Ismétlés

- Sajátidő

$$\tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

- Minkowski tér Skalár szorzat

$$(\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}) = (ct\,, x\,, y\,, z) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{g metrikus tenzor}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A Lorentz transzformáció a $(\mathrm{x} \cdot \mathrm{x})$ skalár szorzatot nem változtatja meg $\Rightarrow$ a $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$ sajátidő minden inerciarendszerben ugyanaz.

Négyes vektorok

A négyes hely vektort

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

egyik inerciarendszerből a másik inercia rendszerbe a Lorentz transzformáció viszi át. Minden négy komponensű vektort, amely a Lorentz transzformáció szerint transzformálódik egyik inerciarendszerből a másik inerciarendszerbe való áttéréskor, négyes vektornak nevezünk. A négyes vektorok 0-dik komponensét időszerű komponensnek, a maradék három komponensét pedig térszerű komponensnek nevezzük.

Négyes sebesség

A sebesség a hely vektor idő szerinti deriváltja. Az idő nem egyformán telik a különböző inercia rendszerekben!
A négyes sebesség a négyes hely vektor sajátidő szerinti deriváltja, ekkor a négyes sebesség úgy transzformálódik, mint a négyes hely.

$$\mathrm{v} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \qquad d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt, \qquad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

A négyes sebesség:

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}}$$

Négyes sebesség

Működik-e a sebességek összeadása:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}} \; ?$$

v a sebesség a $\mathcal{K}$ rendszerben, V a $\mathcal{K}'$ rendszer sebessége, v' pedig a $\mathcal{K}'$-beli sebesség. Transzformáljuk a négyes (kettes) sebességet:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c} \\ -\frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} c &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(c - \frac{Vv}{c} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} v' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (v - V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v'}{c} &= \frac{v - V}{c - \frac{vV}{c}} \\ v' &= \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}} \end{aligned}$$

Négyes impulzus

Klasszikus impulzus vagy lendület: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.
Legyen a négyes impulzus: $\mathtt{p} = m\mathtt{v}$.

$$\mathtt{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Mi a jelentése az egyes komponenseknek? Nézzük meg a $v \ll c$ klasszikus határeseteket.
A térszerű komponensek esetén:

$$\mathtt{p}_i = \underbrace{\frac{m v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}_{1} \approx m v_i \ , \quad i = 1, 2, 3$$

szokásos lendület komponensek.

Négyes impulzus

A nulladik komponens $v \ll c$ határesetben:

$$c\mathrm{p}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$c\mathrm{p}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Tehát $c\mathrm{p}_0$ a tömegpont mozgási energiájával kapcsolatos! A tömegpont energiája akkor sem tünik el, ha a részecske nyugalomban van $v = 0$! mc^2 nyugalmi energia.

A $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ függvény Taylor sora:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_1 - \frac{d}{dx}\left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_1 x = 1 + \frac{1}{2}x$$

Minden m nyugalmi tömeggel rendelkező részcskének mc^2 nyugalmi energiája van! Véges nyugalmi tömeggel rendelkező részecske energiája végtelenbe tart, ha a sebessége megközelíti a fénysebességet! Csak nulla nyugalmi tömegű részecske mozoghat fénysebességgel!

Négyes impulzus

A négyesimpulzus komponensei:

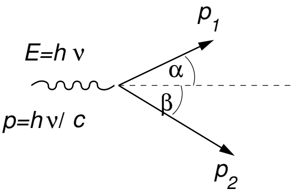
$$\mathrm{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ m\mathbf{v} \end{pmatrix}, \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ütközésnél, vagy bomlásnál a négyesimpulzus komponensei megmaradnak. A $\mathrm{p} \cdot \mathrm{p} = m^2c^2 - m^2\mathbf{v}^2$ minden inerciarendszerben ugyanazt az értéket veszi fel, hiszen a Lorentz transzformáció önmagába viszi át a skalárszorzatot. Válasszunk egy olyan inercia rendszert, amelyben a tömegpont nyugalomba van. Ebben a rendszerben a skalárszorzat m_0c^2, tehát:

$$m^2c^2 - m^2\mathbf{v}^2 = m_0^2c^2$$

Négyes impulzus alkalmazásai: Párkeltés

Az elektron nyugalmi tömege $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, a nyugalmi energiája $E_0 = 0.5\ MeV$. Ha egy foton energiája nagyobb mint $2E_0$ akkor létrhozhat egy elektron-pozitron párt. Ezt a jelenséget hívjuk párkeltésnek. A foton energiája a frekvenciájától: $E_p = h\nu$, az impulzusa pedig a hullámhosszától függ: $p = h/\lambda$ ahol h a Plank állandó, ν a frekvencia, λ pedig a foton hullámhossza. $\lambda = c/\nu$.



$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}, \qquad m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$

A négyes impulzus megmaradása:

$$\begin{aligned}
\frac{h\nu}{c} &= \frac{h}{\lambda} = m_1 c + m_2 c \\
\frac{h}{\lambda} &= m_1 v_1 \cos(\alpha) + m_2 v_2 \cos(\beta) \\
0 &= m_1 v_1 \sin(\alpha) - m_2 v_2 \sin(\beta)
\end{aligned}$$

Négyes impulzus alkalmazásai: Párkeltés

Teljesülhet-e mind a három egyenlet:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = m_1 c + m_2 c$$
$$\frac{h}{\lambda} = m_1 v_1 \cos(\alpha) + m_2 v_2 \cos(\beta)$$
$$0 = m_1 v_1 \sin(\alpha) - m_2 v_2 \sin(\beta)$$

A négyes impulzus normájának az invarianciája:

$$m_1^2 c^2 - m_1^2 v_1^2 = m_0^2 c^2$$
$$m_2^2 c^2 - m_2^2 v_2^2 = m_0^2 c^2$$

innen

$$m_1 c = \sqrt{m_0^2 c^2 + m_1^2 v_1^2}$$
$$m_2 c = \sqrt{m_0^2 c^2 + m_2^2 v_2^2}$$

$$m_1 v_1 \cos(\alpha) + m_2 v_2 \cos(\beta) \neq \underbrace{\sqrt{m_0^2 c^2 + m_1^2 v_1^2}}_{\text{nagyobb mint } m_1 v_1} + \underbrace{\sqrt{m_0^2 c^2 + m_2^2 v_2^2}}_{\text{nagyobb mint } m_2 v_2}$$

A négyes impulzus megmaradása nem teljesül. Szükség van egy másik résztvevőre is!