1 Kommutatorok

Legyen a, b, c három operátor, α, β komplex számok:

$$[a,b] = ab - ba, \qquad ab = ba + [a,b]$$

$$[a+b,c] = [a,c] + [b,c]$$

$$[\alpha a, \beta b] = \alpha\beta[a,b]$$

$$[ab,c] = a[b,c] + [a,c]b$$

$$[ab,c] = \underbrace{abc - acb}_{a[b,c]} + \underbrace{acb - cab}_{[a,c]b}$$

$$[p,x] = \frac{\hbar}{i}$$

2 Harmonikus oszcillátor

A rugó putenciális energiája $V(x) = \frac{k}{2}x^2$, saját frekvencia: $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. A harmonikus oszcilátor Hamilton operátora:

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\substack{\text{kinetikus}\\\text{energia}}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\omega^2 x^2}_{\substack{\text{potenciális}\\\text{energia}}}$$

Vezessük be a következő mennyiségeket és operátorokat:

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \qquad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right), \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right)$$

3 Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right) + \frac{1}{2}\hbar\omega \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{p^2}{p_0^2} + \frac{i}{x_0 p_0}(xp - px) + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\frac{i}{\hbar}[x,p] + 1\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m}
\end{aligned}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy $[a, a^+] = 1$!

$$[a, a^+] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right), \left(\frac{x}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{i}{x_0 p_0}\left([p,x] - [x,p]\right) = \frac{i}{x_0 p_0}[p,x] = \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar}{i} = 1$$

3. Határozzuk meg a következő felcserélési relációkat:

$$[H, a] =, \qquad [H, a^+] =$$

$$[H, a] = \hbar\omega\left[(a^+ a + \frac{1}{2}), a\right] = \hbar\omega[a^+ a, a] = \hbar\omega(a^+[a,a] + [a^+, a]a) = -\hbar\omega a$$

$$[H, a^+] = \hbar\omega\left[(a^+ a + \frac{1}{2}), a^+\right] = \hbar\omega[a^+ a, a^+] = \hbar\omega(a^+[a,a^+] + [a^+, a^+]a) = \hbar\omega a^+$$

4. Legyen $|\varphi_n\rangle$ a harmonikus oszcillátor Hamilton operátorának az E_n energiához tartozó sajátállapota: $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$. Határozzuk meg a következő kifejezéseket:

$$Ha|\varphi_n\rangle =, \qquad Ha^+|\varphi_n\rangle =$$

$$Ha|\varphi_n\rangle = (aH + [H,a])\,|\varphi_n\rangle = (aE_n - a\hbar\omega)|\varphi_n\rangle = (E_n - \hbar\omega)a|\varphi_n\rangle$$

Vagyis $a|\varphi_n\rangle$ sajátállapota a H operátornak $E_n - \hbar\omega$ sajátértékkel!

$$Ha^+|\varphi_n\rangle = \left(a^+ H + [H,a^+]\right)|\varphi_n\rangle = (a^+ E_n + a^+\hbar\omega)|\varphi_n\rangle = (E_n + \hbar\omega)a^+|\varphi_n\rangle$$

Vagyis $a^+|\varphi_n\rangle$ sajátállapota a H operátornak $E_n + \hbar\omega$ sajátértékkel!

A harmonikus oszcillátor Hamilton operátorának a várhatóértéke tetszőleges állapotban nagyobb mint 0.

$$\langle\varphi|H|\varphi\rangle = \frac{1}{2m}\langle\varphi|p^2|\varphi\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\langle\varphi|x^2|\varphi\rangle = \frac{1}{2m}|p|\varphi\rangle|^2 + \frac{1}{2}m\omega^2|x|\varphi\rangle|^2 \geqslant 0 \ ,$$

tehát létezik a harmonikus oszcillátor Hamilton operátorának egy legkisebb sajátértéke: E_0, ehhez tartozzen az $|\varphi_0\rangle$ sajátállapot. Ha a $|\varphi_0\rangle$ az a operátoral hatunk, akkor az új állapotnak kisebb lesz az energiája, ami ellent mond annak azállításnak, hogy a legkisebb energia az E_0. Ezt az ellentmondást úgy tudjuk feloldani, ha $a|\varphi_0\rangle = 0$! Helyyettesítsük be $a|\varphi_0\rangle$-t a sajátérték problémába:

$$H|\varphi_0\rangle = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)|\varphi_0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|\varphi_0\rangle = E_0|\varphi_0\rangle \ ,$$

tehát $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Tegyük fel, hogy a harmonikus oszcillátor egy $|\psi\rangle$ sajátállapotához E sajátérték tartozik, amelyre teljesül, hogy $(n-1)\hbar\omega \geqslant E \geqslant n\hbar\omega$. Ha erre az állapotra $n-1$-szer alkalmazom az a operátort, akkor a $|\varphi\rangle$ állapotot kapom. Ha erre a $|\varphi\rangle$ állapotra ismét alkalmazom az a operátort, akkor az új állapotnak el kell tünnie, különben az energiája kisebb lenne, mint E_0: $a|\varphi\rangle = 0$. Az előző egyenlet definiálja az alapállapotot, amely egyértelmű, tehát $|\varphi\rangle = |\varphi_0\rangle$! Vagyis minden állapotot lefelé léptetve az egyértelmű alapállapotba kell érkeznünk. Visszafalé gondolkodva: minden sajátállapotot megkaphatunk az alapállapotból indulva az a^+ operátor egymásutáni alkalmazásával. Ezek szerint az n-ik állapot energiája $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.