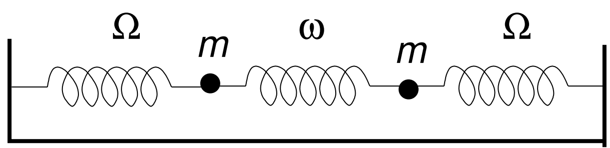
Feladatok kvantummechanikából

1. **Feladat**
   Az ábra szerint két tömegpont van összekötve rugókkal. A rendszer Hamilton operátora a következő alakú lesz:

$$H(x_1, x_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1 - x_2)^2 \ .$$



   Az $X = x_1 + x_2$ és $x = x_1 - x_2$ változók bevezetésével bontsuk fel a Hamilton operátort két, csak X-től és x-től függő részre.

$$H(x_1, x_2) = H(X) + H(x) \ .$$

   Milyen rendszernek lesz a Hamilton operátora a két operátor? Ne felejtsük el, hogy

$$p_1 = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx_1}, \qquad p_2 = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx_2}, \qquad p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}, \qquad P = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dX}$$

   Mutassuk meg, hogy a teljes rendszer sajátállapota a H(x) és H(X) operátorok sajátállapotainak szorzata lesz! A harmonikus oszcillátor φ_n sajátállapotait és a hozzájuk tartozó $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ energiáját tekintsük ismertnek! Páros vagy páratlan függvények lesznek a megoldások? Hogyan viselkednek a sajátállapotok x_1 és x_2 felcserélésével szemben?

2. **Feladat**
   Egy egydimenziós harmonikus oszcillátort homogén elektromos térbe helyezünk:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x.$$

   Teljes n;nyzett; alakítás segítségével vezessük vissza a problémát a harmonikus oszcillátor problémájára! Hogyan változik a rendszer energiája az elektromos tér hatására? Mik lesznek a rendszer sajátállapotai? (A harmonikus oszcillátor energiáját és hullámfüggvényeit tekintsük ismertnek!)

Megjegyzések:
Az első feladat időfüggetlen Schrödinger egyenlete:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x_1,x_2)}{dx_1^2} + -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x_1,x_2)}{dx_2^2} + \frac{1}{2}m\Omega^2(x_1^2+x_2^2)\psi(x_1,x_2) + \frac{1}{2}m\omega(x_1-x_2)^2\psi(x_1,x_2) = E\psi(x_1,x_2)$$

A második feladat időfüggetlen Schrödinger egyenlete:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\varphi_n - q\mathcal{E}x\varphi_n = E_n\varphi_n$$