx}p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} j c_j x^{j-1}$$

Bázisnak válasszuk a következő polinomok halmazát a vektorterünkben:

$$\{1, x, x^2, \dots x^n\}$$

Könnyen beláthatjuk, hogy tetszőleges, legfeljebb n-ed fokú polinom előállítható a bázist alkotó polinomok lineársi kombinációjaként. A $p_n(x)$ polinom együtthatói lesznek a lineáris kombinációs együtthatók. Vagyis az adott bázison a $(c_0, c_1, \dots c_n)$ vektor reprezentálja a polinomot. Vizsgáljuk meg, hogy a deriválás operátora hogyan változtatja meg a $p_n(x)$polinom együtthatóit. A derivált polinom együtthatói: $(c_1, 2c_2, 3c_3, \ldots nc_n, 0)$. A két vektort egy mátrix kapcsolja össze:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_2 \\ 3c_3 \\ \vdots \\ nc_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

Azt mondjuk, hogy a deriválás műveletét az adott bázison ez a mátrix reprezentálja. A $p_n(x)$ polinom második deriváltját reprezentáló mátrixot az előző mátrix négyzeteként állíthatjuk elő. Természeten ha egy legfeljebb n-ed rendű polinomot $n+1$-szer deriválunk, nullát kapunk eredményül. Ez azt jelenti, hogy a deriválást reprezentáló mátrix $n+1$-edik hatványa el kell, hogy tünjön. Az ilyen tulajdonságú mátrixokat nilpotens mátrixnak nevezzük.

Válasszunk egy másik H lineáris vektorteret: tekintsük azoknak a függvényeknek a halmazát, amelyeket az $[0, l]$ intervallumon értelmezünk és létezik ezen az intervallumon a négyzetük integrálja, valamint eltünnek a két végpontban. A legfeljebb n-ed fokú polinomok alkotta vektortér esetében nyilván $n+1$ lineárisan független bázis vektorunk volt, a vektortér dimenziója $n+1$ volt. Nézzük meg, hogy az újonnan vizsgált vektortérben hány független bázis vektort találhatunk. Tekintsük a következő függvényeket halmazát: $\{\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\frac{n\pi}{l} x)\}$. Nyilvánvalóan $\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0 \quad \forall n$. Vezessünk be egy skalár szorzatot:

$$\langle f|g\rangle = \int_0^l f^*(x)g(x)dx \ , f, g \in H$$

Az így értelmezett skalár szorzat a következő feltételeknek tesz eleget: Legyen x, y, z a vektortér eleme, λ pedig egy komplex szám.

1. $\langle x|x\rangle \geq 0$
2. Ha $\langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*$
4. $\langle x|\lambda y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle$
5. $\langle x|y + z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$

Az előző feltételeken kívül eleget tesz még a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenségnek is:

$$\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \geq |\langle x|y\rangle|^2 \ .$$

Értelmezzük a vektortér normáját, amely a 3D tér vektorai esetén a vektor hyosszát jelentette, a belső szorzat segítségével: $|x| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$. Ha a vektortér erre a normára nézve teljes, azaz minden H-beli Cauchy-sorozat konvergál egy vektortérbeli elemhez, akkor a vektorteret Hilbert térnek nevezzük. Számítsuk ki φ_n normáját:

$$\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = \frac{2}{l}\int_0^l \sin^2(\frac{n\pi}{l}x)dx = \frac{2}{l}\frac{1}{2}\int_0^l \left(1 - \cos(\frac{2n\pi}{l}x)\right) dx = 1 \ ,$$

tehát a $\{\varphi_n\}$ függvények normája egységnyi. Határozzuk meg két különböző bázis skalár szorzatát:

$$\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \frac{2}{l}\int_0^l \sin(\frac{n\pi}{l}x)\sin(\frac{m\pi}{l}x)dx\frac{2}{l}\frac{1}{2}\int_0^l \left(\cos(\frac{(n-m)\pi}{l}x) - \cos(\frac{(n+m)\pi}{l}x)\right)dx = 0\ , n \neq m$$

Összefoglalva:

$$\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \delta_{nm}\ ,$$

ahol δ_{nm} a Kronecker delta szimbólum

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = m \\ 0 & \text{ha} \quad n \neq m \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy a $\{\varphi_n\}$ függvények egy ortonormált bázist alkotnak a vektortéren. Nyilvánvalóan végtelen sok lineárisan független bázisfüggvényünk van, vagyis H egy végtelen dimenziós vektortér.

Vezessünk még be néhány, a későbbiek során hasznosnak bizonyuló definíciót. Legyen A egy lineáris operátor.

Akkor nevezünk egy operátort lineárisnak, ha teljesíti a következő feltételt:

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag\ ,$$

ahol f és g egy lineáris vektortér eleme, A lineáris operátor, amelyet értelmezünk a vektortéren és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a deriválás egy lineáris operátor.

Az A operátor adjungáltja (A^+) legyen az az operátor, amelyik teljesíti a következő feltételt:

$$\langle A^+ f|g\rangle = \langle f|Ag\rangle$$

Nézzünk egy példát! Jelölje a deriválás operátorát D. Ekkor:

$$\langle f|Dg\rangle = \int_0^l f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx = f(x)g(x)|_0^l - \int_0^l \frac{df(x)}{dx}g(x)dx$$

A parciális integrál első tagja eltünik, hiszen $f(0) = g(0) = f(l) = g(l) = 0$. Ezek szerint

$$\langle f|Dg\rangle = \int_0^l f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx = -\int_0^l \frac{df(x)}{dx}g(x)dx = -\langle Df|g\rangle\ ,$$

tehát D adjungáltja: $D^+ = -D$.