Feladatok a speciális relativitás elméletből

1. **Feladat:**
A $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ inercia rendszerek tengelyei párhuzamosak és a $t = 0$ pillanatban a két rendszer origója ey pontban volt. $\mathcal{K}'$ V sebességgel halad az x-tengely mentén $\mathcal{K}$-hoz képest. Milyen sebességgel halad egy tömegpont a $\mathcal{K}'$ rendszerben, ha sebességének a komponensei $\mathcal{K}$-ban $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$? Induljunk ki a hely Lorentz transzformációjából!

Megoldás:
A hely y és z koordinátái változatlanok maradnak, hiszen $\mathcal{K}'$ az x tengely mentén mozog $\mathcal{K}$-hoz képest. A négyes hely Lorentz transzformáltját ebben az esetben a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ v_x' t' \\ v_y' t' \\ v_z' t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{V}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{V}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ v_x t \\ v_y t \\ v_z t \end{pmatrix} , \tag{1}$$

ahol bevezettük a $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ jelölést. Írjuk ki soronként a fenti egyenleteket:

$$ct' = \gamma ct - \gamma\frac{V}{c} v_x t \tag{2}$$

$$v_x' t' = -\gamma V t + \gamma v_x t \tag{3}$$

$$v_y' t' = v_y t \tag{4}$$

$$v_z' t' = v_z t \ . \tag{5}$$

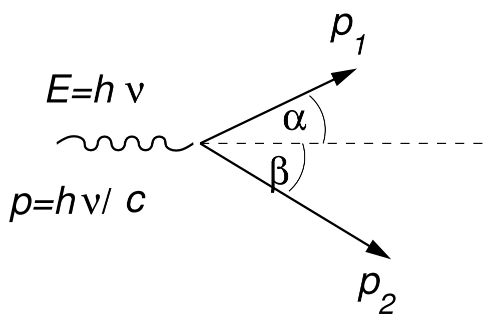
Oszzuk el rendre a 3, 4, 5 számú egyenleteket az időre vonatkozó 2-es egyenlettel:

$$\frac{v_x'}{c} = \frac{v_x - V}{c - \frac{V v_x}{c}}, \qquad \frac{v_y'}{c} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{c - \frac{V v_x}{c}}, \qquad \frac{v_z'}{c} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{c - \frac{V v_x}{c}} , \tag{6}$$

vagyis

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}, \qquad v_y' = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}, \qquad v_z' = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1 - \frac{V v_x}{c^2}} \tag{7}$$

2. **Feladat:**
Elegendően nagy energiájú γ foton esetében lehetséges az u.n. párkeltés, amelynek során a fotonból egy elektron-pozitron pár keletkezik. A két részecske tömege megegyezik, csak a töltésük ellentétes előjelű. A foton energiája $E = h\nu$, lendülete $p = h/\lambda$, ahol h a Planck állandó, ν és λ a foton frekvenciája és hullámhossza. A foton nyugalmi tömege nulla. Létre jöhet-e a párkeltés ha a kiinduló részecske egy foton és egy elektron-poziron pár a végállapot. Vizsgáljuk meg, hogy a folyamat során megmarad-e a négyes impulzus!



Megoldás:
Mielőtt felírjuk a négyes impulzus komponenseinek a megmaradását, vezessük be a következő jelöléseket:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}, \qquad m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$

A négyes impulzus megmaradása:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = m_1 c + m_2 c \tag{8}$$

$$\frac{h}{\lambda} = m_1 v_1 \cos(\alpha) + m_2 v_2 \cos(\beta) \tag{9}$$

$$0 = m_1 v_1 \sin(\alpha) - m_2 v_2 \sin(\beta) \tag{10}$$

Használjuk ki a négyes impulzus normájának az invarianciáját:

$$m_1^2 c^2 - m_1^2 v_1^2 = m_0^2 c^2, \qquad m_2^2 c^2 - m_2^2 v_2^2 = m_0^2 c^2 \tag{11}$$

ekkor

$$m_1 c = \sqrt{m_0^2 c^2 + m_1^2 v_1^2}, \qquad m_2 c = \sqrt{m_0^2 c^2 + m_2^2 v_2^2} \tag{12}$$

Tegyük egyenlővé a 8 és 15 számú egyenleteket és használjuk ki a 12-es összefüggéseket:

$$m_1 v_1 \cos(\alpha) + m_2 v_2 \cos(\beta) = \sqrt{m_0^2 c^2 + m_1^2 v_1^2} + \sqrt{m_0^2 c^2 + m_2^2 v_2^2} \tag{13}$$

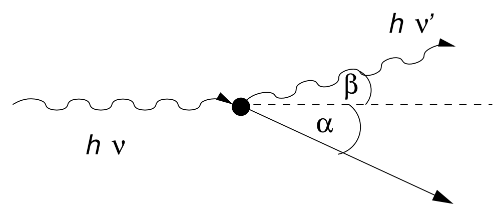
A 13-as számú egyenlet nyilvánvalóan sosem teljesülhet, hiszen az m_0 véges nyugalmi tömeg miatt az egyenlet jobb oldala mindig nagyobb, mint a baloldalon álló kifejezés. Tehát egy egyedülálló foton az energia és impulzus megmaradás miatt nem tud átalakulni egy elektron-pozitron párrá.

3. **Feladat**

Mutassuk meg, hogy a Compton szórás során a szórt foton hullámhossza a

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos(\vartheta)\right)$$

kifejezés szerint változik. Használjuk fel a négyes impulzus megmaradását!



Megoldás:

Az előző feladathoz hasonlóan írjuk fel a négyes impulzus megmaradását. Kezdetben az elektron nyugalomban volt és a foton az x tengely mentén haladt:

$$\begin{aligned} \frac{h\nu}{c} + m_0 c &= \frac{h\nu'}{c} + mc &\quad (14)\\ \frac{h}{\lambda} &= \frac{h}{\lambda'}\cos(\vartheta) + mv\cos(\alpha) &\quad (15)\\ 0 &= \frac{h}{\lambda'}\sin(\vartheta) - mv\sin(\alpha)\ , &\quad (16) \end{aligned}$$

ahol az előző példához hasonlóan bevezettük a $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ jelölést. Némi átrendezés után emeljük négyzetre a 15 és 16 számú egyenleteket és adjuk össze őket:

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos(\vartheta) = m^2v^2 \tag{17}$$

A Minkowski tér normájának invarianciájából tudjuk, hogy

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2 \qquad \rightarrow \qquad m^2v^2 = m^2c^2 - m_0^2c^2\ . \tag{18}$$

Használjuk fel az összefüggést a 17 számú egyenletben:

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos(\vartheta) + m_0^2c^2 = m^2c^2 \tag{19}$$

A 14-es egyenletben használjuk ki, hogy $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ és emeljük négyzetre:

$$\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} + m_0c\right)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + m_0^2c^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'} + 2\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)m_0c = m^2c^2 \tag{20}$$

A 19. és 20. egyenleteket egyenlővé téve adódik, hogy

$$2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\left(1-\cos(\vartheta)\right) = 2\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)m_0c\ . \tag{21}$$

Az egyenletet átrendezve kapjuk a bizonyítandó összefüggést:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}\left(1 - \cos(\vartheta)\right) \tag{22}$$